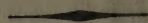




YALE UNIVERSITY
LIBRARY



STERLING
CHEMISTRY LABORATORY

WITHDRAW

hem *Lab.* (This material is restricted in use and cannot be quoted by title or abstract for propaganda purposes or in the popular press. Quotation of titles and abstracts in publications of purely technical or scientific nature is not prohibited.)

ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG
DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

VON
H. GEIGER

121. BAND

Mit 268 Textfiguren



SPRINGER-VERLAG, BERLIN

1943

(Reproduced and Distributed in the Public Interest by
THE ALIEN PROPERTY CUSTODIAN)



Alle Rechte,
insbesondere das Recht der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Inhalt des 121. Bandes.

1. und 2. Heft.

(Abgeschlossen am 10. Mai 1943.)

	Seite
Manfred von Ardenne , Zur Eignung bindemittelarmer Photoschichten in der Elektronen-Übermikroskopie. Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 26. November 1942)	1
W. O. Schumann , Über Plasmalaufzeitschwingungen. Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 4. Dezember 1942)	7
U. Stille , Die Umrechnungsfaktoren von internationalen auf absolute elektrische Einheiten. (Eingegangen am 1. Dezember 1942)	34
Th. Wasserrab , Die positive Säule mit gekrümmter Entladungsbahn. (Mitteilung aus dem Stromrichterwerk der SSW.) Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 8. Januar 1943)	54
E. Fues , Gibt es Wirbelreibung? II. Entgegnung zu den Einwänden von E. Mohr. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 17. November 1942)	58
Theodor Schmidt , Über das Quadrupolmoment des Atomkerns $^{181}_{73}\text{Ta}$. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 14. Dezember 1942)	63
Ludwig Graf , Zum Gefügebau der Realkristalle. Die Ausbildung der Mosaikstruktur in gegossenem, plastisch verformtem und rekristallisiertem Material. (Institut für Metallphysik am Kaiser Wilhelm-Institut für Metallforschung, Stuttgart.) Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 5. Januar 1943)	73
Klaus Sixtus , Das Gesetz der Magnetisierung in schwachen Feldern. (Mitteilung aus dem Forschungs-Institut der AEG.) Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 11. Januar 1943)	100
R. Suhrmann und W. Kundt , Über den Einfluß adsorbierten Sauerstoffs auf die Sekundäremission aufgedampfter Metallschichten bei 293° und 83° abs. Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 26. Januar 1943)	118

3. und 4. Heft.

(Abgeschlossen am 20. Juni 1943.)

U. Stille , Die atomaren Konstanten e , e/m_0 und h Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 1. Dezember 1942)	133
Helmut Volz , Wirkungsquerschnitte für die Absorption langsamer Neutronen. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 27. Januar 1943)	201
Manfred von Ardenne (zum Teil gemeinsam mit Fritz Bernhard), Über eine Atomumwandlungsanlage für Spannungen bis zu 1 Million Volt. Mit 19 Abbildungen. (Eingegangen am 29. Januar 1943)	236
J. Gehlen , Bestimmung des Einfangwirkungsquerschnittes von technischem Aluminium für langsame Neutronen. Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 27. Februar 1943)	268
W. Maurer und H. Pose , Neutronenemission des Urankerns als Folge seiner spontanen Spaltung. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 20. Februar 1943)	285
H. Pose , Spontane Neutronenemission von Uran und Thorium. (Eingegangen am 20. Februar 1943)	293
S. Flüge , Zur spontanen Spaltung von Uran und seinen Nachbarelementen. (Eingegangen am 20. Februar 1943)	298

5. bis 8. Heft.

(Abgeschlossen am 10. August 1943.)

Ernst Mohr , Laminare und turbulente Strömungen mit besonderer Berücksichtigung des Einflusses von festen Wänden. Mit 14 Abbildungen. (Eingegangen am 30. November 1942)	301
Raimund Ulbrich , Die Aktivierung der Palladiumoberfläche mittels Glimmentladung. Mit 23 Abbildungen. (Eingegangen am 10. November 1942)	351
M. Krüger , Die Theorie der in endlicher Entfernung von der Trennungsebene zweier Medien erregten Kugelwelle für endliche Brechungsindizes. Mit 26 Abbildungen. (Eingegangen am 18. Dezember 1942)	377

	Seite
Walter Hanke , Beitrag zum Problem der Bestimmung von Größe und Gestalt ultramikroskopischer Teilchen. Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 3. Januar 1943)	438
L. Gerö und R. Schmid , Über das Bandenspektrum des Silberhydrids. Mit 22 Abbildungen. (Eingegangen am 14. Januar 1943)	459
K. M. Koch , Bemerkungen zu der Arbeit von Th. Neugebauer: „Der absolute Diamagnetismus der Supraleiter.“ Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 20. Januar 1943)	488
F. I. Havlíček , Zur Struktur des Wassers. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 27. Januar 1943)	495

9. und 10. Heft.

(Abgeschlossen am 24. August 1943.)

L. Waldmann , Der Diffusionsthermoeffekt. I. Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 16. Februar 1943)	501
Paul Gombás , Erweiterung der statistischen Theorie des Atoms. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 26. Februar 1943)	523
R. W. Pohl , Nebenbegriffe und Gasgesetz. (Eingegangen am 29. April 1943)	543
W. Lumpe und R. Seeliger , Über die Wanderung von Edelgasen durch Metalle. Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 19. März 1943)	546
M. Kornetzki , Über die Dämpfung mechanischer Schwingungen durch magnetische Hysteresse. (Mitteilung aus dem Zentrallaboratorium der Wernerwerke der Siemens & Halske A.-G.) Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 12. April 1943)	560
G. Mierdel , Das Abklingen von Trägerdichte und Elektronentemperatur in verlöschenden Niederdruckentladungen. (Mitteilung aus dem Stromrichterwerk der Siemens-Schuckertwerke, Berlin-Siemensstadt.) Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 20. April 1943)	574
W. Finke , Bemerkungen zu G. Haenzel: „Die Polygonfläche und das Periodische System der Elemente.“ Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 27. April 1943)	586

K.-H. Hellwege , Zur Ausmessung atomarer Strahlungsquellen in Kristallen. II. Berechnung der Absorptionsverteilung für Dipolstrahlung und Bestimmung von Übergangswahrscheinlichkeiten. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 3. April 1943)	588
W. Walcher , Über die Verwendungsmöglichkeiten der Kunsman-Anode zur massenspektroskopischen Isotopentrennung. Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 24. März 1943)	604
Heinz Koppe , Eine Näherungsmethode zur Berechnung der magnetischen Suszeptibilität. Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 15. April 1943)	614

11. und 12. Heft.

(Abgeschlossen am 1. Oktober 1943.)

W. O. Schumann , Über räumlich periodische Verteilungen frei fallender Ionen und Elektronen. Mit 14 Abbildungen. (Eingegangen am 25. Februar 1943)	629
Walter Glaser , Bildentstehung und Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops vom Standpunkt der Wellenmechanik. (Aus dem Institut für Theoretische Physik der Deutschen Karls-Universität und Technischen Hochschule in Prag und dem Laboratorium für Elektronenoptik der Siemens & Halske A.-G. in Berlin.) Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 15. März 1943)	647
T. L. de Bruin, Ph. Schuurmans und P. F. A. Klinkenberg , Die Struktur des Th II-Spektrums. I. Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 23. Februar 1943)	667
H. Schaefer und W. Walcher , Negative Ionen in Braunschen Röhren und ihr Zusammenhang mit dem Oxydkathoden-Mechanismus. Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 9. April 1943)	679
G. C. Wick , Über ebene Diffusionsprobleme. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 18. März 1943)	702
W. Walcher , Der Einfluß der Raumladung auf die Abbildungseigenschaften magnetischer Sektorfelder. Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 24. März 1943)	719

Otto Hahn und Fritz Strassmann, Über die bei der Uranspaltung auftretenden Strontium- und Yttrium-Isotope. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 10. Mai 1943)	729
H. Boersch, Nebenbilder in elektronenmikroskopischen Abbildungen. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 5. Juni 1943)	746
Heinz Born, Berichtigung zur Arbeit „Zur Frage der Absorptionsmessung im Ultraschallgebiet“	754
Autorenregister	755
Titel und Inhalt zum 121. Bande.	

Zur Eignung bindemittelarmer Photoschichten in der Elektronen-Übermikroskopie.

Von Manfred von Ardenne.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen 26. November 1942.)

Die Daten bindemittelarmer Photoschichten für Elektronenschwärzung bei den Voltgeschwindigkeiten der Übermikroskopie werden unter Berücksichtigung einer neueren Untersuchung diskutiert und die gute Eignung dieser Schichten für übermikroskopische Zwecke bestätigt.

Die Güte einer im Übermikroskop zur Endbildaufnahme benutzten photographischen Schicht ist proportional ihrer Elektronenempfindlichkeit und umgekehrt proportional dem Quadrat ihres Auflösungsvermögens¹⁾. Als entsprechende Größe verwendet von Borries im Rahmen seiner ausführlichen Untersuchung²⁾ über die Eignung photographischer Platten für übermikroskopische Aufnahmen die *Bildpunktsarbeit*. Die Forderung nach hoher Güte bzw. möglichst geringer Bildpunktsarbeit der Photoschicht ist gleichbedeutend mit der Forderung nach möglichst geringer Objektbelastung bei geringstmöglicher elektronenoptischer Vergrößerung. In bezug auf die Eigenschaften bindemittelarmer photographischer Schichten gelangt der Verfasser zu wesentlich günstigeren Ergebnissen als von Borries. Zur Vereinheitlichung der Auffassungen sollen im Rahmen dieser Mitteilung die Ergebnisse des Verfassers diskutiert werden. Hierfür wird die Bildpunktsarbeit als Vergleichsgröße herangezogen.

In den zitierten Mitteilungen hat von Borries an verschiedenen Stellen auf den Einfluß der Entwicklungszeit der von uns beiden herangezogenen bindemittelarmen Agfa-Schumann-Hart I-Platte bei dem von der Herstellerfirma empfohlenen Spezialentwickler (Final-Röhrchen-Entwickler) hingewiesen. In seinen die Ergebnisse zusammenfassenden Kurven Darstellungen und Tabellen ist jedoch einheitlich noch die sehr ungünstige 4-Minuten-Final-Röhrchen-Entwicklung 18° C für die bindemittelarme Schicht benutzt. Auch der Verfasser hatte bei den ersten Versuchen mit Schumann-Schichten zunächst die angegebene Entwicklung durchgeführt und sehr schlechte Ergebnisse erzielt, war dann aber sofort zur Entwicklung mit handelsüblichem Final- oder Eikonol-Flaschen-Entwickler übergegangen.

¹⁾ M. v. Ardenne, ZS. f. Phys. 114, 379, 1939. — ²⁾ B. v. Borries, I. Mit.: Phys. ZS. 43, 190, 1942; II. Mitt.: ZS. f. angew. Photographie 4, 42, 1942; III. Mitt.: ZS. f. Phys. 119, 498, 1942.

Die Gegenüberstellung von zwei Hälften der gleichen durchgeschnittenen Schumann-Platte mit treppenartig abgestufter Belichtung, die sich nur durch die Entwicklung unterscheiden, bringt Fig. 1. Die Belichtungszeit der einzelnen Stufen ist jeweils um den Faktor 3,2 verschieden. Der obere

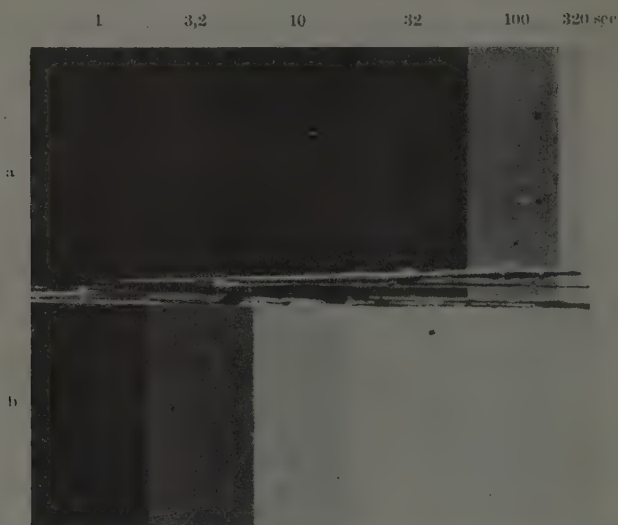


Fig. 1. Der Einfluß der Entwicklung auf die Schwärzung der Agfa-Schumann-Hart-Platte. (60 kV Strahlspannung; gleiche Platte; gleiche Belichtungstreppe; gleiche weiche Kopierung). a) 4 Minuten Final-Röhrchen-Entwicklung in vorgeschriebener Konzentration bei 18° C. b) 6 Minuten Eikonol-Flaschen-Entwicklung in Verdünnung 1:15 bei 18° C.

Streifen wurde mit Agfa-Final-Röhrchen-Entwickler in vorgeschriebener Konzentration (58 g Entwicklersubstanz in 1 Liter Wasser) 4 Minuten bei 18° C entwickelt, der untere Streifen mit Eikonol-Flaschen-Entwickler (Verdünnung 1:15) 6 Minuten lang bei ebenfalls 18° C. In beiden Fällen war der Entwickler frisch angesetzt. Die genaue Auswertung der Streifen im Densographen ergab, daß die Schwärzung $S = 0,5$ bei der vom Verfasser benutzten Entwicklung mit einer Ladungsdichte erreicht wird, die nur ein Siebenundzwanzigstel derjenigen beträgt, die bei der Final-Röhrchen-Entwicklung die gleiche Schwärzung ergibt. Zum Vergleich mit den Kurven der Fig. 3 und 4 der Literaturstelle, Anm. 2, I. Mitteilung, sind in Fig. 2 die den beiden Entwicklungen zugeordneten Schwärzungskurven eingetragen und als Bezugspunkt die Ladungsdichte für die Schwärzung 0,5 bei Final-Röhrchen-Entwicklung gewählt. Man erkennt, daß die richtig ausentwickelte Schumann-Hart-Platte bei der Schwärzung $S = 0,5$ und 60 kV-Strahlspannung etwa die gleiche Empfindlichkeit aufweist, wie eine der emp-

findlichsten handelsüblichen Platten, daß ihre Steilheit jedoch im Bereiche des zugrundegelegten Schwärzungswertes etwas kleiner ist (statt Perutz-Silber-Eosin 0,94 nur 0,55).

Zur Festlegung der Bildpunktsarbeit ist noch die Größe des Auflösungsvermögens bei der benutzten Strahlspannung und bei dem zugrundegelegten Kontrastverhältnis zu ermitteln. Insbesondere ist dabei

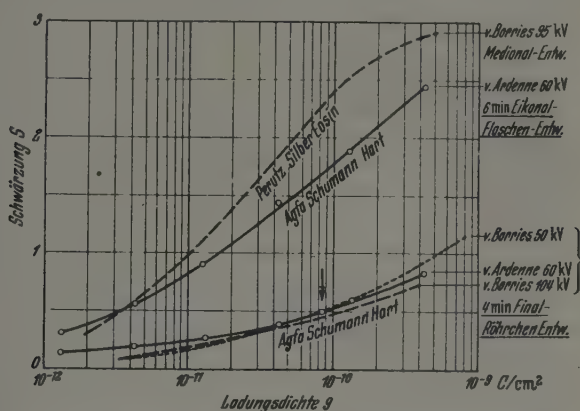


Fig. 2. Schwärzungskurven der Agfa-Schumann-Hart-Platte für die Entwicklungsarten nach Fig. 1a und 1b und der Perutz-Silber-Eosin-Platte.

zu prüfen, wie stark das Auflösungsvermögen durch die sehr viel stärkere Durchentwicklung der Schicht verschlechtert wurde.

Aus der eingehenden Untersuchung von von Borries (Anm. 2, II. Mitteilung) folgt, daß bei den heutigen Betriebsspannungen und -verhältnissen das Auflösungsvermögen der photographischen Schichten weniger durch den Vorgang der räumlichen Elektronenstreuung (Literaturstelle Anm. 1), als vielmehr durch die Körnung der Schichten bedingt ist. Dieses nach der Methode des charakteristischen Betrachtungsabstandes vergrößerter Kornbilder bestimmte Auflösungsvermögen verschlechtert sich im Falle der angegebenen starken Durchentwicklung der Schumann-Schicht nur im Verhältnis 1:1,4 gegenüber dem mit Final-Röhrchen-Entwickler erzielten Wert. (Untersuchung des Verfassers an den Proben Fig. 1a, 1b und den der Schwärzung $S = 0,5$ am nächsten kommenden Streifen.) Unter Zugrundelegung dieser Veränderung sowie der Tabelle 5 in der Literaturstelle Anm. 2, II. Mitteilung, ergibt sich für den Elektronenkontrast 1,31 und 60 kV Strahlspannung der in Fig. 3 angekreuzte Wert für die Bildpunktsarbeit der Agfa-Schumann-Hart-Platte. Dieser Wert liegt etwa auf der Kurve der günstigsten handelsüblichen Schicht mit Bindemittel. *Ungefähr*

um den Faktor 2 günstiger als die günstigste handelsübliche Schicht mit Bindemittel wird gemäß Fig. 4 die Agfa-Schumann-Hart-Platte, wenn der Elektronenkontrast 2 zugrundegelegt wird. Daß diese Überlegenheit besteht, darf nicht überraschen, denn die Schädlichkeit eines die Elektronen zerstreuen und den Abstand zwischen den einzelnen Bromsilberkörnern heraufsetzenden, andererseits für den photographischen Prozeß selbst nicht aktiven Bindemittels ist unmittelbar einzusehen. Die Überlegenheit der bindemittelarmen

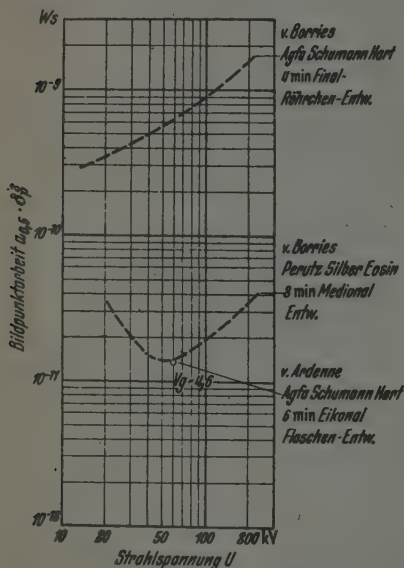


Fig. 3. Die bei einem Elektronenkontrast $a_2/a_1 = 1.31$ und der bindemittelarmen Agfa-Schumann-Hart-Platte zur Schwärzung eines Bildpunktes erforderliche Bildpunktarbeit $a_{0.5} \cdot \delta_p^3$ für Entwicklung nach Fig. 1a und 1b.

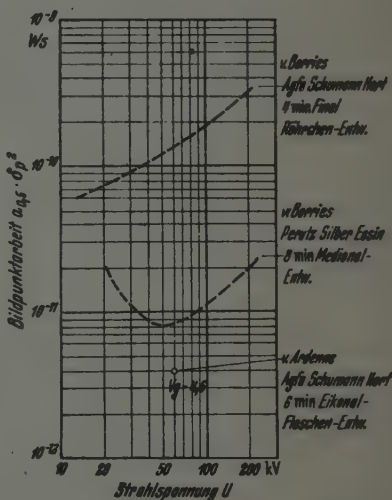


Fig. 4. Die bei einem Elektronenkontrast $a_2/a_1 = 2$ für die Bedingungen der Fig. 3 resultierende Bildpunktarbeit.

Schicht ist allerdings nicht mehr so groß wie früher¹⁾ vom Verfasser angenommen. In Übereinstimmung mit von Borries (Literaturstelle Anm. 2, II. Mitteilung, S. 58) ist der Verfasser der Ansicht, daß der Beurteilungsunterschied zum Teil in dem wesentlich höheren Elektronenkontrast bei den mit der Elektronensonde hergestellten Strichen und zum Teil in der anderen Definition des Auflösungsvermögens und schließlich darin gelegen hat, daß dem Verfasser bei seiner Untersuchung 1939 offenbar günstigere Schumann-Schichten, die wesentlich weniger Bindemittel als die heutigen

¹⁾ Siehe Literaturstelle Anm. 1.

enthielten, zur Verfügung standen. Nicht nur aus einem gefundenen Schichtdickenunterschied wird diese Vermutung gestützt, sondern auch durch die Beobachtung, daß die damals verwendeten Schumann-Platten sehr viel instabiler und stöempfindlicher waren.

Die absolute Größe von Auflösungsvermögen bzw. Bildpunktsarbeit hat entscheidende Bedeutung für die übermikroskopische Abbildung von Lebensvorgängen. Hier erscheint es dem Verfasser als zu weitgehend, wenn man mit von Borries bei der Bestimmung dieser Größen davon ausgeht, daß die Kornstruktur (immer bei der Plattenschwärzung 0,5) sich noch völlig der Beobachtung entziehen soll. Gerade nachdem man sich bei solchen Aufnahmen über die zu erwartenden Strukturen aus höher vergrößerten Bildern von abgetöteten Objekten orientieren kann, dürfte es richtiger sein, sich mit der weniger strengen Forderung zu begnügen, daß dem Auge einzelne Kornhaufen eben als Dinge für sich erkennbar werden. Dies erscheint insbesondere deswegen gerechtfertigt, da diese weniger strenge Forderung auch in der photographischen Technik als ausreichend angesehen wurde¹⁾. Nach eigenen Beobachtungen ist mit dieser weniger strengen Forderung das durch die Kornstruktur bestimmte Auflösungsvermögen etwa um den Faktor 2 günstiger. Hierdurch und bei Ansatz des Elektronenkontrastes 2 erscheinen die Intensitätsverhältnisse um den Faktor 8 günstiger als bei der günstigsten von von Borries ermittelten Schicht. Ein großer Teil der Lücke zwischen den Annahmen des Verfassers²⁾ bei seinen Abschätzungen und den entsprechenden Abschätzungen von von Borries³⁾ ist damit überbrückt. Hinzu kommt weiter, daß der Verfasser seinen Abschätzungen für eine Strahlspannung von 200 kV eine bindemittelarme Schicht mit stark *heraufgesetzter Schichtdicke* zugrundelegt (praktische Versuche im Gange!). Da bei dieser Strahlspannung die Eindringtiefe der Elektronen groß gegen die heute übliche Dicke von Schumann-Schichten ist, können wir von der Durchführung dieser Maßnahme eine weitere wesentliche Abnahme der Bildpunktsarbeit solange erwarten, bis die Unschärfe durch Elektronenstreuung in der Schicht an die Unschärfe durch Körnigkeit angepaßt ist. Für 200 kV ist dann mit einer Bildpunktsarbeit von etwa $\alpha_{0,5} \cdot \delta_p^2 = 10^{-12}$ Ws zu rechnen. Dieser Wert weicht nur noch um den Faktor 2,5 von den früheren Annahmen des Verfassers ab. — Nach gemeinsam mit Freksa⁴⁾ durch-

¹⁾ G. Hansen u. B. H. Keck, ZS. f. wiss. Photographie 37, 86, 1935. —

²⁾ M. von Ardenne, Naturwissensch. 29, 521, 1941. — ³⁾ Literaturstelle Anm. 2, III. Mitteilung, S. 520. — ⁴⁾ Vgl. M. v. Ardenne u. H. Friedrich Freksa, Naturwissensch. 29, 523, 1941.

geführten experimentellen Beobachtungen an verschiedenen Sporen erscheint es gut möglich, daß die Halbwertsdosis der Elektronenbelastung für diese Objekte, wie von Borries annimmt, um den Faktor 6,2 größer ist als der vom Verfasser aus amerikanischen Messungen abgeschätzte Wert. — Unter Berücksichtigung der beiden Faktoren 2,5 und 6,2 vergrößert sich das früher (Ann. 5) für die Abbildung lebender Substanz abgeschätzte Auflösungsvermögen gemäß der vom Verfasser angegebenen Gleichung auf $d_{minL} = 24 \text{ m}\mu$. Aus den Originalen der mit Hilfe der Objektabschattungsvorrichtung durchgeführten Aufnahmen¹⁾ des Auskeimungsvorganges von Kartoffelbazillussporen folgt bei der benutzten 500fachen elektronenoptischen Vergrößerung ein Auflösungsvermögen von etwa 60 m μ . Dieser Wert harmonisiert gut mit dem unter Berücksichtigung obiger Überlegungen sich ergebenden Zahlenwert für das Auflösungsvermögen der normalen Schumann-Platte bei dem hohen Elektronenkontrast dieses Objekts und der besprochenen weniger strengen Forderung für die Grenzvergrößerung.

¹⁾ Zu der Deutung unserer Abbildungen über die Auskeimung der Kartoffelbazillussporen sei bei dieser Gelegenheit darauf hingewiesen, daß eine verbliebene Keimungsfähigkeit von 8% für die Sporen aus diesen nicht abgeleitet werden darf. Erblicken wir doch auf den Bildern einige Sporen gerade im Zustand der Keimung. Bei längerem Verweilen der Sporen in der Nährflüssigkeit können wesentlich höhere Prozentsätze ausgekeimter abgelöster Individuen beobachtet werden.

Über Plasmalaufzeitschwingungen.

Von W. O. Schumann.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 4. Dezember 1942.)

Es werden die in Plasmen, u. U. aber auch im Hochvakuum auftretenden Elektronen- und Ionenschwingungen mit Berücksichtigung der Laufzeiterscheinungen auf ihre Selbsterregungswirkung hin untersucht. Es zeigt sich, daß die Berücksichtigung der Translationsgeschwindigkeit der Teilchen für das Verständnis der Vorgänge der Selbsterregung für die überwiegende Mehrzahl der Fälle notwendig ist.

In einer Notiz in den Naturwissenschaften¹⁾ habe ich gezeigt, daß ein Plasma, dargestellt durch einen räumlich ruhenden positiven Ionenblock und hindurchtretende negative Elektronen, infolge des Reibungswiderstandes, den die bewegten Elektronen erleiden, immer der Neutralität der Ladungen zustrebt, selbst wenn diese an der Stelle des Elektroneneintritts nicht vorhanden sein sollte, und daß an den Stellen, wo diese Neutralität gestört ist, das Plasma eine schichtartige Struktur annimmt.

Im folgenden soll zunächst der Fall behandelt werden, daß im ausgebildeten neutralen Plasma durch irgendwelche Störungen kleine Schwingungen entstehen. Das Plasma sei bestimmt wieder durch einen ruhenden Block schwerer Teilchen, durch den sich ein mit der konstanten Geschwindigkeit u_0 bewegter Block leichter Teilchen hindurchschiebt. Der Einfachheit halber ist im folgenden die Ladung der Elektronen als positiv angenommen.

Spaltet man alle Größen in einen Gleichstromanteil und einen Wechselstromanteil auf, so gelten die bekannten Ausgangsgleichungen, wenn

$$u = u_0 + u_w, \quad p = p_0 + p_w, \quad i = i_0 + i_w, \quad i_k = i_{k_0} + i_{k_w}, \quad E = E_0 + E_w$$

die Geschwindigkeit (cm/sec), die Ladungsdichte (Coul/cm³) und $i = i_k + \Delta \frac{dE}{dt}$ die gesamte Stromdichte (A/cm²) der bewegten Teilchen, i_k die Konvektionsstromdichte, E die Feldstärke und n die Ladungsdichte der schweren Teilchen (Coul/cm³) ($p_0 = n = \text{Const}$) bedeuten:

$$i_k = pu, \quad \Delta \frac{\partial E}{\partial x} = p - n, \quad eE = m \frac{du}{dt} + ru.$$

¹⁾ Über Elektronenbewegungen in Plasmen und einige Anwendungen. Juni 1941. Bd. 29, S. 389.

Für die Wechselstromanteile gilt dann, bei Vernachlässigung von kleinen Größen 2. Ordnung:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \frac{\partial E_w}{\partial x} &= p_w, \quad i_{k_w} = p_w u_g + u_w p_g, \quad i_w = i_{k_w} + \Delta \frac{\partial E_w}{\partial t}, \\ e E_w &= m \left(\frac{\partial u_w}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_w}{\partial x} \right) + r u_w. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich für E_w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_w}{\partial x^2} + \frac{2}{u_g} \frac{\partial^2 E_w}{\partial x \partial t} + \frac{1}{u_g^2} \frac{\partial^2 E_w}{\partial t^2} + \frac{r}{m u_g^2} \frac{\partial E_w}{\partial t} + \frac{r}{m u_g} \frac{\partial E_w}{\partial x} + \frac{p_g e}{\Delta u_g^2 m} E_w \\ = \frac{r}{m \Delta u_g^2} i_w + \frac{1}{\Delta u_g^2} \frac{\partial i_w}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Durch eine Koordinatentransformation $\xi = x - u_g t$ und $\eta = t$ wird aus dieser parabolischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 E_w}{\partial \eta^2} + \frac{r}{m} \frac{\partial E_w}{\partial \eta} + \frac{p_g e}{\Delta m} E_w = \frac{r}{m \Delta} i_w + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial i_w}{\partial \eta}. \quad (3)$$

Durch nochmalige Differentiation nach ξ (bzw. x) entsteht für die Dichte

$$\frac{\partial^2 p_w}{\partial \eta^2} + \frac{r}{m} \frac{\partial p_w}{\partial \eta} + \frac{p_g e}{\Delta m} p_w = 0. \quad (4)$$

Die Lösung ist

$$p_w = F_1(\xi) e^{\lambda_1 \eta} + F_2(\xi) e^{\lambda_2 \eta}$$

bzw.

$$p_w = F_1(x - u_g t) e^{\lambda_1 t} + F_2(x - u_g t) e^{\lambda_2 t} \quad (5)$$

mit

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm j \sqrt{\frac{p_g e}{m \Delta} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} = -\frac{r}{2m} \pm j \omega_k, \quad ^1)$$

wobei $\sqrt{\frac{p_g e}{m \Delta}} = \omega_L$, die von Langmuir entdeckte Eigenfrequenz des Plasmas ist. F_1 und F_2 sind willkürliche Funktionen. Irgendwelche Dichteverteilungen, die von der Quasineutralität abweichen, die z. B. zur Zeit $t = 0$ gegeben sind, bewegen sich mit der Geschwindigkeit u_g in der Richtung der positiven Achse, während sie gleichzeitig zeitlich gedämpfte Pulsationen mit Langmuir-Frequenz ausführen, sie „schwimmen“ mit dem Plasma von der Kathode zur Anode. Analoge Bewegungen können auch Feldstärke und Geschwindigkeit ausführen.

Anders liegt die Sache bei zeitlich periodischen Schwingungen vorgeschriebener Frequenz.

Rechnet man komplex, so ergibt sich aus Gl. (2)

$$E_w = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{i_w}{Y}, \quad (6)$$

¹⁾ Bei genügend geringer Dämpfung, $\frac{r}{2m} \ll \omega_L$, ist $\omega \approx \omega_L$.

wo

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m u_g} - j \frac{\omega}{u_g} \pm j \sqrt{\frac{p_g e}{m \Delta} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} \cdot \frac{1}{u_g}$$

$$= \frac{1}{u_g} \left[-\frac{r}{2m} - j(\omega \mp \omega_k) \right] \quad (7)$$

und Y der Leitwert des Plasmas je cm für periodische Schwingungen ist¹⁾

$$Y = j\omega \Delta + \frac{1}{\frac{r}{e p_g} + j\omega \frac{m}{e p}}$$

dem ein Parallelresonanzkreis entspricht, Fig. 1.

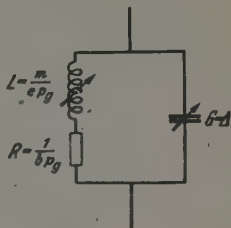
Aus E_w folgt

$$p_w = \Delta \frac{\partial E_w}{\partial x} \quad \text{und} \quad u_w = \frac{1}{p_g} \left[i_w - j\omega \Delta E_w - u_g \Delta \frac{\partial E_w}{\partial x} \right].$$

Fig. 1. Ersatzstromkreis des Plasmas für periodische Schwingungen.

$$b = \frac{e}{r} \text{ Beweglichkeit,}$$

$$Y = j\omega \Delta + \frac{1}{\frac{1}{b p_g} + j\omega \frac{m}{e p_g}} = \frac{1}{Z}$$



Es treten zwei räumliche Wellenlängen auf, nämlich

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\pi}{\omega \mp \omega_k} u_g,$$

deren Länge von der Differenz zwischen der Resonanzfrequenz ω_k und der aufgeprägten Frequenz ω abhängt. Die Ausbreitungs- (Phasen-) Geschwindigkeiten beider Wellen sind:

$$v_{p1,2} = \frac{\omega}{\omega \mp \omega_k} u_g.$$

Solange $\omega < \omega_k$, ist $v_{p1} < 0$, d. h. die Welle 1 läuft in der negativen x -Richtung, während v_{p2} immer > 0 ist, aber kleiner als u_g . Die Gruppengeschwindigkeit v_g ist in beiden Fällen gleich u_g , auch die nach links laufenden Wellen ergeben die nach rechts gerichtete Gruppengeschwindigkeit u_g .

Die Geschwindigkeiten relativ zum bewegten Elektronenblock sind

$$v_{p1,2} - u_g = \frac{\pm \omega_k}{\omega \mp \omega_k} \cdot u_g,$$

d. h. die Welle 1 läuft für $\omega < \omega_k$ nach links gegen den nach rechts bewegten Elektronenblock, während die Welle 2 immer mit der Geschwindigkeit

$$-\frac{\omega_k}{\omega + \omega_k} u_g \text{ gegen den Elektronenblock nach links läuft.}$$

¹⁾ Siehe W. O. Schumann, Arch. f. Elektrotechn. 35, 437, 1941.

Die Dämpfung je cm ist $-\frac{r}{2m u_g} = -\frac{e}{2mb u_g} \cdot 1$), hängt also von der Beweglichkeit b der Elektronen und von ihrer Translationsgeschwindigkeit u_g ab, ist also etwa proportional dem Quadrat des Druckes. Die Dämpfung je Wellenlänge $\pi \frac{e}{mb} \frac{1}{\omega \mp \omega_k}$ ist meist ziemlich klein, außer nahe bei Resonanz, $\omega = \omega_k$, für die Welle 1.

Im Resonanzfall $\omega = \omega_k$ wird nach (7)

$$\lambda_{12} = -\frac{r}{2m u_g},$$

d. h. das ganze Plasma schwingt gleichphasig mit wachsender Dämpfung von der Kathode gegen die Anode zu.

Die entstehenden resultierenden Schwingungszustände hängen sehr stark von den Grenzbedingungen ab, insbesondere, ob diese nur an einer oder an mehreren räumlichen Stellen Vorschriften geben, wobei insbesondere Bedingungen, z. B. an der Anode (positives x), auch Zustandsänderungen an der Kathode (z. B. $x = 0$) hervorrufen, trotz der Bewegung des Elektronenblocks von der Kathode zur Anode.

Es seien zunächst Bedingungen an der kathodischen Seite des Plasmas ($x = 0$) vorgeschrieben. Dort gilt immer

$$i_w = i_{kw} + j\omega \Delta E_w \quad \text{und} \quad i_{kw} = p_w u_g + u_w p_g.$$

Nimmt man zunächst $u_{wx=0} = U_w$ und $p_{wx=0} = P_w$ als gegeben an, bzw.

$$i_{kwx=0} = J_{kw} = P_w u_g + U_w p_g$$

an, so ist nach Gl. (6)

$$E_{wx=0} = \frac{2}{j\omega \Delta} (i_w - P_w u_g - U_w p_g) = A_1 + A_2 + i_w Z,$$

wobei $Z = 1/Y$ und

$$p_{wx=0} = \Delta \left(\frac{\partial E_w}{\partial x} \right)_{x=0} = P_w = \frac{1}{\Delta} (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2).$$

Daraus folgt

$$A_1 = \left\{ \left[i_w \left(\frac{1}{j\omega \Delta} - Z \right) - \frac{P_w u_g}{j\omega \Delta} - \frac{U_w p_g}{j\omega \Delta} \right] \lambda_2 - \frac{P_w}{\Delta} \right\} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

und

$$A_2 = \left\{ \left[i_w \left(\frac{1}{j\omega \Delta} - Z \right) - \frac{P_w u_g}{j\omega \Delta} - \frac{U_w p_g}{j\omega \Delta} \right] \lambda_1 - \frac{P_w}{\Delta} \right\} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

¹⁾ Für übliche Hg-Plasmen mit $b \approx 10^8$, $u_g \approx 10^7$ hat sie den Wert ≈ 1 .

Die Spannung V_w' zwischen anoden- und kathodenseitiger Plasmabegrenzung ($x = 0$ und $x = \delta$) ist

$$\begin{aligned} V_w &= \frac{A_1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 \delta} - 1) + \frac{A_2}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 \delta} - 1) + i_w Z \delta \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \left[i_w \left(\frac{1}{j \omega \Delta} - Z \right) - \frac{P_w u_g}{j \omega \Delta} - \frac{U_w p_g}{j \omega \Delta} \right] \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 \delta} - 1) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 \delta} - 1) \right] + \frac{P_w}{\Delta} \left[\frac{1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 \delta} - 1) - \frac{1}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 \delta} - 1) \right] \right\} + i_w Z \delta. \quad (8) \end{aligned}$$

Nun ist, wenn $\frac{r}{2 m u_g} = \beta$ und $\frac{\delta}{u_g} = \tau$ gleich der Laufzeit gesetzt wird,

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 \delta} - 1) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 \delta} - 1) \right] \\ &= e^{-j \omega \tau - \beta \delta} \left\{ \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} [(\lambda_1 + \lambda_2) \cos \omega_k \tau - j (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \omega_k \tau] - \right. \\ &\quad \left. - j \frac{2 \sin \omega_k \tau}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

und wenn für die Weiterrechnung zunächst für die Dämpfung $\beta = 0$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} M &= \frac{2 \omega u_g}{\omega^2 - \omega_k^2} \left\{ \sin \omega \tau \cos \omega_k \tau - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_k} + \frac{\omega_k}{\omega} \right) \cos \omega \tau \sin \omega_k \tau + \right. \\ &\quad \left. + j \left[\cos \omega \tau \cos \omega_k \tau - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_k} + \frac{\omega_k}{\omega} \right) \sin \omega \tau \sin \omega_k \tau \right] \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 \delta} - 1) - \frac{1}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 \delta} - 1) \right], \\ \text{auch mit } \beta &= 0, \\ N &= \frac{u_g^2}{\omega^2 - \omega_k^2} \left\{ \cos \omega_k \tau \cos \omega \tau + \frac{\omega}{\omega_k} \sin \omega \tau \sin \omega_k \tau - 1 + \right. \\ &\quad \left. + j \left[\frac{\omega}{\omega_k} \sin \omega_k \tau \cos \omega \tau - \cos \omega_k \tau \sin \omega \tau \right] \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Es wird also nach Gl. (8)

$$V_w = \left[i_w \left(\frac{1}{j \omega \Delta} - Z \right) - \frac{J_{kw}}{j \omega \Delta} \right] M + \frac{P_w}{\Delta} N + i_w Z \delta. \quad (11)$$

Je nach Art der Bedingungen (Steuerungsvorgänge) für $x = 0$ entstehen verschiedene Scheinwiderstände. Ist z. B. $P_w = 0$ und nur V_w und damit $J_{kw} = U_w p_g$ vorgeschrieben, und $E_{wx=0}$ unabhängig von U_w , so wird

$$V_w = i_w \left\{ \left[\frac{1}{j \omega \Delta} - Z \right] M + Z \delta \right\} - U_w \frac{p_g}{j \omega \Delta} M = i_w Z_t - \frac{U_w}{j \omega \Delta} p_g M. \quad (12)$$

Da Z bei $\beta = 0$ gleich $-\frac{j}{\omega \Delta} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_k^2}$ ist, wird der Faktor Z_t von i_w :

$$Z_t = 2 \frac{u_g}{\Delta} \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2} \left\{ 1 - \cos \omega t \cos \omega_k \tau - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_k} + \frac{\omega_k}{\omega} \right) \sin \omega \tau \sin \omega_k \tau + j \left[\sin \omega \tau \cos \omega_k \tau - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_k} + \frac{\omega_k}{\omega} \right) \cos \omega \tau \sin \omega_k \tau \right] \right\} - \frac{j}{\omega \Delta} \frac{\omega^2 \delta}{\omega^2 - \omega_k^2}, \quad (13)$$

wobei

$$u_g \omega_k^2 = \frac{p_g u_g e}{m \Delta} = i_g \frac{e}{m \Delta}$$

ist. Das Plasma verhält sich bei dieser Steuerung wie ein Ohmscher Widerstand R_t

$$R_t = 2 i_g \frac{e}{m \Delta^2} \cdot \frac{1}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2} \left\{ 1 - \cos \omega \tau \cos \omega_k \tau - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_k} + \frac{\omega_k}{\omega} \right) \sin \omega \tau \sin \omega_k \tau \right\} \quad (14)$$

und ein Blindwiderstand X_t in Reihe

$$X_t = 2 i_g \frac{e}{m \Delta^2} \frac{1}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2} \left\{ \sin \omega \tau \cos \omega_k \tau - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_k} + \frac{\omega_k}{\omega} \right) \cos \omega \tau \sin \omega_k \tau - \frac{1}{2} \omega \tau \frac{\omega^2 - \omega_k^2}{\omega_k^2} \right\}. \quad (15)$$

Für sehr geringe Frequenzen ω (Gleichstrom) wird

$$R_{t\omega \rightarrow 0} = 2 i_g \frac{e}{m \Delta} \frac{1}{\omega_k^4} \left\{ 1 - \cos \omega_k \tau - \frac{1}{2} \omega_k \tau \sin \omega_k \tau \right\},$$

was für $\omega_k \tau = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2} \pi, \frac{7}{2} \pi, \dots$ positiv, für $\frac{5}{2} \pi, \frac{9}{2} \pi, \dots$ negativ ist, für $\omega_k \tau = k \pi$ immer positiv bzw. Null ist.

R_t ist allgemein immer positiv für $\omega \tau$ bzw. $\omega_k \tau$ gleich $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$. Negativ kann es werden, wenn $\sin \omega \tau$ und $\sin \omega_k \tau$ gleiches Vorzeichen haben und um $(2k+1) \frac{\pi}{2}$ herumliegen. Aber $\omega \neq \omega_k$, die Langmuir-Frequenz tritt nie als selbsterregte auf. Also z. B. für die Bereiche in der Gegend um

$\omega \tau$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2} \pi$	$\frac{5}{2} \pi$	$\frac{7}{2} \pi$	$\frac{9}{2} \pi$
1) $\omega_k \tau$	$\frac{5}{2} \pi, \frac{9}{2} \pi \dots$	$\frac{7}{2} \pi, \frac{11}{2} \pi \dots$	$\frac{\pi}{2}, \frac{9}{2} \pi \dots$	$\frac{3}{2} \pi, \frac{11}{2} \pi \dots$	$\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2} \pi, \frac{9}{2} \pi \dots$

1) $\omega_k \tau = \omega_k \frac{\delta}{u_g}$ bestimmt bei gegebenem ω_k und u_g die Plasmalänge δ , die zur Erzeugung der Schwingungen nötig ist.

usf. Es kann also die selbsterregte Frequenz sowohl größer als auch kleiner sein wie die Resonanzfrequenz. Die Größe von R_t ist dem Ruhestrom i_w proportional. Die Selbsterregung ist um so stärker, je näher Resonanzfrequenz und selbsterregte beieinander liegen. Auch der Blindwiderstand X_t kann je nach der Frequenz seine Vorzeichen ändern, oder auch Null sein.

Da durch den äußeren Stromkreis

$$V_w = -i_w \cdot Z_a$$

gegeben ist, wird in diesem Fall

$$i_w = -U_w \frac{\frac{p_g}{j\omega\Delta} M}{\left(\frac{1}{j\omega\Delta} - Z\right) M + Z\delta + Z_a} = \frac{-U_w \frac{p_g}{j\omega\Delta} M}{Z_t + Z_a + Z\delta}, \quad (16)$$

so daß durch Geschwindigkeitssteuerung eine Selbsterregung eintritt, wenn der oben erwähnte negative innere Widerstand den positiven äußeren Widerstand und den Dämpfungswiderstand der Entladung übertrifft. Natürlich muß Z_a so abgestimmt sein, daß auch der imaginäre Teil des Nenners von 16 verschwindet, und zwar für die Frequenzen, bei denen Selbsterregung möglich ist.

Wie schon erwähnt, ist es sehr wichtig, ob eine und welche Gesetzmäßigkeit E_w , U_w und P_w miteinander verknüpft.

Dasselbe Gesetz für Z_t , Gl. (13), ergibt sich z. B. auch, wenn $J_{k_w} = 0$ ist (Sättigungsstrom) und gleichzeitig $P_w = 0$ also auch $U_w = 0$ ist, aber $E_w \neq 0$ und unabhängig von U_w und P_w , als

$$V_w = i_w \left[\left(\frac{1}{j\omega\Delta} - Z \right) M + Z\delta \right] = i_w Z_t$$

ohne äußere Einwirkung. Ist hingegen bei Sättigungscharakter des Konvektionsstromes ($J_{k_w} = 0$), U_w und P_w nicht Null, so stehen sie zueinander in der Beziehung $P_w = -U_w \frac{p_g}{u_g}$ und nach Gl. (11) wird

$$V_w = i_w \left[\left(\frac{1}{j\omega\Delta} - Z \right) M + Z\delta \right] - U_w \frac{p_g}{u_g} \frac{N}{\Delta},$$

führt also wieder auf ähnliche Verhältnisse wie bei Gl. (16).

Andere Erscheinungen treten dann auf, wenn die Feldstärke E_w an der Eintrittsstelle $x = 0$ nicht schwankt ($E_w = 0$, für $x = 0$). Dann ist für $x = 0$: $i_w = J_{k_w} = P_w u_g + U_w p_g$. Ist zugleich auch $U_w = 0$, treten also nur Dichteschwankungen auf, so ist $P_w = \frac{i_w}{u_g}$ und nach Gl. (11) wird dann

$$V_w = i_w \left[-\dot{Z} M + \frac{1}{u_g \Delta} N + Z\delta \right] = i_w Z_t.$$

In diesem Fall wird Z_t

$$Z_t = \frac{u_g}{A} \frac{2\omega\omega_k}{(\omega^2 - \omega_k^2)^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_k} + \frac{\omega_k}{\omega} \right) (1 - \cos \omega \tau \cos \omega_k \tau) - \right. \\ \left. - \sin \omega \tau \sin \omega_k \tau + j \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_k} + \frac{\omega_k}{\omega} \right) \sin \omega \tau \cos \omega_k \tau - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \omega_k \tau \cos \omega \tau \right] \right\} + Z \delta. \quad (17)$$

In diesem Fall wird der reelle Teil von Z_t nie negativ, es ist keine Selbst-erregung möglich.

Ist dagegen in diesem Fall $E_{w,x=0} = 0$, $P_w = 0$, d. h. treten nur Geschwindigkeitsschwankungen $U_w = \frac{J_{kw}}{P_g}$ auf, so wird

$$V_w = i_w [-ZM + Z\delta] = i_w Z_t,$$

wobei jetzt

$$Z_t = \frac{u_g}{A} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_k^2)^2} \left\{ 1 - \cos \omega \tau \cos \omega_k \tau - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_k} + \frac{\omega_k}{\omega} \right) \sin \omega \tau \sin \omega_k \tau + j \left[\sin \omega \tau \cos \omega_k \tau - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_k} + \frac{\omega_k}{\omega} \right) \cos \omega \tau \sin \omega_k \tau \right] \right\} + Z \delta$$

ist, entsprechend der Gl. (13), nur mit dem Unterschied, daß jetzt Z_t prop. ω^2 (früher prop. ω_k^2) ist, was die Erregung höherer Frequenzen begünstigt

Da je nach Art der Steuerung bzw. je nach den Eigenschaften des Kathodengebildes noch Koppelungsgleichungen zwischen E_w , J_{kw} , U_w und P_w bei $x = 0$ möglich sind, ist die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen eine sehr große.

Ganz andere Erscheinungen treten auf, wenn es sich um Grenzbedingungen an verschiedenen Orten handelt. Es seien z. B. am kathodenseitigen ($x = 0$) und am anodenseitigen ($x = \delta$) Ende Dichteschwankungen $p_w = P_0$ und P_δ gegeben. Aus dem Verlauf der Dichte

$$p_w = e^{-\frac{1}{u_g} \left(\frac{r}{2m} + j\omega \right) x} \left(A_1 e^{j\frac{\omega_k}{u_g} x} + A_2 e^{-j\frac{\omega_k}{u_g} x} \right)$$

folgt dann

$$p_w = e^{-\frac{1}{u_g} \left(\frac{r}{2m} + j\omega \right) x} \cdot \frac{1}{\sin \omega_k \frac{\delta}{u_g}} \left[P_0 \sin \frac{\omega_k}{u_g} (\delta - x) + \right. \\ \left. + P_\delta e^{\frac{1}{u_g} \left[\frac{r}{2m} + j\omega \right] \delta} \cdot \sin \omega_k \frac{x}{u_g} \right]. \quad (19)$$

Wenn $\omega_k \frac{\delta}{u_g} = \omega_k \tau$ nahe $\pi, 2\pi \dots k\pi$ liegt, können sehr erhebliche Dichteschwankungen auftreten, die entsprechende Schwankungen von u_w und E_w zur Folge haben. Da ω_k von p_g abhängig ist, können sie durch Dichteänderungen des Plasmas stark beeinflusst werden, ebenso durch Abstands-

änderungen. Unstetige Änderungen können durch Fourier-Integrale dargestellt werden. Es ist auf diese Weise auch eine große Mannigfaltigkeit von Erscheinungen möglich. Mit $u_0 \approx 10^8$ cm/sec und $\omega_t \approx 10^{10}$ sec⁻¹, mit 10^{11} Ionen/cm³ bzw. $p_0 \approx 10^{-8}$ Coul/cm³ ist $\delta \approx k\pi \frac{u_0}{\omega_k} \approx k\pi \cdot 10^{-2}$ cm. Für z. B. $k = 100$ ist $\delta \approx 3$ cm, wobei allerdings in diesem Bereich sich u_0 bzw. p_0 und ω_k nicht ändern dürfen, damit sich der Vorgang nicht verschmiert.

Um den Einfluß der positiven Ionen zu erkennen, muß die Gl. (1) entsprechend erweitert werden. Nimmt man 2 Teilchensorten an, die in entgegengesetzter Richtung strömen, mit den Dichteschwankungen p_w und n_w (Coul/cm³), den Geschwindigkeitsschwankungen u_w und v_w (cm/sec), den Massen M und m , den Reibungswiderständen R und r , den Gleichanteilen der Geschwindigkeit U und V (cm/sec), den Gleichanteilen der Dichte P und N und der Feldstärkeschwankung E_w (V/cm), so gelten die Gl. (20), wenn die p -, u -Teilchen in Richtung der positiven x -Achse strömen und die n -, v -Teilchen entgegengesetzt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\partial p u}{\partial x} : j\omega p_w + P \frac{\partial u_w}{\partial x} + U \frac{\partial p_w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{\partial n v}{\partial x} : j\omega n_w - N \frac{\partial v_w}{\partial x} - V \frac{\partial n_w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta} (p - n) : \frac{\partial E_w}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} (p_w - n_w), \\ eE &= M \frac{d u}{d t} + R u : eE_w = (R + j\omega M) u_w + M U \frac{\partial u_w}{\partial x}, \\ eE &= m \frac{d v}{d t} + r v : eE_w = (r + j\omega m) v_w - m V \frac{\partial v_w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} (20)$$

Für die schwankende Dichte n_w gilt die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^4 n_w}{\partial x^4} + \frac{\partial^3 n_w}{\partial x^3} \left\{ \frac{1}{U} \left(\frac{R}{M} + 2j\omega \right) - \frac{1}{V} \left(\frac{r}{m} + 2j\omega \right) \right\} + \\ &+ \frac{\partial^2 n_w}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{U^2} \left[\left(\frac{R}{M} + j\omega \right) j\omega + \frac{eP}{\Delta M} \right] - \right. \\ &- \frac{1}{UV} \left(\frac{r}{m} + 2j\omega \right) \left(\frac{R}{M} + 2j\omega \right) + \frac{1}{V^2} \left[\left(\frac{r}{m} + j\omega \right) j\omega + \frac{eN}{m\Delta} \right] \left. \right\} + \\ &+ \frac{\partial n_w}{\partial x} \frac{1}{UV} \left\{ -\frac{1}{U} \left(\frac{r}{m} + 2j\omega \right) \left[\left(\frac{R}{M} + j\omega \right) j\omega + \frac{eP}{\Delta M} \right] + \right. \\ &+ \frac{1}{V} \left(\frac{R}{M} + 2j\omega \right) \left[\left(\frac{r}{m} + j\omega \right) j\omega + \frac{eN}{m\Delta} \right] \left. \right\} + \\ &+ n_w \frac{1}{U^2 V^2} \left\{ \left[\left(\frac{r}{m} + j\omega \right) j\omega + \frac{eN}{m\Delta} \right] \left[\left(\frac{R}{M} + j\omega \right) j\omega + \frac{eP}{\Delta M} \right] - \right. \\ &- \frac{eN}{m\Delta} \cdot \frac{eP}{M\Delta} \left. \right\} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist besonders einfach, wenn beide Trägerarten gleichartig sind, denn dann verschwinden die Glieder $\frac{\partial^3 n_w}{\partial x}$ und $\frac{\partial n_w}{\partial x}$, die Gleichung wird biquadratisch.

Berechnet man für diesen Fall die Exponenten der räumlichen Verteilung, so ergeben sich diese bei Vernachlässigung der Reibung aus der Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 n_w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 n_w}{\partial x^2} \frac{2}{U^2} (\omega^2 + \omega_k^2) + n \frac{\omega^2}{U^4} (\omega^2 - 2\omega_k^2) &= 0, \\ U = V \text{ und } \frac{eN}{m\Delta} = \frac{eP}{M\Delta} = \omega_k^2 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

gesetzt zu

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{U^2} \left[-\omega^2 - \omega_k^2 \pm \omega_k^2 \sqrt{1 + 4 \frac{\omega^2}{\omega_k^2}} \right].$$

Solange $\omega \geq \sqrt{2}\omega_k$ ist, wird λ_1^2 negativ, umgekehrt für $\omega \leq \sqrt{2}\omega_k$ ist $\lambda_1^2 > 0$. Für $\omega = \sqrt{2}\omega_k$ ist $\lambda_1 = 0$. λ_2 ist also immer rein imaginär, λ_1 kann reell oder rein imaginär sein. Die Dichteverteilung (und analog die Verteilung der Geschwindigkeit, der Feldstärke usf.) wird also

$$n_w = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{-\lambda_1 x} + B_1 e^{\lambda_2 x} + B_2 e^{-\lambda_2 x}.$$

Für die beiden möglichen Fälle gilt: 1. λ_1 reell, λ_2 rein imaginär, $\lambda_2 = j \frac{\alpha_2}{U}$ gesetzt; $\omega < \sqrt{2}\omega_k$: λ_1 Verteilung nach $\sin \lambda_1 x$ und $\cos \lambda_1 x$ bzw. den Cos-Funktionen, λ_2 Verteilung Sinus-Wanderwellen mit der Geschwindigkeit $v_2 = \pm \frac{\omega}{\alpha_2} U$. Da $\alpha_2 > \omega$, ist $v_2 < U$. Bei Reflexion Bildung stehender Wellen von der Wellenlänge $\frac{2\pi}{\alpha_2} U$. Da α_2 meist groß ist gegen U , sind die Wellenlängen kurz. 2. λ_1 auch rein imaginär: λ_2 rein imaginär, $\lambda_1 = j \frac{\alpha_1}{U}$ gesetzt, $\omega > \sqrt{2}\omega_k$: Auch die λ_1 -Verteilung hat Wanderwellen mit der Geschwindigkeit $v_1 = \pm \frac{\omega}{\alpha_1} U$. Da α_1 mit $\omega = \sqrt{2}\omega_k$ gegen Null geht, kann v_1 sehr groß werden. Bei Reflexionen gibt es stehende Wellen von der Wellenlänge $\frac{2\pi}{\alpha_1} U$, die ebenfalls sehr groß, bei $\omega = \sqrt{2}\omega_k$ unendlich werden kann. In solchen Fällen kann die Entladung in einzelne „Abschnitte“ zerfallen, z. B. leuchtende Wolken von merkbarer räumlicher Ausdehnung. Die Gruppengeschwindigkeit erweist sich als frequenzabhängig.

$$v_{g1,2} = \frac{\omega_k}{\omega} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2} \mp \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2}}{1 \mp \frac{2}{\sqrt{1 + 4 \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2}}}.$$

Für die λ_1 -Welle beginnt der Begriff der Gruppengeschwindigkeit erst für $\omega > \sqrt{2}\omega_k$ sinnvoll zu werden. v_{g_1} beginnt bei diesem Wert mit dem Wert Null und steigt mit $\omega \rightarrow \infty$ auf den Wert U . Für die λ_2 -Welle ist die Gruppengeschwindigkeit bei kleinen Frequenzen sehr groß, ist für $\omega = \sqrt{2}\omega_k$ gleich $v_{g_2} = \sqrt{\frac{5}{2+\sqrt{5}}} U$, also etwas größer wie U , und geht bei sehr hohen Frequenzen auch gegen U .

Erscheinungen dieser Art dürften bei elektronegativen Gasen auftreten können, wo die Elektronen sich größtenteils an die Gasatome anlagern.

In Edelgasbogen und Hg-Dampf sind Elektronen und Ionen sehr verschieden und die Diskussion der Gl. (21) ergibt für diesen Fall:

$$\frac{eN}{m\Delta} = \omega_E^2, \quad \frac{eP}{M\Delta} = \omega_J^2$$

gesetzt, $N = P$ angenommen.

1. Für $U = 0$ und $V = 0$, ruhender Elektronen- und Ionenblock, degeneriert die Gleichung zu

$$\left[\left(\frac{r}{m} + j\omega\right)j\omega + \omega_E^2\right]\left[\left(\frac{R}{M} + j\omega\right)j\omega + \omega_J^2\right] - \omega_E^2\omega_J^2 = 0$$

und wenn r und R vernachlässigt werden:

$$(\omega_E - \omega^2)(\omega_J^2 - \omega^2) - \omega_E^2\omega_J^2 = 0$$

oder

$$\omega^2 = \omega_E^2 + \omega_J^2 = \frac{eN}{\Delta} \frac{M+m}{Mm}.$$

Es ist dieses die Korrektur der Elektronenfrequenz durch die Anwesenheit der positiven Ionen.

2. $U = 0$. Ruhender Ionenblock, bewegter Elektronenblock. Die Gl. (21) wird:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 n_w}{\partial x^2} V^2 \left[\left(\frac{R}{M} + j\omega \right) j\omega + \omega_J^2 \right] - \frac{\partial n_w}{\partial x} V \left(\frac{r}{m} + 2j\omega \right) \times \\ \times \left[\left(\frac{R}{M} + j\omega \right) j\omega - \omega_J^2 \right] + n_w \left\{ \left[\left(\frac{r}{m} + j\omega \right) j\omega + \omega_E^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{R}{M} + j\omega \right) j\omega + \omega_J^2 \right] - \omega_E^2\omega_J^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

und gibt an, wie die Elektronenschwingungen durch die Anwesenheit der Ionenschwingungen geändert werden. Setzt man die Masse der Ionen M gleich unendlich, so fällt der Ioneneinfluß weg und man erhält die Differentialgleichung 2 für periodische Vorgänge [s. auch Gl. (6) und (7)].

Vernachlässigt man die Dämpfung, so entsteht für λ die Gleichung

$$\lambda^2 V^2 (\omega_J^2 - \omega^2) - \lambda V 2j\omega (\omega_J^2 - \omega^2) + (\omega_E^2 - \omega^2) (\omega_J^2 - \omega^2) - \omega_E^2 \omega_J^2 = 0 \quad (26)$$

bzw.

$$\lambda^2 - \lambda \frac{2j\omega}{V} + \frac{\omega^4 - \omega^2 (\omega_J^2 + \omega_E^2)}{\omega_J^2 - \omega^2},$$

woraus

$$\lambda_{1,2} = j \left[\frac{\omega}{V} \pm \frac{\omega}{V} \sqrt{\frac{\omega_E^2}{\omega^2 - \omega_J^2}} \right] \quad (27)$$

folgt, während sich früher [Gl. (7)] ohne Berücksichtigung der positiven Ionen ergab

$$\lambda_{1,2} = j \left[\frac{\omega}{V} \pm \frac{\omega_E}{V} \right]^1).$$

Man erkennt den Einfluß der Ionenschwingungen, insbesondere daß bei „Ionenresonanz“, $\omega = \omega_J$, ohne Reibung nach Gl. (25) $n_w = 0$ wird, d. h. die Elektronen gar keine Dichteschwankungen ausführen, also nur durch Reibungswirkungen im Block als ganzes mitgenommen werden. Bei Elektronenresonanz $\omega = \omega_E$ tritt etwas Derartiges aber nicht ein.

Nur wenn $\omega > \omega_J$ ist, ist λ nach Gl. (27) rein imaginär (Wanderwellen), während für $\omega < \omega_J$, $\lambda = \pm \frac{\omega}{V} \sqrt{\frac{\omega_E^2}{\omega_J^2 - \omega^2}} + j \frac{\omega}{V}$ komplex wird, d. h. eine räumliche Anfachung bzw. Dämpfung der mit dem Elektronenblock, mit der Geschwindigkeit V laufenden Welle ergibt.

Die Differentialgleichung für E_w bei $U = 0$, die formal vollkommen Gl. (25) entspricht, lautet:

$$\frac{\partial^2 E_w}{\partial x^2} \frac{1}{j\omega} \frac{V^2 m}{r + j\omega m} \left(j\omega \Delta + \frac{Pe}{R + j\omega M} \right) - \frac{\partial E}{\partial x} \frac{1}{j\omega} V \frac{r + 2j\omega m}{r + j\omega m} \times \\ \times \left(j\omega \Delta + \frac{Pe}{R + j\omega M} \right) + E \left(j\omega \Delta + \frac{Pe}{R + j\omega M} + \frac{Ne}{r + j\omega m} \right) = i_w.$$

Aus ihr folgt wiederum, daß für $R = 0$, bei Betrieb mit Ionenresonanz, $\omega^2 = \omega_J^2$, $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial E}{\partial x}$ verschwinden, p_w und $n_w = 0$. Die partikuläre, ortsunabhängige Lösung für i ist gleich

$$i_w = E_w \left(j\omega \Delta + \frac{1}{\frac{R}{Pe} + j\omega \frac{M}{Pe}} + \frac{1}{\frac{r}{Ne} + j\omega \frac{m}{Ne}} \right), \quad (29)$$

was auf die Ersatzschaltung, Fig. 2, führt.

¹⁾ Mit Berücksichtigung dessen, daß früher die Elektronen in der (+ x)-Richtung liefen, hier aber umgekehrt.

Speziell bei Ionenresonanz ist i_w (mit $R_J \approx 0$) gleich dem Strom im E -Zweig, d. h. wird durch die Elektronen allein getragen.

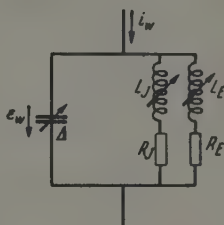
$$i_w = E_w \frac{1}{\frac{r}{Ne} + j\omega_J \frac{m}{Ne}},$$

während umgekehrt bei Elektronenresonanz $\omega = \omega_E$ (und $R_E \approx 0$) der partikulare Strom nur durch den Ionenweig fließt, der aber, da $L_J \gg L_E$, relativ gering ist.

Fig. 2. Plasmaersatzkreis mit Berücksichtigung der positiven Ionen.

$$L_J = \frac{M}{Pe}, \quad R_J = \frac{R}{Pe},$$

$$L_E = \frac{m}{Ne}, \quad R_E = \frac{r}{Ne}.$$



3. $V = 0$, aber jetzt sollen im Gegensatz zu früher, die p -, u -, M -Teilchen die *leichten*, die n -, v -, m -Teilchen die *schweren* Teilchen sein. Dann gibt Gl. (21) für diesen Fall die Ionenverteilung, während sie bisher die Elektronenverteilung darstellte.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 n_w}{\partial x^2} U^2 \left[\left(\frac{r}{m} + j\omega \right) j\omega + \frac{eN}{m\Delta} \right] + \frac{\partial n_w}{\partial x} U \left(\frac{R}{M} + 2j\omega \right) \times \\ & \times \left[\left(\frac{r}{m} + j\omega \right) j\omega + \frac{eN}{m\Delta} \right] + n_w \left\{ \left[\left(\frac{r}{m} + j\omega \right) j\omega + \frac{eN}{u\Delta} \right] \times \right. \\ & \times \left. \left[\left(\frac{R}{M} + j\omega \right) j\omega + \frac{eP}{M\Delta} \right] - \frac{eN}{m\Delta} \cdot \frac{eP}{M\Delta} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

bzw.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 n_w}{\partial x^2} + \frac{\partial n_w}{\partial x} \frac{1}{U} \left(\frac{R}{M} + 2j\omega \right) + n_w \frac{1}{U^2} \times \\ & \times \left\{ \left(\frac{R}{M} + j\omega \right) j\omega + \frac{eP}{M\Delta} - \frac{\frac{eN}{m\Delta} \cdot \frac{eP}{M\Delta}}{\left(\frac{r}{m} + j\omega \right) j\omega + \frac{eN}{m\Delta}} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man in diesem Abschnitt $\frac{eN}{m\Delta} = \omega_J^2$ und $\frac{eP}{M\Delta} = \omega_E^2$ und vernachlässigt die Dämpfung, so ergeben sich die Exponentialfaktoren als

$$\lambda_{12} = -j \frac{\omega}{U} \pm j \frac{\omega}{U} \frac{\omega_E}{\sqrt{\omega^2 - \omega_J^2}} \quad (31)$$

¹⁾ U bedeutet in diesem Fall natürlich die Geschwindigkeit des Elektronenblocks in Richtung der positiven x -Achse und ist gleich V in Gl. (27).

Aus dieser Gleichung und aus Gl. (30) sieht man, daß die Ionenverteilung bei Betrieb mit Ionenresonanz, $\omega = \omega_J$, gleichmäßig ist, $n_w = 0$. Dagegen nicht beim Betrieb mit Elektronenresonanz, $\omega = \omega_E$. Auch für die Ionenverteilung begrenzt $\omega = \omega_J$ zwei Gebiete. Für $\omega > \omega_J$ treten Wanderwellen auf, die analog verlaufen wie bei den Elektronen, Gl. (27),

$$\lambda_{E1,2} = j \frac{\omega}{V} \pm j \frac{\omega}{V} \frac{\omega E}{\omega^2 - \omega_J^2}.$$

Ionen- und Elektronenwellen laufen gleich rasch und in derselben Richtung. Für $\omega < \omega_J$ tritt ein Dämpfungsglied bzw. Anfachungsglied auf. Die Gruppengeschwindigkeit ist

$$v_g = V \frac{(\omega^2 - \omega_J^2)^{3/2}}{(\omega^2 - \omega_J^2)^{3/2} \mp \omega_E \omega_J^2}.$$

Sie wächst von $v_g = 0$ bei $\omega = \omega_J$ bis auf V bei $\omega \rightarrow \infty$.

4. Die allgemeine Diskussion der Gl. (21) für beliebige U und V ist sehr kompliziert. Vernachlässigt man zunächst die Reibungen, so lautet sie

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 n_w}{\partial x^4} + \frac{\partial^3 n_w}{\partial x^3} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) 2j\omega + \frac{\partial^2 n_w}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{U^2} (\omega_J^2 - \omega^2) + \frac{4}{UV} \omega^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{V^2} (\omega_E^2 - \omega^2) \right\} + \frac{\partial n_w}{\partial x} \frac{1}{UV} \left\{ -\frac{1}{U} 2j\omega (\omega_J^2 - \omega^2) + \frac{1}{V} 2j\omega (\omega_E^2 - \omega^2) \right\} + \\ + n_w \frac{1}{UV^2} \left\{ (\omega_E^2 - \omega^2) (\omega_J^2 - \omega^2) - \omega_E^2 \omega_J^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Solange $U = 0$ ist, reduziert sich die Gleichung auf eine solche zweiter Ordnung. Wächst U von Null an, so beginnen die Glieder mit $\frac{\partial^3 n_w}{\partial x^3}$ und $\frac{\partial^4 n_w}{\partial x^4}$ eine Rolle zu spielen. Das bewirkt, daß jetzt auch Wellen auftreten, die mit dem bewegten Ionenblock laufen und deren Geschwindigkeit durch U bestimmt wird. Setzt man U sehr klein gegen V voraus, so treten zu den bisherigen Wurzeln λ_1, λ_2 , die kleine Korrekturen erleiden, noch zwei neue hinzu, die in erster Annäherung gleich

$$\lambda_{3,4} = -\frac{j\omega}{u} \pm j\frac{\omega_J}{U}$$

sind [formal analog zu Gl. (7)]. Die Gruppengeschwindigkeit der Wellen ist U , gleich der Geschwindigkeit des Ionenblocks, ihre räumliche Wellenlänge $\lambda_{3,4} = \frac{2\pi}{\omega \pm \omega_J} \cdot U$. Es gibt jetzt vier Wellen, die durcheinanderlaufen, und eine entsprechend große Mannigfaltigkeit der Vorgänge.

Noch komplizierter werden die Verhältnisse, wenn auch die elastischen Eigenschaften des neutralen Füllgases mit berücksichtigt werden, da dann dessen elastische Schwingungen auch mitspielen.

Ein weiterer interessanter Fall ist der, bei welchem eine im Raume festliegende Gleichstromverteilung von Geschwindigkeit, Dichte und Feldstärke gegeben ist, über die sich kleine Schwingungsvorgänge lagern. Dieser Fall tritt dann ein, wenn irgendeine Gleichströmung positiver Ionen und negativer Elektronen gegeben ist, und dann über diese stationäre Verteilung eine so hochfrequente Wechselspannung gelagert wird, daß die schweren Ionen praktisch den Wechselvorgang nicht mitmachen. Solche Vorgänge können sowohl in Plasmen auftreten, als auch im Hochvakuum, wenn gleichzeitig Ionen- und Elektronenströmungen (z. B. eine Ionenanode) vorhanden sind¹⁾. Dann gilt

$$i = i_k + \Delta \frac{\partial E}{\partial t}, \quad i_k = i_{kp} + i_{kn} = pu + nv, \\ \Delta \frac{\partial E}{\partial x} = p - n, \quad eE = m \frac{du}{dt} + ru = m \frac{\partial u}{\partial t} + mu \frac{\partial u}{\partial x} + ru.$$

Und wenn man wieder in Gleich- und Wechselanteil aufspaltet, $i = i_g + i_w$, $p = p_g + p_w$, $u = u_g + u_w$, $E = E_g + E_w$ und berücksichtigt, daß $ik_{nw} = 0$, $n_w = 0$, $v_w = 0$ ist²⁾, und daß ferner u_g und p_g Funktionen von x sind, während $ik_{pg} = p_g u_g$ räumlich und zeitlich konstant ist, so wird das Kraftgesetz jetzt

$$eE_w = m \frac{\partial u_w}{\partial t} + m u_g \frac{\partial u_w}{\partial x} + m \frac{\partial u_g}{\partial x} u_w + r u_w,$$

woraus folgt, daß $m \frac{\partial u_g}{\partial x}$ gleichwertig r , also wie eine räumliche Dämpfung wirkt. Insbesondere vermag ein negatives $\frac{\partial u_g}{\partial x}$ von genügender Größe die Wirkung des Reibungswiderstandes aufzuheben bzw. einen insgesamt negativen Reibungswiderstand zu erzeugen. Es wird für $\frac{\partial u_g}{\partial x} < 0$ die Bewegungsenergie der verzögerten Elektronen in Schwingungsenergie umgesetzt. Da $ik_{pg} = p_g u_g$ und da $\frac{\partial ik_g}{\partial x} = 0$ ist, ist $u_g dp_g = -p_g du_g$, d. h. $\frac{\partial u_g}{\partial x} = -\frac{u_g}{p_g} \cdot \frac{\partial p_g}{\partial x}$. Also immer dann, wenn die Teilchen in einen Raum abnehmender Gleichstromgeschwindigkeit bzw. zunehmender Gleichstromdichte hineinlaufen, sind Anfachungsvorgänge für Schwingungen möglich, z. B. beim Vakuumbogen, wenn für Elektronen die Plasmadichte von der

¹⁾ Z. B. der Fall p_g und $n_g = \text{konst}$ ist auch im hohen Vakuum erreichbar, wenn Ionen und Elektronen in eine spannungslose Entladungsstrecke eingeschlossen werden und die Stromdichten und Eintrittsgeschwindigkeiten so gewählt sind, daß positive und negative Dichten überall gleich groß sind. —

²⁾ Auch hier sind der Einfachheit halber die positiven Teilchen, die in der x -Richtung laufen, als leicht und die entgegengesetzt laufenden negativen Teilchen als die schweren angenommen.

Kathode gegen die Anode zu anwächst, für Ionen, wenn die Dichte in der entgegengesetzten Richtung steigt. Solche Zustände tragen immer die Gefahr der Labilität in sich und können beseitigt werden, indem z. B. die kathodische Dichte möglichst hoch getrieben wird. Zur Anfachung von Schwingungen wird umgekehrt eine gegen die Anode genügend rasch ansteigende Dichte günstig sein.

Betrachtet man den Leistungsumsatz an solchen Stellen, so ergibt sich die je cm von der Stromquelle zugeführte Leistung als $E i = (E_w + E_g) \times (i_w + i_g)$, wovon $E_w i_w$ als Leistung für den Wechsellvorgang in Frage kommt. $E_w i_w = E_w (i_{k_w} + \Delta \frac{\partial E_w}{\partial t})$, wovon $E_w \cdot \frac{\partial E_w}{\partial t}$ über eine Periode integriert, verschwindet. Es bleibt also

$$E_w i_{k_w} = i_{k_w} \left[\frac{m}{e} \frac{\partial u_w}{\partial t} + \frac{m u_g}{e} \frac{\partial u_w}{\partial x} + \left(r + m \frac{\partial u_g}{\partial x} \right) \frac{1}{e} u_w \right]. \quad (84)$$

Hat i_{k_w} eine Komponente in Phase mit u_w , so wird bei negativem $\frac{\partial u_g}{\partial x}$ an dieser Stelle dem Wechsellvorgang vom Gleichfelde her Energie zugeführt. Nun ist

$$i_{k_w} u_w = p_g u_w^2 + u_g p_w u_w.$$

Während das erste (Geschwindigkeits-) Glied (u_w^2) über eine Periode integriert immer positiv ist (es wird die Schwingung der Geschwindigkeit gesteigert), braucht dies beim zweiten Glied ($p_w u_w$) nicht immer der Fall zu sein. Da der Phasenwinkel zwischen p_w und u_w von der Frequenz und den Grenzbedingungen abhängt, ist die Anfachung nicht für alle Frequenzen vorhanden, sondern, wie später gezeigt, nur für bestimmte, allerdings meist ziemlich ausgedehnte Gebiete.

Setzt man auf Grund des bisherigen die Differentialgleichung für E_w an, so entsteht

$$\frac{\partial^2 E_w}{\partial t^2} + u_g^2 \frac{\partial^2 E_w}{\partial x^2} + 2 u_g \frac{\partial^2 E_w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial E_w}{\partial t} \left(\frac{r}{m} + 2 \frac{\partial u_g}{\partial x} \right) + u_g \frac{\partial E_w}{\partial x} \left(\frac{r}{m} + 3 \frac{\partial u_g}{\partial x} \right) + \frac{p_g e}{m \Delta} E_w = \frac{i_w}{\Delta} \left(\frac{r}{m} + 2 \frac{\partial u_g}{\partial x} \right) + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial i_w}{\partial t}.$$

Für periodische Vorgänge in komplexer Form heißt sie

$$\frac{\partial^2 E_w}{\partial x^2} + \frac{1}{u_g} \frac{\partial E_w}{\partial x} \left[\frac{r}{m} + 3 \frac{\partial u_g}{\partial x} + 2 j \omega \right] + \frac{1}{u_g^2} E_w \times \\ \times \left[-\omega^2 + j \omega \left(\frac{r}{m} + 2 \frac{\partial u_g}{\partial x} \right) + \frac{p_g e}{m \Delta} \right] = \frac{i_w}{u_g^2 \Delta} \left[\frac{r}{m} + 2 \frac{\partial u_g}{\partial x} + j \omega \right]. \quad (86)$$

Die Differentialgleichung der Geschwindigkeit u_w , analog aufgestellt, lautet

$$\frac{\partial^3 u_w}{\partial t^3} + u_g \frac{\partial^2 u_w}{\partial x^2} + 2 u_g \frac{\partial^2 u_w}{\partial x \partial t} + \left(\frac{r}{m} + \frac{\partial u_g}{\partial x} \right) \frac{\partial u_w}{\partial t} + \\ + u_g \left(2 \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{r}{m} \right) \frac{\partial u_w}{\partial x} + \left(u_g \frac{\partial^2 u_g}{\partial x^2} + \frac{p_g e}{m \Delta} \right) u_w = i_w \frac{e}{m \Delta} \quad (37)$$

Die allgemeine Diskussion dieser Gleichungen ist nicht ganz einfach und soll in einer späteren Arbeit erfolgen. Eine angenäherte Lösung von (36) ergibt herrührend von $\partial u_g / \partial x$ einen negativen, frequenzabhängigen Exponenten (Dämpfungsfaktor), der $\partial u_g / \partial x$ proportional ist, und mit $\partial u_g / \partial x$ das Vorzeichen wechselt.

Die größenordnungsmäßige Abschätzung des Einflusses der einzelnen Größen ergibt folgendes:

1. Damit $\frac{r}{m} = \frac{e}{b m}$ im Gliede von $\partial E_w / \partial x$ klein sei gegen 2ω für ein übliches Hg-Plasma mit $b \approx 10^8 \text{ cm}^2/\text{V sec}$, $\frac{r}{m} \approx 2 \cdot 10^7$ muß $2\omega > 2 \cdot 10^7$ sein, d. h. die Frequenz $f > 1,5 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$ bzw. die Wellenlänge $\Delta < \frac{c}{1,5 \cdot 10^6}$ d. h. $< 200 \text{ m}$.

2. Damit du_g/dx in die Größenordnung von r/m kommt, muß mit $u_g \approx 10^7 \text{ cm/sec}$ (entsprechend $E_g \approx 0,1 \text{ Volt/cm}$), $\frac{\partial u_g}{\partial x} \approx 2 \cdot 10^7$ oder $u_g \left(\frac{1}{u_g} \frac{\partial u_g}{\partial x} \right) \approx 2 \cdot 10^7$, $\frac{1}{u_g} \frac{\partial u_g}{\partial x} \approx 2$ sein, was eine Zunahme von etwa einer Verdreifachung der Geschwindigkeit je cm Länge bzw. bei $\frac{1}{u_g} \frac{\partial u_g}{\partial x} = -2$ eine Verminderung der Geschwindigkeit um 20% je mm Länge bedeutet, oder eine Dichtezunahme um etwa 25% je mm Länge.

Um im Prinzip zu erkennen, was ein negativer Reibungswiderstand in bezug auf die Schwingungserzeugung bedeutet, braucht man nur die Gl. (8) mit Berücksichtigung der Dämpfung $\beta = \frac{r}{2m} \cdot \frac{1}{u_g}$ zu entwickeln.

¹⁾ Bei diesen Gleichungen braucht p_g nicht gleich n_g zu sein, wie es bei Plasmen vielfach angenähert der Fall ist. Bei Elektronen und Ionen, die z. B. im Hochvakuum in entgegengesetzter Richtung geschossen werden, ist fast überall p_g von n_g stark verschieden (s. eine folgende Arbeit). Der Zusammenhang beider Dichten ist durch

$$p_g = n_g + \frac{m \Delta}{e} \left(\frac{d u_g}{d x} \right)^2 + \frac{m \Delta}{e} u_g \frac{d^2 u_g}{d x^2} + \frac{r \Delta}{e} \frac{d u_g}{d x}$$

gegeben.

Man erhält dann in erster Näherung entsprechend Gl. (14) einen Innenwiderstand von

$$R_i = \frac{4 u_g^2 \omega_k^3 e^{-\beta \delta}}{\Delta (\omega^2 - \omega_k^2)^3} \beta \left\{ \sin \omega_k \tau \cos \omega \tau - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_k} + \frac{\omega_k}{\omega} \right) \sin \omega \tau \cos \omega_k \tau \right\} + \\ + \frac{2 u_g}{\Delta} \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2} \left\{ 1 - e^{-\beta \delta} \cos \omega \tau \cos \omega_k \tau - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_k} + \frac{\omega_k}{\omega} \right) e^{-\beta \delta} \sin \omega \tau \sin \omega_k \tau \right\}, \quad (38)$$

wo $\beta \delta = \frac{r}{2m} \tau$. Der zweite Teil dieses Ausdruckes entspricht Gl. (14).

Die trigonometrischen Funktionen erscheinen jetzt mit $e^{-\frac{r}{2m} \tau}$ multipliziert, was eine Selbsterregung (negatives R_i) erschwert bzw. bei größeren Laufzeiten unmöglich macht. Umgekehrt erleichtert negatives β (d. h. negative räumliche Dämpfung) die Selbsterregung und verbreitert zugleich die Frequenzgebiete ω , in denen Selbsterregung möglich ist und läßt auch zahlreiche neue Frequenzgebiete auftreten, in denen jetzt Selbsterregung möglich ist, aber mit $\beta = 0$ bzw. positivem β nicht.

Der erste Teil von R_i in Gl. (38) ist β proportional. Er ergibt u. U. einen negativen Anteil von R_i , wenn der Klammerausdruck negativ wird.

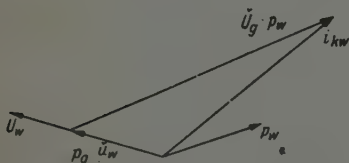


Fig. 3. Vektordiagramm des Konvektionsstromes.

Daß auch β , d. h. ein Reibungswiderstand, Ursache für Selbsterregung sein kann, sieht man aus Gl. (34). Wenn i_{kw} und u_w Komponenten in Gegenphase (d. h. um 180° phasenverschoben) haben, wird der Schwingung durch die räumliche Dämpfung Energie zugeführt, was dann der Fall ist, wenn der Konvektionsstrom

durch geringe Geschwindigkeitsschwankungen und hauptsächlich durch Dichteschwankungen erzeugt wird (besonders bei kleinem p_g und großem u_g), s. Fig. 3.

Im allgemeinen spielt der durch Dämpfung erzeugte Teil des inneren Widerstandes gegenüber dem zweiten Teil gar keine Rolle, da das Verhältnis der Größen beider Teile durch die Werte vor den Klammern gleich $\frac{2 \beta u_g \omega_k e^{-\beta \delta}}{\omega^2 - \omega_k^2}$ ist, was bei normalen Dämpfungen $\ll 1$ ist, da der Ausdruck angenähert gleich $(r/m)/\omega_k$ ist, d. h. etwa $2 \cdot 10^{-3}$ für normale Plasmen. Wächst β stark an, so verkleinert ihn $e^{-\beta \delta}$. Erst wenn β negativ und groß

wird, ist es denkbar, daß er anfängt, eine Rolle zu spielen. Bestimmend für die Selbsterregung wird aber immer der zweite Teil des Ausdrucks sein, der durch negatives β so sehr viel wirkungsvoller wird.

Man erkennt also, daß Elektronenschwingungen in Räumen mit zeitlich konstanten aber räumlich veränderlicher Elektronendichte bzw. Geschwindigkeit sehr viele neue Erregungsmöglichkeiten ergeben, deren genauere Diskussion später erfolgen soll.

Im bisherigen ist der „Elektronendruck“ noch nicht berücksichtigt¹⁾.

Setzt man diesen Druck P gleich pC/e (Joule/cm³, C in Joule), so ist die Kraftgleichung (1) durch $-C \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x}$ zu ergänzen („isotherme“ Zustandsänderung angenommen) und erhält die Form ($C = kT$)

$$eE_w - \frac{1}{p_g} \frac{\partial p_w}{\partial x} C = m \left(\frac{\partial u_w}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_w}{\partial x} \right) + r u_w. \quad (1a)$$

Die weitere Rechnung führt zu der erweiterten Gleichung (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_w}{\partial x^2} \left(u_g^2 - \frac{C}{m} \right) + \frac{\partial^2 E_w}{\partial t^2} + 2u_g \frac{\partial^2 E_w}{\partial x \partial t} + \frac{r u_g}{m} \frac{\partial E_w}{\partial x} + \\ + \frac{r}{m} \frac{\partial E_w}{\partial t} + \frac{ep}{m\Delta} E_w = \frac{r}{\Delta m} i_w + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial i_w}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2a)$$

die, transformiert auf das Koordinatensystem $\xi = x - u_g t$, $\eta = t$, zu der erweiterten Gleichung (3) führt

$$- \frac{C}{m} \frac{\partial^2 E_w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_w}{\partial \eta^2} + \frac{r}{m} \frac{\partial E_w}{\partial \eta} + \frac{ep}{m\Delta} E_w = \frac{2}{m\Delta} i_w + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial i_w}{\partial t}. \quad (3a)$$

¹⁾ Zur Frage des Elektronendrucks und seiner Wirksamkeit s. R. Rompe und M. Steenbeck, „Der Plasmazustand der Gase“ in „Ergebn. d. exakt. Naturwiss.“, Bd. XVIII, 1939, und R. Seeliger und M. Steenbeck, ZS. f. Phys. 113, 526, 1939. Hier soll es sich hauptsächlich um den Einfluß der Schallgeschwindigkeit auf die Lauf-Zeitvorgänge handeln. — Die dort angegebene Mindestwellenlänge, damit die Schwingung nicht durch die thermische Bewegung der Elektronen zerstört wird, $\lambda > \frac{w_x}{\omega}$, d. h. $\lambda > D \frac{\omega_k}{\omega}$ (D Debye-Radius, der die Feldabschirmung durch die umgebende Trägerwolke entgegengesetzten Vorzeichens angibt, d. h. den Potentialverlauf um die geladene Kugel zu $\frac{1}{r} e^{-r/D}$ bestimmt, wobei w_x mittlere thermische Geschwindigkeit in x -Richtung), kann auch mit $D = \frac{S}{\omega_k}$ als $\lambda > \frac{S}{\omega}$ geschrieben werden, wobei $D = 3 \cdot 10^{-7} \sqrt{\frac{U_t}{p}}$ (U_t thermische Voltgeschwindigkeit, p Ladung in Coul/cm³) ist, und zwischen 10^{-2} und 10^{-4} cm liegt (S = Schallgeschwindigkeit = $\sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$).

In beiden Fällen tritt zu Gl. (2) bzw. (3) das Glied $-\frac{C}{m} \frac{\partial^2 E_{\text{el}}}{\partial x^2}$ hinzu. Die entsprechende Gleichung für die Dichte p_w , transformiert auf das bewegte Koordinatensystem heißt

$$\frac{\partial^3 p_w}{\partial \eta^3} - \frac{C}{m} \frac{\partial^3 p_w}{\partial \xi^3} + \frac{r}{m} \frac{\partial p_w}{\partial \eta} + \frac{e p_\sigma}{m \Delta} p_w = 0 \quad (4a)$$

und entspricht der Gleichung (4).

Aus Gleichung (3a) und (4a) sieht man, wie das Zusammenwirken von elektrischer und mechanischer Kraft in Gleichung (1a) die Vorgänge beeinflusst. Gleichung (4a) würde z. B. ohne elektrische Kraft [$e E$ in Gl. (1a)] und bei vernachlässigter Reibung die Form $\frac{\partial^3 p_w}{\partial \eta^3} - \frac{C}{m} \frac{\partial^3 p_w}{\partial \xi^3}$ haben und als Lösung

$$p_w = f(\xi - S\eta) + g(\xi + S\eta) \quad S = \sqrt{\frac{C}{m}}$$

haben, d. h. Wanderwellen mit der Geschwindigkeit V (Schallwellen). Ohne mechanische Kraft gälte wieder die frühere Gl. (4) für gedämpfte Langmuir-Schwingungen ohne Ausbreitung. Die Gl. (4a) hat mit Vernachlässigung der Dämpfung partikuläre Lösungen von der Form

$$p_w = A e^{\lambda \xi} \cdot e^{\pm \sqrt{S^2 \lambda^2 - \omega_k^2} \cdot \eta}, \quad \omega_k^2 = \frac{e p_\sigma}{m \Delta},$$

wo λ eine beliebige Konstante ist.

Es sind dies Wellen mit der Geschwindigkeit $\pm \sqrt{S^2 - \frac{\omega_k^2}{\lambda^2}}$, welche für $\lambda < \omega_k/S$ imaginär wird. Nur für sehr große reelle λ wird sie gleich der Schallgeschwindigkeit. Setzt man zeitlich periodische Vorgänge im bewegten System voraus ($\sqrt{S^2 \lambda^2 - \omega_k^2} = j\omega$), so wird $\lambda = \frac{\sqrt{\omega_k^2 - \omega^2}}{S}$ und von einer Phasengeschwindigkeit kann erst gesprochen werden, wenn $\omega > \omega_k$, $\lambda = j \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_k^2}}{S}$ ist. Sie ist gleich $v_\sigma = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_k^2}} \cdot S$, wird für $\omega = \omega_k$ sehr groß, nimmt dann mit wachsendem ω ab und wird für sehr hohe Frequenzen $\omega \gg \omega_k$ gleich S . Die Wellenlänge ist $\Lambda = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi S}{\sqrt{\omega^2 - \omega_k^2}}$, woraus $\omega^2 = \omega_k^2 \left(1 + 4\pi^2 \frac{S^2}{\Lambda^2 \omega_k^2}\right)$ folgt. Ist $\Lambda > \frac{S}{\omega_k}$, so ist $\omega \approx \omega_k$ (s. a. R. Rompe u. M. Steenbeck, l. c. S. 301, wo dieser Fall auch diskutiert ist).

Die Gruppengeschwindigkeit ist $v_g = S^2/v_\sigma$, also für $\omega = \omega_k$ ist $v_g = 0$ und für $\omega \gg \omega_k$ wird $v_g = S$. Für $\omega < \omega_k$ existieren keine Wanderwellen, sondern nur Sin- bzw. Cos-artige Verteilungen, die mit Frequenz ω pulsieren.

Berücksichtigt man bei der Lösung von (4a) auch die Dämpfung, so ergibt sich:

$$-S^2 \frac{\partial^2 p_w}{\partial \xi^2} + (\omega_k^2 - \omega^2 + j\omega \frac{r}{m}) p_w = 0$$

und ein Exponentialfaktor von

$$\lambda = \pm \frac{1}{S} \sqrt{\omega_k^2 - \omega^2 + j\omega \frac{r}{m}} = \pm (m + jn) \frac{1}{S},$$

wobei

$$m = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ (\omega_k^2 - \omega^2) + \sqrt{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \left(\frac{r}{m}\right)^2} \right\}}, \quad m > 0,$$

$$n = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ -(\omega_k^2 - \omega^2) + \sqrt{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \left(\frac{r}{m}\right)^2} \right\}}, \quad n > 0.$$

Wenn $\omega_k^2 - \omega^2 < 0$ ist, vertauschen m und n ihre Rolle. Es treten jetzt auch für $\omega < \omega_k$ wandernde Wellen auf, deren Wellenlänge $2\pi/n$ um so größer ist, je kleiner die Frequenz ist, und die um so stärker gedämpft sind, je kleiner ω gegen ω_k ist. Für $\omega = \omega_k$ ist $\lambda = \pm \frac{1}{S} \sqrt{j\omega \frac{r}{m}}$ und die Dämpfung je Wellenlänge hat den hohen Wert $e^{-2\pi}$. Für $\omega > \omega_k$ nimmt die Wellenlänge und die Dämpfung mit steigender Frequenz ab.

Bestimmt man die allgemeine Lösung der Gleichung (2a) mit Vernachlässigung der Reibung [entsprechend Gleichung (6)] für periodische Schwingungen, so erhält man

$$\begin{aligned} \lambda_{12} &= -\frac{j\omega}{u_g} \frac{u_g^2}{u_g^2 - S^2} \pm j \frac{\omega_k}{u_g} \frac{u_g^2}{u_g^2 - S^2} \sqrt{1 - \frac{S^2}{u_g^2} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right]} \\ &= -j \frac{\alpha}{u_g} \pm j \frac{\beta}{u_g}. \end{aligned} \quad (6a)$$

Ist $S < u_g$, so ändert sich nichts Wesentliches an der E_w -Verteilung und an den Selbsterregungsbedingungen. Ist hingegen S in der Größenordnung von u_g , oder groß gegen u_g , so können sich die Erscheinungen stark ändern.

Da C in der Größenordnung $U_t e$ liegt (U_t Voltgeschwindigkeit der thermischen Elektronenbewegung, e Elektronenladung), kann die Schallgeschwindigkeit $S = \sqrt{C/m} = \sqrt{U_t e/m} \approx w_x$ (thermische mittlere Geschwindigkeit w_x in x -Richtung, wenn $w_x = \sqrt{kT/m}$ gesetzt) z. B. in normalen Hg-Plasmen um 10^7 cm herum liegen, kann also die Größenordnung von u_g erreichen oder übersteigen. Das Verhältnis von u_g/S ist $\approx \lambda E_g/U_t$, wo λ die mittlere freie Weglänge, E_g die gerichtete Feldstärke und U_t die thermische Voltgeschwindigkeit bedeutet.

Ist $S = u_g$, so werden die Verhältnisse leicht übersehbar, da in der Differentialgleichung (2a) das Glied mit $\partial^2 E_w / \partial x^2$ verschwindet. Für zeitlich periodische Schwingungen ergibt sich dann ohne Reibung

$$2 u_g j \omega \frac{\partial E_w}{\partial x} + E_w (\omega_k^2 - \omega^2) = \frac{j \omega}{\Lambda} i_w$$

mit der Lösung

$$E_w = A e^{j \alpha x} + i_w \dot{Z}$$

wo

$$\lambda = j \alpha = j \frac{\omega_k^2 - \omega^2}{2 u_g \omega}.$$

Es läuft dann nur eine Welle mit der Geschwindigkeit

$$v_p = -2 u_g \frac{\omega^2}{\omega_k^2 - \omega^2} \text{ mit der Wellenlänge } \Lambda = 4 \pi \frac{u_g \omega}{\omega_k^2 - \omega^2}$$

gegen die x -Achse, d. h. gegen den bewegten Elektronenblock. Die Gruppengeschwindigkeit v_g ist

$$v_g = -2 u_g \frac{\omega^2}{\omega_k^2 - \omega^2}.$$

Sie wächst mit ω von Null bis auf $u_g = S$ bei $\omega = \omega_k$ und auf $2 u_g$ für $\omega \gg \omega_k$. Ist z. B. für $x = 0$ auch $E_w = 0$ oder $i_w = 0$, so ist in diesem Falle keine Selbsterregung möglich.

Für den Fall $u_g \neq S$ ergibt sich aus Gl. (6a): Der Ausdruck unter der Wurzel in β ist positiv oder negativ, d. h. β ist reell oder imaginär, je nachdem ob

$$\omega^2 \geq \omega_k^2 \left(1 - \frac{u_g^2}{S^2}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{S^2}{u_g^2} \leq \frac{\omega_k^2}{\omega_k^2 - \omega^2}.$$

Für $\omega_0 = \omega_k \sqrt{1 - \left(\frac{u_g}{S}\right)^2}$ verschwindet die Wurzel, was für ein reelles ω_0 nur möglich ist, wenn $S > u_g$ ist. Je kleiner u_g/S ist, desto näher liegt ω_0 an ω_k ($\omega_0 < \omega_k$). In diesem Fall ($S > u_g$) treten für größere ω ($\omega > \omega_0$) Wanderwellen konstanter Amplitude auf, für kleinere ω ($\omega < \omega_0$), wo das zweite Glied von λ reell wird, Wanderwellen mit zu- bzw. abnehmender Amplitude. Für $S < u_g$ treten nur Wanderwellen konstanter Amplitude bei allen Frequenzen auf. Für $\omega = \omega_k$ verschwindet ein λ , und das andere wird $-2 j \frac{\omega_k}{u_g} \frac{u_g^2}{u_g^2 - S^2}$.

Zur Entscheidung der Frage der Selbsterregung in dem Falle, daß β in (6a) reell ist, kann man direkt die Gl. (13) und (14) benutzen, indem dort

innerhalb der geschweiften Klammer¹⁾ statt $\omega \rightarrow \alpha$ und statt $\omega_k \rightarrow \beta$ gesetzt wird. Aus der Gleichung

$$\alpha \tau = \omega \tau \frac{u_g^2}{u_g^2 - S^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{\nu} \pi \dots$$

bestimmt sich $\omega \tau$, das für $S < u_g$ kleiner wird, für $S > u_g$ auch größer werden kann, als das $\omega \tau$ nach Gl. (14). Aus der Gleichung

$$\beta \tau = \omega_k \tau \frac{u_g^2}{u_g^2 - S^2} \sqrt{1 - \frac{S^2}{u_g^2} \left[1 - \left(\frac{\omega \tau}{\omega_k \tau} \right)^2 \right]} = \frac{\pi}{2}, \dots$$

bestimmt sich das zugehörige $\omega_k \tau$, d. h. die Plasmalänge δ , die für die Erregung von ω nötig ist, zu

$$\begin{aligned} (\omega_k \tau)^2 &= (\beta \tau)^2 \frac{u_g^2 - S^2}{u_g^2} - (\omega \tau)^2 \frac{S^2}{u_g^2 - S^2} \quad \text{bzw.} \\ &= (\omega \tau)^2 \frac{S^2}{S^2 - u_g^2} - (\beta \tau)^2 \frac{S^2 - u_g^2}{u_g^2}, \quad \text{für } S > u_g; \end{aligned}$$

auch hier erregt sich am stärksten eine Frequenz, die ω_k möglichst nahe liegt.

Ist hingegen β in Gleichung (6a) imaginär ($S > u_g$, $\omega < \omega_k \sqrt{1 - \left(\frac{u_g}{S}\right)^2}$),

so daß $\lambda_{12} = -j \frac{\alpha}{u_g} \pm \frac{\gamma}{u_g}$ gesetzt werden kann, so entsteht die zu Gl. (19) analoge Beziehung

$$\begin{aligned} Z_i &= 2 \frac{u_g}{\Delta} \frac{\omega_k^2}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2} \left\{ 1 - \operatorname{Co}[\gamma \tau \cos \alpha \tau - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha} \right) \operatorname{Sin} \gamma \tau \sin \alpha \tau + \right. \\ &\quad \left. + j \left[\operatorname{Co}[\gamma \tau \sin \alpha \tau - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha} \right) \operatorname{Sin} \gamma \tau \cos \alpha \tau \right] \right\} - \frac{j}{\omega \Delta} \frac{\omega^2 \delta}{\omega^2 - \omega_k^2}, \\ \gamma &= \omega_k \frac{u_g^2}{u_g^2 - S^2} \sqrt{\frac{S^2}{u_g^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2} \right) - 1}, \quad \alpha = \omega \frac{u_g^2}{u_g^2 - S^2}. \end{aligned}$$

Man erkennt, daß auch jetzt Selbsterregungen (negative Widerstände) möglich sind, denn immer, wenn z. B. $\alpha \tau = k \cdot 2\pi$ ist, verschwindet $\sin \alpha \tau$ und $1 - \operatorname{Co}[\gamma \tau]$ wird negativ, um so mehr, je größer $\operatorname{Co}[\gamma \tau]$ ist. Aber auch z. B. für $\alpha \tau = k \frac{\pi}{2}$, wo $\cos \alpha \tau$ verschwindet, kann R_i negativ werden, wenn α/γ geeignete Werte hat, wobei

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\omega_k}{\omega} \sqrt{\frac{S^2}{u_g^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2} \right) - 1}$$

ist bzw.

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \sqrt{\left(\frac{S^2}{u_g^2} - 1 \right) \frac{\omega_k^2}{\omega^2}} - 1.$$

¹⁾ Also nicht etwa auch außerhalb dieser Klammern.

Wenn man den Grenzfall betrachtet, in dem $S_E \gg u_g$ ist, d. h. wo die Translationsgeschwindigkeit gegenüber der Schallgeschwindigkeit verschwindet, folgt aus Gleichung (2a)

$$\lambda = \frac{u_g \omega}{S_E^2} j \pm \sqrt{-\frac{u_g^2 \omega^2}{S_E^4} - \frac{(\omega^2 - \omega_k^2)}{S_E^2}}.$$

Also angenähert

$$\lambda = \pm \frac{j}{S_E} \sqrt{\omega^2 - \omega_k^2} = \pm j \alpha$$

(wie früher bei ruhendem Elektronenblock gefunden). Es ist somit

$$E = A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x} + \frac{j \omega}{\Delta (\omega_k^2 - \omega^2)} \cdot i_w$$

und die Spannung zwischen $x = 0$ und $x = \delta$

$$V_w = \frac{-j}{\alpha} \left[\cos \alpha \delta (A_1 - A_2) + j \sin \alpha \delta (A_1 + A_2) - (A_1 - A_2) \right] + \frac{j \omega}{\Delta (\omega_k^2 - \omega^2)} i_w \delta.$$

Die Integrationskonstanten A_1 und A_2 seien durch Bedingungen bei $x = 0$ festgelegt:

$$p_{w_0} = P_w = \Delta \frac{\partial E_w}{\partial x_0} = \Delta \lambda (A_1 - A_2),$$

$$i_{kw_0} = J_{kw} = -j \omega \Delta E_{w_0} + i_w = U_w p_g + P_w u_g,$$

woraus folgt

$$A_1 + A_2 = -\frac{j}{\omega \Delta} \frac{\omega_k^2}{\omega_k^2 - \omega^2} i_w + j \frac{(U_w p_g + P_w u_g)}{\omega \Delta},$$

$$A_1 - A_2 = \frac{P_w}{\Delta \lambda}.$$

Dies oben eingesetzt, gibt

$$V_w = \frac{1}{\alpha} \left\{ (1 - \cos \alpha \delta) \frac{P_w}{\Delta \alpha} + j \sin \alpha \delta \left[-\frac{1}{\omega \Delta} \frac{\omega_k^2}{\omega_k^2 - \omega^2} i_w + \frac{U_w p_g + P_w u_g}{\omega \Delta} \right] \right\} + \frac{j \omega}{\Delta (\omega_k^2 - \omega^2)} \cdot i_w \delta.$$

Aus dieser Gleichung sieht man zunächst, daß Selbsterregungen, d. h. negative Widerstände, nur dann auftreten können, wenn Schwankungen von p bzw. u bei $x = 0$ auftreten (P_w , U_w). Das Glied mit i_w in der Gleichung gibt immer rein imaginären Widerstand.

Ist z. B. $E_{w_0} = 0$ keine Feldstärkenschwankung bei $x = 0$, $i_{w_0} = U_w p_g + P_w u_g$ und auch $U_w = 0$, so daß $P_w = i_w / u_g$ ist, so tritt kein negativer Widerstand bzw. keine Selbsterregung auf. Ebenso, wenn $P_w = 0$ ist und $U_w = i_w / p_g$.

Arbeitet man mit „Sättigung“, $i_{kw_0} = 0$, also $U_w p_a + P_w u_a = 0$, $i_w = j\omega \Delta E_{w_0}$, so hängt es von den Vorgängen an den Grenzen des Gebietes 0, δ ab, die E_{w_0} mit P_w verkoppeln, wie P_w verläuft, insbesondere, ob P_w eine Komponente in Gegenphase zu i_w besitzt, denn nur diese kann zu einem negativen Widerstand führen. Ist an der Kathode U_w gleich Null, so ist es auch P_w und wiederum keine Selbsterregung möglich. Wenn eine Frequenz errögt wird, so liegt sie sehr nahe der Langmuir-Frequenz ω_k .

Durch die Ausschaltung des Einflusses von u_a werden die Vorgänge grundlegend gegen die früher behandelten und im Sinne einer viel schwierigeren Selbsterregung geändert, und nach der bisherigen experimentellen Erfahrung scheinen Vorgänge dieser Art unwahrscheinlich, und die Berücksichtigung der Eigentranslation des Elektronenblocks notwendig.

Für den allgemeineren Fall translatorisch ruhender, aber pendelnder Ionen, translatorisch mit der Geschwindigkeit V bewegter Elektronen, und mit Berücksichtigung des Ionen- und Elektronendrucks folgt aus

$$\begin{aligned} j\omega p_w + P \frac{\partial u_w}{\partial x} &= 0, & j\omega n_w - N \frac{\partial v_w}{\partial x} - V \frac{\partial n_w}{\partial x} &= 0, & C_J &= k T_p \\ & & & & C_E &= k T_n \\ \frac{\partial E_w}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta} (p_w - n_w), & i_w &= j\omega \Delta E_w + u_w P + n_w V + v_w N, & P &= N \\ e E_w - \frac{C_J}{P} \frac{\partial p_w}{\partial x} &= (R + j\omega M) u_w, & S_E &= \sqrt{\frac{C_E}{m}} \\ e E_w + \frac{C_E}{N} \frac{\partial n_w}{\partial x} &= (r + j\omega m) v_w - m V \frac{\partial v_w}{\partial x}, & S_J &= \sqrt{\frac{C_J}{M}} \end{aligned}$$

für die Dichte der positiven Ionen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_E^2} (V^2 - S_E^2) \cdot \frac{1}{\omega_J^2} S_J^2 \frac{\partial^4 p_w}{\partial x^4} - V \frac{1}{\omega_E^2} \frac{1}{\omega_J^2} S_J^2 \left(\frac{r}{m} + 2j\omega \right) \frac{\partial^3 p_w}{\partial x^3} + \\ & + \left\{ \left[1 + j \frac{\omega}{\omega_E^2} \left(\frac{r}{m} + j\omega \right) \right] \frac{1}{\omega_J^2} S_J^2 - \frac{1}{\omega_E^2} (V^2 - S_E^2) \left[1 + \frac{j\omega}{\omega_J^2} \left(\frac{R}{M} + j\omega \right) \right] \right\} \times \\ & \times \frac{\partial^2 p_w}{\partial x^2} + V \frac{1}{\omega_E^2} \left(\frac{r}{m} + 2j\omega \right) \left[1 + \frac{j\omega}{\omega_J^2} \left(\frac{R}{M} + j\omega \right) \right] \frac{\partial p_w}{\partial x} + \\ & + \left\{ 1 - \left[1 + j \frac{\omega}{\omega_E^2} \left(\frac{r}{m} + j\omega \right) \right] \left[1 + \frac{j\omega}{\omega_J^2} \left(\frac{R}{M} + j\omega \right) \right] \right\} p_w = 0. \end{aligned}$$

Vernachlässigt man den Ionendruck $S_J = 0$, so entsteht.

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\omega_E^2} (V^2 - S_E^2) \left[1 + \frac{j\omega}{\omega_J^2} \left(\frac{R}{M} + j\omega \right) \right] \frac{\partial^2 p_w}{\partial x^2} + \frac{V}{\omega_E^2} \left(\frac{r}{m} + 2j\omega \right) \times \\ & \times \left[1 + \frac{j\omega}{\omega_J^2} \left(\frac{R}{M} + j\omega \right) \right] \frac{\partial p_w}{\partial x} + \left\{ 1 - \left[1 + \frac{j\omega}{\omega_E^2} \left(\frac{r}{m} + j\omega \right) \right] \times \right. \\ & \times \left. \left[1 + \frac{j\omega}{\omega_J^2} \left(\frac{R}{M} + j\omega \right) \right] \right\} p_w = 0. \end{aligned}$$

Wird außerdem auch noch $V = 0$ gesetzt (ruhender Elektronenblock), so wird

$$\frac{S_E^2}{\omega_E^2} \frac{\partial^2 p_w}{\partial x^2} + \left\{ \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_E^2} \left(\frac{R}{M} + j\omega \right)} - \left[1 + \frac{j\omega}{\omega_E^2} \left(\frac{r}{m} + j\omega \right) \right] \right\} p_w = 0.$$

Vernachlässigt man in dieser Gleichung die Reibungen ($R = 0$, $r = 0$) und setzt $\omega/\omega_E \ll 1$ voraus, so erhält man genau dieselbe Gleichung für die Ionenschwingungen, wie bei Rompe-Steenbeck, l. c. S. 304 (5, 17) mit Hilfe der Boltzmann-Verteilung abgeleitet.

Für R und $r \rightarrow 0$ erhält man aus dieser Gleichung als Exponentialfaktor der p_w -Verteilung

$$\lambda^2 = - \frac{\omega^2}{S_E^2} \frac{\omega_E^2 + \omega_J^2 - \omega^2}{\omega_J^2 - \omega^2}.$$

Also nur wenn $\omega^2 < \omega_J^2$ oder $\omega^2 > \omega_E^2 + \omega_J^2$ ist, wird λ^2 negativ, d. h. entstehen wandernde Wellen. Dazwischen liegen aperiodische Verteilungen, die pulsieren.

Wenn $\omega^2 \gg \omega_J^2$ ist, wird $\lambda^2 = \frac{\omega_E^2 - \omega^2}{S_E^2}$ wie auf S. 26. Die Selbsterregungsbedingung für periodische Schwingungen lautet mit $\lambda = j\alpha$ immer $\alpha \delta = k \cdot 2\pi$, wo k je nach den Grenzbedingungen die Werte $1/2$, 1, 2 usw. hat. Mit $S_E = D \cdot \omega_E$ und $m = \frac{4\pi^2 k^2 D^2}{\delta^2}$, und $m \ll 1$ vorausgesetzt, was fast immer der Fall ist, ergeben sich die selbsterregten Frequenzen als $\omega_1^2 \approx \omega_E^2 \left(1 + \frac{m}{1 + \frac{\omega_J^2}{\omega_E^2}} \right) + \omega_J^2$ und $\omega_2^2 \approx m \frac{\omega_E^2 \omega_J^2}{\omega_E^2 + \omega_J^2}$.

Wenn $\omega_E^2 > \omega_J^2$ ist, wird ω_1 sehr nahe gleich ω_E und mit $\omega_2^2 \approx m \omega_J^2$ wird ω_2 wesentlich kleiner als ω_J .

Die Phasengeschwindigkeit dieser Wellen ist

$$v_p = S_E \sqrt{\frac{\omega_J^2 - \omega^2}{\omega_E^2 + \omega_J^2 - \omega^2}}$$

und ihre Wellenlänge

$$\Lambda = 2\pi \frac{S_E}{\omega} \sqrt{\frac{\omega_J^2 - \omega^2}{\omega_E^2 + \omega_J^2 - \omega^2}}.$$

Für kleine ω ($\omega < \omega_J$) wird

$$v_p \approx S_E \frac{\omega_J}{\omega_E} \approx S_E \sqrt{\frac{m}{M}}$$

und

$$\Lambda = 2\pi S_E \frac{\omega_J}{\omega_E} \frac{1}{\omega} = 2\pi D \frac{\omega_J}{\omega}$$

(D Debye-Radius) (s. auch Rompe und Steenbeck, l. c. S. 305). Für ω nahe ω_J wird λ sehr klein.

Mit Berücksichtigung von V entsteht dagegen:

$$\lambda = \frac{j\omega V}{S_E^2 - V^2} \left\{ -1 \pm \sqrt{1 + \frac{S_E^2 - V^2}{V^2} \frac{\omega_E^2 + \omega_J^2 - \omega^2}{\omega_J^2 - \omega^2}} \right\}^1, \quad (6b)$$

wo die Grenzen zwischen periodischen und aperiodischen Zuständen um so mehr verschoben werden, je größer V gegen S_E ist.

Bestimmt man schließlich für den eben behandelten Fall translatorisch bewegter Elektronen, ruhender pendelnder Ionen, mit Elektronen — aber ohne Ionendruck, den Verlauf der Wechselfeldstärke, so erhält man für zeitlich periodische Vorgänge

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_w}{\partial x^2} (S_E^2 - V^2) + \frac{\partial E_w}{\partial x} \left(\frac{r}{m} + 2j\omega \right) V - E_w \left(\frac{r}{m} + j\omega \right) \times \\ \times \frac{\frac{eN}{\Delta(r + j\omega m)} + \frac{eP}{\Delta(R + j\omega M)}}{\frac{eP}{\Delta(R + j\omega M)} + j\omega} \\ = - \left(\frac{r}{m} + j\omega \right) \frac{j\omega}{\Delta} \frac{j\omega}{j\omega + \frac{eP}{\Delta(R + j\omega M)}} \end{aligned}$$

und mit R und $r \rightarrow 0$

$$\frac{\partial^2 E_w}{\partial x^2} (S_E^2 - V^2) + \frac{\partial E_w}{\partial x} 2j\omega V + E_w \omega^2 \frac{\omega_E^2 + \omega_J^2 - \omega^2}{\omega_J^2 - \omega^2} = j \frac{\omega^2}{\Delta} \frac{j\omega}{\omega_J^2 - \omega^2}.$$

Der Exponentialfaktor λ , der aus dieser Gleichung folgt, ist genau derselbe, wie der gerade oben für p_w abgeleitete, Gleichung (6b), d. h. der räumliche Verlauf von p_w , E_w , und damit auch von n_w ist im Prinzip der gleiche, was periodische, aperiodische Verteilungen usw. anbelangt.

¹⁾ Diese Gleichung ist identisch mit (6a), abgesehen von der Richtung der Strömung.

Die Umrechnungsfaktoren von internationalen auf absolute elektrische Einheiten *).

Von U. Stille in Braunschweig.

(Eingegangen am 1. Dezember 1942.)

Für eine Diskussion der Werte der Atomkonstanten nach neueren Präzisionsbestimmungen unter verschiedenen Gesichtspunkten wird eine möglichst genaue Kenntnis der Zahlenwerte für die Umrechnungsfaktoren p und q von internationalen auf absolute elektrische Einheiten sowie deren Genauigkeiten erforderlich. In der vorliegenden Untersuchung werden nach Behandlung der Definitionen für die internationalen elektrischen Einheiten die heute als richtig anzusehenden Zahlenwerte für p und q aus den verschiedenen Einzelpräzisionsbestimmungen abgeleitet. Besondere Aufmerksamkeit ist dabei dem sogenannten int. Volt (v) und den aus der Einführung dieses Begriffes folgenden Konsequenzen gewidmet. Als Zahlenwerte ergeben sich: $p = 1,00049 \pm 0,00002$, $q = 0,99990 \pm 0,0001_2$, $pq = 1,0003_9 \pm 0,0001_4$, $pq^2 = 1,0002_9 \pm 0,0002_6$.

1. Einführung.

In letzter Zeit sind eine Reihe von neuen Präzisionsbestimmungen der atomaren Konstanten e , e/m_0 und h/e veröffentlicht worden, deren Ergebnisse eine erneute Diskussion über die heutige Kenntnis von den Zahlenwerten der Atomkonstanten erfordern. Die verschiedenen Gesichtspunkte, unter denen dieses Thema behandelt wird ¹⁾, sind schon an anderer Stelle ²⁾ ausführlich aufgeführt und besprochen worden.

Dort wurde festgestellt, daß die von den einzelnen Autoren mit ihren Versuchsanordnungen gemessenen Größen im allgemeinen durch Multiplikation mit verschiedenen Umrechnungsfaktoren und Konstanten auf eine der Atomkonstanten umgerechnet werden. Hierbei wechseln die benutzten Zahlenwerte für die einzelnen Faktoren von Autor zu Autor und sind teilweise nicht eindeutig oder gar nicht angegeben worden. Unter anderen gehen beim Übergang vom internationalen praktischen zum absoluten CGS-Maßsystem die Umrechnungsfaktoren von internationalen auf absolute elektrische Einheiten ein.

*) Gleichzeitig gehen zwei weitere Veröffentlichungen unter den Titeln „Wahrscheinlicher Fehler und Fehlergrenze in Anwendung auf das Problem der Atomkonstanten“ bzw. „Die atomaren Konstanten e , e/m_0 und h “ in Druck, von denen die eine im voraufgehenden Heft dieser Zeitschrift (ZS. f. Phys. 120, 703, 1943) erschienen ist bzw. die andere im folgenden Heft dieser Zeitschrift (ZS. f. Phys. 121, H. 3/4, 1943) erscheinen wird.

¹⁾ U. Stille, ZS. f. Phys. 121, H. 3/4, 1943. — ²⁾ U. Stille, ebenda, 120, 703, 1943.

Die in den einzelnen Veröffentlichungen in CGS-Einheiten angegebenen Zahlenwerte für die Atomkonstanten müssen zunächst auf die ursprünglich durch die jeweilige Versuchsanordnung in internationalen Einheiten gemessenen Größen zurückgeführt werden. Erst dann wird ein einwandfreier Vergleich zwischen den mit verschiedenen Meßmethoden bestimmten Größen dadurch möglich, daß man aus diesen durch Multiplikation mit entsprechenden Faktoren unter Benutzung *einheitlicher* Zahlenwerte für diese die einzelnen Atomkonstanten berechnet. Hierzu ist — insbesondere für den Vergleich zwischen elektrisch und mechanisch gemessenen Größen — eine möglichst genaue Kenntnis der Zahlenwerte für die Umrechnungsfaktoren von internationalen auf absolute elektrische Einheiten erforderlich. Weiter müssen auch die Fehlergrenzen dieser Zahlenwerte bekannt sein, die entsprechend den Ausführungen bei der allgemeinen Behandlung des Atomkonstantenproblems¹⁾ in die Fehlerbestimmung für die Zahlenwerte der Atomkonstanten eingehen.

Bei einer Durchsicht der bisher in der Literatur für diese Umrechnungsfaktoren angegebenen Werte zeigt sich, daß diese Werte einer eingehenderen Betrachtung bedürfen, um zu heute verantwortbaren Zahlenangaben zu kommen. Weiterhin ergeben sich dabei auch einige andere Punkte, die eventuell zu Mißverständnissen führen können und für die daher eine Klärstellung erforderlich zu sein scheint, wie z. B. die Einführung des Begriffes des sogenannten „internationalen Volt (*v*)“, einer Einheit, mit der teilweise in der Literatur gearbeitet wird.

Da die Kenntnis der Zahlenwerte für die Umrechnungsfaktoren von internationalen auf absolute elektrische Einheiten einerseits für die Diskussion der Atomkonstanten nur ein Hilfsmittel ist, auf der anderen Seite aber als eigenes Gebiet eine Reihe von Problemen in sich birgt, wird dieses Thema hier besonders behandelt. Die Ergebnisse werden bei der zahlenmäßigen Durchführung der Atomkonstantendiskussion²⁾ übernommen.

2. Die beiden Grundeinheiten, das int. Ohm und das int. Amp.

Für den Anschluß elektrischer Messungen an das internationale elektrische Einheitensystem sind gesetzlich zwei elektrische Einheiten als Grundeinheiten international festgelegt worden, das internationale Ohm (int. Ohm) für die Einheit des elektrischen Widerstandes und das internationale Ampere (int. Amp.) für die Einheit der elektrischen Stromstärke.

¹⁾ U. Stille, ZS. f. Phys. **120**, 703, 1943. — ²⁾ U. Stille, ebenda **121**, H. 3/4, 1943.

Die Einheit des elektrischen Widerstandes wird dargestellt durch den Gleichstromwiderstand einer Quecksilbersäule auf der ganzen Länge gleichen Querschnittes von $1,06300\text{ m}$ Länge und der Masse $1,44521 \cdot 10^{-2}\text{ kg}$ bei der Temperatur des schmelzenden Eises. Die Einheit der elektrischen Stromstärke hat ein zeitlich konstanter Strom, der beim Durchgang durch eine wässrige Lösung von Silbernitrat $1,11800 \cdot 10^{-6}\text{ kg}$ Silber in der Sekunde niederschlägt.

Diese Einheiten für elektrischen Widerstand und elektrische Stromstärke sind im Deutschen Reichsgesetz „betr. die elektrischen Maßeinheiten“¹⁾ vom 1. 6. 1898 festgesetzt und auf dem internationalen Elektrikerkongreß in London²⁾ im Oktober 1908 ohne wesentliche Abänderungen als international verbindlich angenommen worden; es wurden dort lediglich gegenüber der ursprünglichen deutschen Fassung die beiden letzten Nullen in den Zahlenwerten für die Länge der Quecksilbersäule und die abgeschiedene Silbermenge zugefügt, um die Einheiten jeweils auf sechs Stellen festzulegen.

Dabei entstammen die in diesen gesetzlichen Festsetzungen stehenden Zahlenwerte Messungen, die mit dem Ziel durchgeführt worden waren, die international zu vereinbarenden Einheiten für elektrischen Widerstand und elektrische Stromstärke — das int. Ohm und das int. Amp. — den entsprechenden Einheiten für diese Größen im ursprünglich-technischen Maßsystem — den sogenannten absoluten elektrischen Einheiten, abs. Ohm und abs. Amp. — gleich zu machen. Es sollte also $1\text{ int. Ohm} = 1\text{ abs. Ohm} = 10^9\text{ absoluten elektromagnetischen Einheiten des elektrischen Widerstandes}$, und $1\text{ int. Amp.} = 1\text{ abs. Amp.} = 10^{-1}\text{ absoluten elektromagnetischen Einheiten der elektrischen Stromstärke}$ sein. Dieses Ziel ist seinerzeit innerhalb der damals möglichen Meßgenauigkeit auf etwa vier Stellen auch erreicht worden.

Spätere Kontrollmessungen zeigten aber, daß zwischen den international vereinbarten und den absoluten elektrischen Einheiten Differenzen bestehen, die bei erhöhter Meßgenauigkeit außerhalb derselben lagen. Nun hat man vernünftigerweise nicht die internationalen Einheiten abgeändert und an die absoluten angeglichen, wie es ursprünglich für den 1. 1. 1940 geplant war. Ein solches Verfahren würde nämlich auch bei weiter verfeinerter Meßtechnik und damit steigender Meßgenauigkeit stets wieder zur Feststellung neuer Differenzen und somit wiederholter Abänderung der international vereinbarten elektrischen Einheiten führen. Es braucht auf

¹⁾ Reichsgesetzblatt für 1898, S. 905. — ²⁾ Siehe z. B.: Elektrot. ZS. 30, 344, 1909.

diese und ähnliche mit dem GesamttHEMA internationale \div absolute Einheiten zusammenhängende Fragen hier nicht näher eingegangen zu werden, da diese gründlichst in sehr zahlreichen Veröffentlichungen der letzten Jahre behandelt worden sind.

Um nun bei Präzisionsmessungen den gegenseitigen Anschluß von in mechanischen Einheiten gemessenen Größen an solche, die in internationalen elektrischen Einheiten gemessen worden sind, zu gewinnen, müssen die Umrechnungsfaktoren von internationalen auf absolute elektrische Einheiten sowie deren Fehlergrenzen mit möglichst großer Genauigkeit bekannt sein. Man bezeichnet diese Umrechnungsfaktoren im allgemeinen mit p und q entsprechend den Beziehungen

$$1 \text{ int. Ohm} = p \text{ abs. Ohm}, \quad (1)$$

$$1 \text{ int. Amp.} = q \text{ abs. Amp.} \quad (2)$$

Für diese Umrechnungsfaktoren sind im Laufe der Jahre eine ganze Reihe verschiedener Zahlenwerte angegeben worden. Eine kleine Auswahl derselben ist in der Tabelle I zusammengestellt. Die zugehörige Literatur ist am Schluß dieser Veröffentlichung gesondert nach den laufenden Nummern der Tabelle I aufgeführt worden.

Tabelle I. Angegebene Werte für p und q .

Lfd. Nr.	Autor	Jahr	p	q
1	Intern. Critic. Tables	1923	1,000 52	0,99993
2	Henning u. Jäger	1926	1,000 5	1,00003
3	Birge	1929	1,000 51	0,99995
4	Kohlrausch-Henning . .	1935	1,000 5	0,99995
5	Fischer	1936	1,000 51	0,99996
6	Birge	1938	1,000 48	0,99993
7	Wensel	1939	1,000 48	0,99986
8	Dunnington	1939	1,000 485	0,999970
9	AEF	1941	1,000 46	0,99993

Im folgenden soll nun eine Abschätzung der Werte für p und q gegeben werden, wie man sie bei dem heutigen Stande der Meßtechnik auf Grund der verschiedenen Einzelbestimmungen ableiten kann.

3. Das internationale Volt.

Es ist zunächst erforderlich, an die Tatsache zu erinnern, daß zwar die Einheit des elektrischen Widerstandes in Gestalt des Quecksilbernormals oder der von diesem abgeleiteten Drahtwiderstandsnormale in den ver-

schiedenen Staatsinstituten für Maß und Gewicht aufbewahrt werden kann und wird. Dagegen kann die Einheit der elektrischen Stromstärke leider nicht in ähnlicher Weise „aufbewahrt“ werden, sondern ist jeweils durch die entsprechende Silberelektrolyse zu reproduzieren. Eine solche Festlegung des Amperes kann mit einem Silbervoltmeter wohl jederzeit erreicht werden, erschien jedoch vom meßtechnischen Standpunkt als ein umständliches und zeitraubendes Verfahren.

Man hat daher für den Anschluß von Messungen an die internationalen elektrischen Einheiten ein weiteres, sekundäres Normal geschaffen, das die Aufbewahrung des internationalen Volts (int. Volt), der Einheit der elektrischen Spannung, gestattet. Das int. Volt ist zunächst definiert als die elektrische Spannung, die gemäß dem Ohmschen Gesetz zwischen den Enden eines Widerstandes von 1 int. Ohm liegt, falls dieser von 1 int. Amp. durchflossen wird; d. h. das int. Volt ist abzuleiten aus dem int. Ohm und dem int. Amp. gemäß der Beziehung

$$1 \text{ int. Volt} = 1 \text{ int. Ohm} \cdot 1 \text{ int. Amp.} \quad (3)$$

Der internationale Elekrikerkongreß hat im Jahre 1908 als Normalelement das Westonsche Kadmiumelement angenommen. Die eingeprägte Spannung dieses Elements wurde auf Grund gemeinsamer Messungen unter Beteiligung der verschiedenen Staatsinstitute in Washington im Jahre 1910 zu 1,01830 int. Volt bei 20° C für neutrale, gesättigte Lösung festgelegt; dieser Wert wurde ab 1. 1. 1911 als international verbindlich für die eingeprägte Spannung dieses Elements als Spannungsnormal festgesetzt. Die Messungen wurden in späteren Jahren wiederholt kontrolliert. Auf Grund dieser Ergebnisse ist bis zum heutigen Tage an der zahlenmäßigen Festlegung für die eingeprägte Spannung des Weston-Normalelements in int. Volt festgehalten worden. Auf diesen Punkt wird noch weiter unten einzugehen sein.

Aus den Beziehungen (1), (2) und (3) ergibt sich für den Umrechnungsfaktor von internationalen auf absolute Volt = 10^8 absolute elektromagnetische Einheiten der Spannung

$$1 \text{ int. Volt} = pq \text{ abs. Volt.} \quad (4)$$

Weiter sei noch der Umrechnungsfaktor für die Leistung bzw. Energie von internationalen elektrischen auf mechanische Einheiten angegeben:

$$1 \text{ int. Wattsec} = pq^2 \text{ abs. Wattsec} = pq^2 \cdot 10^7 \text{ erg} = pq^2 \text{ Gro\ss dyn} \cdot \text{m} \quad (5).$$

Da die Umrechnungsfaktoren für alle elektrischen Größen von internationalen auf absolute elektrische Einheiten Potenzprodukte von p und q enthalten, ist also für den Anschluß von in internationalen elektrischen Einheiten gemessenen an in mechanischen Einheiten gemessene Größen die Kenntnis der Zahlenwerte für p und q erforderlich. Hierzu läßt sich zunächst allgemein feststellen, daß der Zahlenwert für p heute wesentlich genauer bekannt ist als der für q .

4. Einzelbestimmungen von p .

Als erstes soll der Zahlenwert für p angegeben werden. Bezüglich der verschiedenen angewandten Meßmethoden zur Bestimmung von p und der älteren und teilweise auch neueren gewonnenen Zahlenwerte sei auf vielfach vorliegende zusammenfassende Darstellungen¹⁾ bzw. auf die am Schluß der Veröffentlichung unter II. zusammengestellte Originalliteratur verwiesen.

Die neueren²⁾ z. Zt. bekannt gewordenen Meßergebnisse zur Bestimmung von p sind in Tabelle II zusammengefaßt. In dieser sind in der Spalte 1 die einzelnen Untersuchungen fortlaufend unter denselben Nummern durchnumeriert, unter denen man auch die zugehörigen Literaturstellen in der am Schluß befindlichen, gesonderten Zusammenstellung findet. Spalte 2 enthält die Autoren, Spalte 3 im allgemeinen das Jahr des Messungsabschlusses, Spalte 4 das zugehörige Staatsinstitut³⁾, Spalte 5 den gemessenen p -Wert bezogen auf das int. Ohm, wie es z. Zt. der Messung in dem betreffenden Staatsinstitut aufbewahrt wurde, Spalte 6 die Fehlergrenzen, soweit sie eindeutig angegeben sind⁴⁾, und Spalte 8 die Meßmethode. Dabei sind in Spalte 5 die Meßergebnisse mit derselben Zahl von Ziffern angegeben wie in den Originalarbeiten.

¹⁾ Siehe z. B.: G. Mie, Handb. d. Experimentalphys. Bd. XI, 1. Teil, Leipzig, Akad. Verlagsges., 1932, S. 451 ff.; E. Dorn, Wiss. Abhandl. phys.-techn. Reichsanst. 2, 257, 1895; W. Jäger, Handb. d. Phys., Bd. XVI, Berlin, Springer, 1927, S. 40 ff.; E. Haak, Elektr. Nachr.-Techn. 16, 69, 1939. — ²⁾ Die vor 1935 z. B. in den Procès-Verbaux des Comité International des Poids et Mesures veröffentlichten Werte sind hier nicht mit aufgeführt worden, da diese meist nur als vorläufige Meßergebnisse weiterlaufender Untersuchungen mitgeteilt waren.

— ³⁾ Es bedeuten in üblicher Abkürzung: PTR = Physikalisch-Technische Reichsanstalt in Berlin; NBS = National Bureau of Standards in Washington; NPL = National Physical Laboratory in Teddington; LCE = Laboratoire Central d'Électricité in Paris; ETL = Electrotechnical Laboratory in Tokio.

— ⁴⁾ Die angegebenen Fehlergrenzen enthalten nicht etwaige Unsicherheiten, die durch unvollkommene Reproduktion der internationalen elektrischen Grundeinheiten bzw. der für diese aufbewahrten Normale hineinkommen.

Tabelle II. Einzelbestimmungen für p .

1	2	3	4	5	6	7	8
Lfd. Nr.	Autor	Jahr	Staats- Institut	p	$\Delta p \cdot 10^6$	p (korr.)	Methode
1	Smith	1913	NBS	1,00052	20	—	Lorenz
2	Grüneisen-Giebe	1914	PTR	1,00051	30	—	Selbstind.-Normal, Maxwell-Brücke
3	Zickner	1935	"	1,00049	20	1,00048	Grüneisen-Giebe
4	NPL	1935	NPL	1,00050	20	1,00050	Lorenz
5	NPL	1935	"	1,00047	20	1,00047	Campbell
6	Curtis-Moon-Sparks	1935	NBS	1,000450	20	1,000454	Selbstind.-Normal, Maxwell-Brücke
7	Hartshorne-Astbury	1936	NPL	1,000500	15	1,000504	Campbell
8	Vigoureux	1937	"	1,00050	30	1,00050	Lorenz
9	Yoneda	1937	ETL	1,000455	20	1,000465	Gegenind.-Normal, Carey-Foster- Brücke, Maxwell-Brücke
10	Curtis-Moon-Sparks	1938	NBS	1,000468	20	1,000472	Selbstind.-Normal, Maxwell-Brücke
11	Jouaust-Picard-Hérou	1938	LCE	1,00052	20	1,00052	Campbell-Picard
12	Curtis-Moon-Sparks	1938	NBS	1,000483	20	1,000486	Selbstind.-Normal, Maxwell-Brücke
13	Wenner-Thomas-Cooter-Kotter.	1938	"	1,000485	20(?)	1,000488	Gegenind.-Normal, Wenner
14	Zickner	1939	PTR	1,00051	20	1,00050	Grüneisen-Giebe
15	Jouaust-Picard-Hérou	1939	LCE	1,00051	20	1,00051	Campbell-Picard

5. Das mittlere internationale Ohm.

Da die in den einzelnen Staatsinstituten durch Normale aufbewahrten und von diesen jeweils angenommenen Einheiten des int. Ohm örtlich und zeitlich gegeneinander schwanken, sind die in Spalte 5 aufgeführten Meßergebnisse nicht ohne weiteres vergleichbar. Diese werden vielmehr auf ein „mittleres internationales Ohm“ zurückgeführt. Um die Abweichungen der int. Ohm-Einheiten der einzelnen Staatsinstitute untereinander und zu verschiedenen Zeiten festlegen zu können, werden im Bureau International des Poids et Mesures in Sèvres regelmäßig entsprechende Vergleichsmessungen durchgeführt, deren Ergebnisse für die Zeit vom Jahre 1933 an veröffentlicht werden ¹⁾. In den dort angegebenen Tabellen sind alle Abweichungen einheitlich auf das „mittlere internationale Ohm von 1935“, d. h. den Mittelwert der Einheiten der verschiedenen Staatsinstitute im Jahre 1935 bezogen worden. In der Spalte 7 findet man die ab 1933 erhaltenen Meßergebnisse für p , bezogen auf dieses „mittlere internationale Ohm von 1935“, als p (korr.) angegeben. Dabei wurde bei der Umrechnung wieder auf dieselbe Stellenzahl abgerundet, die jeweils der ursprünglich angegebene Wert in der Originalarbeit (Spalte 5) aufwies.

6. Der Zahlenwert für p .

Zur Festlegung eines heute vertretbaren Zahlenwertes für p kann dann eine geeignete Mittelwertbildung vorgenommen werden. Da die einzelnen Meßergebnisse nicht wesentlich verschiedene Fehlergrenzen aufweisen, erscheint für die hier vorliegenden Zwecke eine ungewichtete arithmetische Mittelwertbildung angebracht. So erhält man als Mittelwert für die in Spalte 5 aufgeführten Ergebnisse 1,00049₁, für die in Spalte 7 angegebenen Werte 1,00048₈. Benutzt man zur Mittelwertbildung nur die letzten von den fünf Staatsinstituten NPL, ETL, NBS, PTR, LCE angegebenen Werte nach Spalte 7, so ergibt sich als Mittelwert 1,00049₃. Da nach den vorliegenden Ergebnissen mit einer Unsicherheit von etwa $2 \cdot 10^{-5}$ in der Festlegung des Zahlenwertes für p zu rechnen ist, erscheint als z. Zt. richtige Angabe der Wert

$$p = 1,00049 \pm 0,00002.$$

¹⁾ Siehe z. B.: A. Pérard u. M. Romanowski, C. R. 196, 1288, 1933; 199, 523, 1934; A. Pérard, M. Romanowski u. M. Roux, ebenda 209, 23, 1939; A. Pérard u. M. Romanowski, Comité International des Poids et Mesures, Procès-Verbaux des Séances, Série 2^{de}, 17, 279, 1935, 18, 193, 1937; Comité Consultatif d'Électricité auprès du Comité International des Poids et Mesures, Session 1939, Procès-Verbaux des Séances, Rapport et Annexes, Paris, Gauthier-Villars, 1939, S. E 62.

Dieser Wert ist auch dem Comité Consultatif d'Électricité im Comité International des Poids et Mesures in Paris im Jahre 1939¹⁾ zur Annahme vorgeschlagen worden. Aus weiter unten zu besprechenden Gründen wurde dort dieser Wert auf 1,0005 aufgerundet²⁾.

7. Einzelbestimmungen von q .

Die Festlegung des q -Wertes kann, wie eingangs schon erwähnt, leider heute nur wesentlich ungenauer erfolgen. Bezüglich der verschiedenen angewandten Meßmethoden und der älteren gewonnenen Zahlenwerte für q sei wieder auf schon vorliegende zusammenfassende Darstellungen³⁾ bzw. die am Schluß unter III. zusammengestellte Originalliteratur verwiesen.

Die neueren⁴⁾ z. Zt. bekannt gewordenen Meßergebnisse sind in der Tabelle III zusammengestellt, die ganz analog der Tabelle II aufgebaut ist. Dabei sind die in Spalte 7 aufgeführten Werte wieder bezogen auf ein „mittleres internationales Ampere“, das gemäß Beziehung (3) aus dem oben schon erwähnten „mittleren internationalen Ohm“ und einem 1935 ähnlich definierten „mittleren internationalen Volt“ entsteht. Das „mittlere internationale Volt“ ergab sich aus Vergleichsmessungen⁵⁾ an den verschiedenen Weston-Normalelementen der einzelnen Staatsinstitute, die im Bureau International des Poids et Mesures ganz analog denen zur Vergleichung der Normalwiderstände der einzelnen Staatsinstitute durchgeführt wurden. Auch hier ist die Umrechnung von Spalte 5 auf Spalte 7 für die Meßergebnisse nach 1933 wieder unter Abrundung auf gleiche Stellenzahl erfolgt.

Zu den einzelnen Meßergebnissen ist zu bemerken: ursprünglich wurde der Vergleich eines Stromwertes, gemessen in abs. Amp., mit dem ent-

¹⁾ Comité Consultatif d'Électricité auprès du Comité International des Poids et Mesures, Session 1939, Procès-Verbaux des Séances, Rapport et Annexes, Paris, Gauthiers-Villars, 1939, S. E 16. — ²⁾ Ebenda, S. E 36. — ³⁾ Siehe z. B.: G. Mie, Handb. d. Experimentalphys., Bd. XI, 1. Teil, Leipzig, Akad. Verlagsges., 1932, S. 426, 470ff.; F. Henning u. W. Jäger, Handb. d. Phys., Bd. II., Berlin, Springer, 1926, S. 498ff.; W. Jäger, ebenda Bd. XVI, 1927, S. 49ff.; E. B. Rosa, N. E. Dorsey u. J. M. Miller, Bull. Bur. Stand. Wash. 18, 269, 1912. — ⁴⁾ Siehe hierzu Fußnote 2 auf S. 39. ⁵⁾ Siehe z. B.: A. Pérard, M. Romanowski u. M. Roux, C. R. 209, 23, 1939; M. Romanowski u. M. Roux, Comité International des Poids et Mesures, Procès-Verbaux des Séances, Série 2^{de}, 17, 291, 1935; 18, 200, 1937; Comité Consultatif d'Électricité auprès du Comité International des Poids et Mesures, Session 1939, Procès-Verbaux des Séances, Rapport et Annexes, Paris, Gauthier-Villars, 1939, S. E 69.

Tabelle III. Einzelbestimmungen von q .

1	2	3	4	5	6	7	8
Lfd. Nr.	Auton	Jahr	Staatsinstitut	q	$\Delta q \cdot 10^6$	q (korr.)	Methode
1	Ayrton-Mather-Smith.....	1907	NPL	0,99988	20	—	Ayrton-Stromwaage, Weston-Element
2a	Rosa-Dorsey-Miller.....	1911	NBS	0,99996	20	—	Rayleigh-Stromwaage, Silbervoltameter
2b	"	1914	"	0,99995	20	—	"
2c	"	1934	"	0,999926	20	—	Rayleigh-Stromwaage, Weston-Element
3	Curtis-Curtis.....	1934	"	0,999928	20	0,999934	"
4	Dupouy-Jouaust.....	1934	LCE	0,9998 ₉	20 (?)	1,0000 ₂ ¹⁾	Cotton-Stromwaage, Weston-Element
5	Vigoureux.....	1935	NPL	0,99986	30 (50) ²⁾	0,99985	Ayrton-Jones-Stromwaage, Weston-Element
6	Curtis-Curtis-Critchfield....	1937	NBS	0,99989	20	0,99990	Rayleigh-Stromwaage, Weston-Element
7	Yoneda-Ishibashi.....	1937	ETL	0,99994 ₉	37	0,99993 ₈	"
8	v. Steinwehr.....	1939	PTR	1,00006	vorläufige Werte	1,00007	"
	"	1939	"	1,00003		1,00004	"
	"	1939	"	0,99996		0,99997	"
	"	1939	"	1,00012		1,00013	"
9a	Curtis-Curtis-Critchfield....	1938	NBS	0,999862	20	0,999869	"
9b	"	1939	"	0,999852	20	0,999859	"

1) Zwischen 1933 und 1935 sind zur Angleichung an die mittleren internationalen Einheiten die int. Einheiten des LCE geändert worden. Es geht aus der Originalarbeit nicht eindeutig hervor, ob der in Spalte 5 angegebene Wert von 0,9998₉ sich auf die int. Einheiten des LCE vor oder nach der Änderung bezieht. Der Wert 1,0000₂ in Spalte 7 wurde berechnet auf Grund der in der Originalarbeit angegebenen Differenz zwischen dem int. Amp. des LCE und dem int. Amp. des NSB sowie der Abweichung des letzteren vom mittleren internationalen Ampere. — 2) 30 · 10⁻⁶ gibt Vigoureux als relative Unsicherheit für die Messungen mit seiner Stromwaage an. Der Fehler von 50 · 10⁻⁶ entsteht durch Hinzufügen von weiteren 20 · 10⁻⁶; dieser Betrag soll die Ungenauigkeiten, mit denen der Zahlenwert für die eingetragte Spannung des Weston-Normalelementes an die Silbervoltameterbestimmungen angeschlossen ist, berücksichtigen. Vigoureux teilt als Ergebnis der gemeinsamen Messungen in Berlin im Jahre 1931 für diese Spannung den Wert 1,01830 ± 0,00002 mit.

sprechenden Wert in int. Amp. durch Einschalten eines Silbervoltameters vorgenommen, d. h. direkt auf die Definition des internationalen Amperes zurückgeführt. In dieser Form ist in der Tabelle III nur der Wert (III, 2a) ¹⁾ bzw. (III, 2b) gewonnen worden. Die übrigen angegebenen Werte sind auf andere, im folgenden zu besprechende Weise an die internationalen elektrischen Einheiten angeschlossen worden.

8. Das semiabsolute Volt.

Bei diesen und ähnlichen Messungen spielt der von NSB geprägte Begriff des „semiabsoluten Volts“ eine besondere Rolle. Bestimmt man mittels einer Stromwaage die Stärke eines elektrischen Stromes in abs. Amp. und läßt denselben Strom einen in int. Ohm bekannten Widerstand durchfließen, so besteht nach dem Ohmschen Gesetz zwischen den Enden des Widerstandes eine Potentialdifferenz, die man dann zahlenmäßig in Einheiten des sogenannten semiabsoluten Volts erhält, wobei dieses definiert ist durch die Beziehung

$$1 \text{ semiabs. Volt} = 1 \text{ int. Ohm} \cdot 1 \text{ abs. Amp.} \quad (6)$$

oder mit Beziehung (1)

$$1 \text{ semiabs. Volt} = p \text{ abs. Volt} \quad (7)$$

bzw. mit Beziehung (2)

$$1 \text{ semiabs. Volt} = \frac{1}{q} \text{ int. Volt.} \quad (8)$$

Gleicht man Strom und Widerstand so ab, daß die Potentialdifferenz zwischen den Enden des Widerstandes gleich der eingepprägten Spannung des Weston-Normalelementes ist, so erhält man die eingepprägte Spannung des Weston-Normalelements zahlenmäßig in semiabs. Volt. Bestimmt man noch über ein Silbervoltameter die eingepprägte Spannung des Weston-Normalelements in int. Volt, so ergibt sich als Quotient dieser beiden Werte gemäß Beziehung (8) ein Zahlenwert für q . Rosa, Dorsey und Miller (III, 2a) fanden für die eingepprägte Spannung des Weston-Normalelements 1,01822₄ semiabs. Volt und geben nach Silbervoltametermessungen für diese 1,01826₃ int. Volt an. Der Quotient dieser Zahlen findet sich als q -Wert in der 5. Spalte der Tabelle III unter (2a). Nach späteren eingehenderen Untersuchungen mit dem Silbervoltameter von Rosa, Vinal

¹⁾ Die eingeklammerten Zahlen sollen als Abkürzungen auf die unter der betreffenden laufenden Nummer in der Tabelle III aufgeführten Messungen bzw. die zugehörigen, am Schluß zusammengestellten Literaturangaben verweisen.

und Mc Daniel (III, 2b) beträgt die eingeprägte Spannung des Weston-Normalelements 1,01827 int. Volt; mit diesem Wert erhält man den unter (2 b) in der 5. Spalte der Tabelle III aufgeführten Zahlenwert für q .

Diese Messungen ergaben also neben einem Zahlenwert für q auch Abweichungen der eingeprägten Spannung der Weston-Normalelemente von dem 1910 zu 1,01830 int. Volt festgelegten Wert. Wie schon früher erwähnt, ist der Anschluß einer elektrischen Messung an das Silbervoltameter ein ziemlich umständliches Verfahren; man bedient sich daher meist unter gleichzeitiger Benutzung des int. Ohm der Zurückführung auf das int. Volt, welches durch die Beziehung (3) definiert ist und durch die Angabe für die eingeprägte Spannung des Weston-Normalelements $= 1,01830$ int. Volt „aufbewahrt“ werden soll.

9. Das internationale Volt (v).

Da nach den soeben genannten Messungen Unstimmigkeiten bezüglich des Zahlenwertes der eingeprägten Spannung des Weston-Normalelements in int. Volt vorzuliegen schienen, findet man in der Literatur häufig noch ein weiteres internationales Volt angegeben, das sogenannte „int. Volt (v)“¹⁾, d. h. ein sogenanntes int. Volt, bezogen auf die eingeprägte Spannung des Weston-Normalelements $\equiv 1,01830$ int. Volt (v); im Gegensatz hierzu wird das eigentliche int. Volt, bezogen auf das Silbervoltameter, das durch die Beziehung (3) definiert ist, mit int. Volt (a) bezeichnet. Entsprechend wird dann auch zwischen zwei verschiedenen Umrechnungsfaktoren für das Volt unterschieden, einmal

$$1 \text{ int. Volt } (a) = pq \text{ abs. Volt} \quad (4)$$

und

$$1 \text{ int. Volt } (v) = r \text{ abs. Volt.} \quad (4')$$

In dieser Auffassung ergeben sich dann auch natürlich zwei verschiedene Umrechnungsfaktoren für das Ampere. Hat man z. B. die eingeprägte Spannung eines Weston-Normalelements durch Benutzung einer Stromwaage und eines in int. Ohm bekannten Widerstandes zahlenmäßig gemäß Beziehung (6) in semiabs. Volt bestimmt, so kann man einmal einen Umrechnungsfaktor für das Ampere gemäß Beziehung (8) angeben, wenn man die eingeprägte Spannung des Weston-Normalelements vermittels eines Silbervoltameters bestimmt. Dieser Weg ist bei den in der Tabelle III auf-

¹⁾ Dieser Begriff scheint zuerst in den International Critical Tables of Numerical Data, Physics, Chemistry and Technology, Bd. I, New York, Mc Graw-Hill Book Co., 1926, S. 18, geprägt zu sein.

geführten Untersuchungen lediglich von Rosa und Mitarbeitern (III, 2a und 2b) eingeschlagen worden. Dann gilt gemäß Beziehung (3), (4), (6) und (7)

$$q = \frac{1 \text{ int. Volt } (a)}{1 \text{ semiabs. Volt}} = \frac{1 \text{ int. Ohm} \cdot 1 \text{ int. Amp. } (a)}{1 \text{ int. Ohm} \cdot 1 \text{ abs. Amp.}} = \frac{1 \text{ int. Amp. } (a)}{1 \text{ abs. Amp.}}^1. \quad (8a)$$

Oder man nimmt die eingeprägte Spannung des Weston-Normalelements als selbständiges Spannungsnormalelement identisch zu 1,01830 int. Volt (v) an und erhält somit für das Ampere gemäß Beziehung (3), (4'), (6) und (7) einen Umrechnungsfaktor

$$\frac{r}{p} = \frac{1 \text{ int. Volt } (v)}{1 \text{ semiabs. Volt}} = \frac{1 \text{ int. Ohm} \cdot 1 \text{ int. Amp. } (v)}{1 \text{ int. Ohm} \cdot 1 \text{ abs. Amp.}} = \frac{1 \text{ int. Amp. } (v)}{1 \text{ abs. Amp.}}^1. \quad (8a')$$

Auf Grund der letzteren Auffassung ist der unter (2c) in der 5. Spalte der Tabelle III aufgeführte Wert für die Meßergebnisse der Untersuchungen von Rosa, Dorsey und Miller (III, 2a) in einer Arbeit von Curtis und Curtis (III, 2c) angegeben worden. Auch alle weiteren in der 5. Spalte der Tabelle III eingetragenen Zahlenwerte beruhen auf der Festsetzung, daß die eingeprägte Spannung des Weston-Normalelements als selbständiges Spannungsnormalelement 1,01830 int. Volt beträgt, wären also Umrechnungsfaktoren in der Auffassung der Beziehung (8a').

Hier scheint nun eine prinzipielle Unstimmigkeit und ein Anlaß für Mißverständnisse vorzuliegen. Zunächst muß noch einmal eindringlich daran erinnert werden, daß nur zwei elektrische Einheiten, nämlich das int. Ohm und das int. Amp. durch das Quecksilbernornalelement und die Silber-elektrolyse gesetzlich und international verbindlich festgelegt worden sind. Wenn dann später noch aus diesen oder jenen Gründen des praktischen Meßverfahrens eine dritte elektrische Einheit, nämlich das int. Volt, durch das Weston-Normalelement als sekundäre Einheit festgesetzt wird, so kann das, da zwischen diesen drei Einheiten eine Relation — das Ohmsche Gesetz — besteht, natürlich nur so geschehen, daß diese drei Einheiten auch bezüglich des Ohmschen Gesetzes miteinander konsistent, zumindest innerhalb der jeweiligen Fehlergrenzen verträglich sind. Überträgt man diesen Gedanken auf die Bestimmung des Umrechnungsfaktors für das Ampere, so müssen innerhalb der Fehlergrenzen des jeweiligen Meßverfahrens die Werte für q — z. B. gemäß Beziehung (8a) — und für r/q — entsprechend z. B. gemäß Beziehung (8a') — miteinander übereinstimmen. Innerhalb

¹⁾ Dabei bezieht sich das Klammersymbol (a) auf das durch die Silber-elektrolyse und (v) auf das durch Quecksilbernornalelement und Weston-Normalelement definierte int. Amp.

der Fehlergrenzen übereinstimmende Werte für q und r/p sind z. B. angegeben von Henning und Jäger¹⁾, Jäger²⁾ und Birge³⁾.

In neuerer Zeit werden dagegen für q und r/p außerhalb der Fehlergrenzen verschiedene Werte vorgeschlagen, z. B. von Dunnington in seinem Artikel über die Atomkonstanten. Dort gibt Dunnington für den Umrechnungsfaktor die beiden Werte

$$q = 0,999970 \pm 0,000020$$

und

$$r/p = 0,999926 \pm 0,000020$$

an und benutzt diese beiden dann auch unterschiedlich bei den von ihm durchgeführten Rechnungen zur Bestimmung der Atomkonstanten.

Die äußerst kleinen Fehler sind wie alle in dieser Arbeit von Dunnington angegebenen als wahrscheinliche Fehler zu verstehen und wie die angegebenen Werte selbst durch Ausgleichsrechnung gewonnen. Mit diesen Angaben trifft Dunnington nun aber gleichzeitig die Feststellung, daß die eingeprägte Spannung des Weston-Normalelements, deren Zahlenwert in den sogenannten int. Volt (v) identisch gleich 1,01830 gesetzt ist, in den eigentlichen int. Volt (a) = int. Ohm · int. Amp. ausgedrückt außerhalb der angegebenen Fehler einen anderen Zahlenwert besitzt — und zwar entsprechend den Beziehungen (8a) und (8a') und der von Dunnington verwandten Fehlerbestimmung den Wert

$$\frac{r/p}{q} \cdot 1,01830 = 1,018255 \pm 0,000029^4).$$

Derartige Angaben über verschiedene — und zwar außerhalb ihrer Fehler eindeutig unterscheidbare⁵⁾ — Zahlenwerte für q und r/p müssen als ein sehr wenig wünschenswerter Zustand angesehen werden. Sie führen nämlich sehr leicht zu Mißverständnissen und falschen Auffassungen über den experimentellen Tatbestand. Einmal täuschen diese Angaben eine nicht vorhandene Meßgenauigkeit vor — wie weiter unten angegeben, ist der

¹⁾ F. Henning u. W. Jäger, Handb. d. Phys., Bd. II, Berlin, Springer, 1926, S. 502. — ²⁾ W. Jäger, ebenda Bd. XVI, 1927, S. 58. — ³⁾ R. T. Birge, Rev. Mod. Phys. 1, 18, 1929. — ⁴⁾ Dieser Wert würde übrigens ungefähr dem Normalwert für Weston-Elemente mit Säurezusatz entsprechen, wie sie das NPL benutzt. — ⁵⁾ Es scheint hier auch ein Beispiel für mögliche Mißverständnisse vorzuliegen, zu denen die rein rechnerische Behandlung mit Ausgleichsrechnung auf Grund der Gaußschen Fehlertheorie führen kann (siehe auch U. Stille, ZS. f. Phys. 120, 703, 1943). Während die Methode der kleinsten Quadrate hier für den Umrechnungsfaktor für das Ampere zu zwei in der 5. Stelle außerhalb der „wahrscheinlichen Fehler“ verschiedenen Werten führt, ist der Umrechnungsfaktor q nach dem heutigen Stande der experimentellen Messungen um mehr als $1 \cdot 10^{-4}$ unsicher, wie weiter unten näher dargelegt wird.

Zahlenwert für q nur auf 1 bis $2 \cdot 10^{-4}$ sicher bekannt. Zum anderen bringen sie erhebliche Schwierigkeiten in die Begriffe über Einheiten und Normale. Sollte sich wirklich herausstellen, daß die eingeprägte Spannung des Weston-Normalelements außerhalb der Meßgenauigkeiten nicht mehr mit dem 1910 angenommenen Wert von 1,01830 int. Volt (a) übereinstimmt, so muß entweder dieser Zahlenwert entsprechend abgeändert oder das int. Amp. (a), definiert durch die Silberelektrolyse, aufgegeben werden. Denn ein Nebeneinanderbestehen von mehr als zwei elektrischen Einheiten, die nicht mehr das Ohmsche Gesetz erfüllen, erscheint sowohl vom Standpunkt der Einheitenfestlegung als auch für das praktische Messen als ein unhaltbarer Zustand. Dementsprechend sollte man auch iminer nur einen Umrechnungsfaktor für das Ampere definieren und behandeln.

Auf Grund des derzeitigen Standes der Präzisionsmessungen erscheint es angebracht, nur von dem Faktor q zu sprechen. Demgemäß können auch im folgenden die Klammersymbole (a) und (v), die nur zur Präzisierung des Tatbestandes eingeführt waren, ohne weiteres fortgelassen werden. Unter dem int. Amp. und dem int. Volt sind also die eingangs durch die Silberelektrolyse, das Quecksilbernormal und das Ohmsche Gesetz definierten Einheiten zu verstehen.

10. Der Zahlenwert für q .

Nach dieser allgemeinen Klarstellung kann nun die Tabelle III wieder zur Festlegung eines mittleren q -Zahlenwertes vorgenommen werden. Hierzu ist allerdings noch zu betonen, daß es sich bei den unter (8) angegebenen Zahlenwerten für q um vorläufige Ergebnisse noch nicht abgeschlossener Untersuchungen mit verschiedenen Spulenkombinationen handelt. Da auch in der zitierten Veröffentlichung (III, 8) keine zahlenmäßigen Genauigkeitsangaben gemacht worden sind, soll hier, soweit man diese Werte zur Mittelwertbildung heranzieht, für diese jeweils einfach das arithmetische Mittel der vier Werte, d. h. in Spalte 5 der Tabelle III der Wert 1,00004 und in Spalte 7 der Wert 1,00005 benutzt werden. Die Zahlenangaben für (9a) und (9b) unterscheiden sich durch den jeweils benutzten Wert für die Erdbeschleunigung. Während in allen übrigen Untersuchungen ein Wert für die Erdbeschleunigung benutzt wurde, der an die 1906 veröffentlichten Potsdamer Absolutbestimmungen anschließt, ist im Falle (9b) ein um $2 \cdot 10^{-5}$ kleinerer Wert eingesetzt worden, der auf einer Neubestimmung des Absolutwertes der Erdbeschleunigung basiert, die im NBS ausgeführt wurde¹⁾.

¹⁾ P. R. Heyl u. G. S. Cook, Bur. of Stand. Journ. of Res. 17, 805, 1936.

Da einmal die Fehlergrenzen, soweit sie für die Werte in Tabelle III angegeben sind, nicht wesentlich voneinander abweichen, andererseits die verschiedenen Absolutwerte für q aus noch nicht restlos geklärten Gründen beträchtliche Differenzen aufweisen, sind hier zunächst wohl, wenn eine Mittelwertbildung überhaupt erlaubt ist, nur ungewichtete arithmetische Mittelwerte für die Festlegung eines q -Wertes angebracht¹⁾.

Es ergibt sich für q als Mittelwert aus Spalte 5 unter Benutzung der Werte (1) bis (9) $0,99992_1$, als Mittelwert aus der Spalte 7 unter Benutzung der Werte (3) bis (9a) $0,99993_7$ und unter Benutzung der Werte (3) bis (9b) $0,99993_8$. Zieht man zur Mittelwertbildung nur die letzten von den einzelnen Staatsinstituten veröffentlichten Werte heran, so erhält man nach Spalte 7 aus (4), (5), (7), (8) und (9b) $0,99994_3$, unter Vernachlässigung der vorläufigen Werte der PTR und Benutzung der auf die Potsdamer Erdbeschleunigungsbestimmungen bezogenen Werte (4), (5), (7), (9a) $0,99991_9$ und unter weiterer Vernachlässigung des bezüglich seiner Korektion auf das mittlere internationale Ampere nicht ganz sicheren Wertes des LCE aus (5), (7), (9a) $0,99988_6$. Im wesentlichen kommen nur diese beiden letzten Mittelwerte für die Festlegung eines augenblicklich als richtig anzusehenden Wertes für q in Betracht.

Trotzdem die Fehler bei den einzelnen Meßergebnissen — allerdings vielfach unter Ausschluß des durch die Unsicherheit in der Erdbeschleunigung eingehenden Fehlers — meist mit $2 \cdot 10^{-5}$ angegeben werden, weichen die gemessenen Werte um wesentlich mehr von einem Mittelwert ab. Diese Diskrepanzen scheinen auch noch nicht restlos aufgeklärt zu sein.

Die Wägungen mit Stromwaagen und die Bestimmungen ihrer Instrumentkonstanten, d. h. der Dimensionen der benutzten Spulen, scheinen heute bei Durchsicht der Originalliteratur auf etwa $1 \cdot 10^{-5}$ genau zu sein. Ebenso ergibt sich für die Bestimmung der eingepprägten Spannung eines Weston-Normalelements in int. Volt durch Anschluß an ein Silbervoltmeter ein möglicher Fehler von ungefähr $1 \cdot 10^{-5}$ oder noch geringer²⁾. Die Absolutwerte der eingepprägten Spannung für das Weston-Normalelement zeigen allerdings gewisse Abweichungen im Laufe der Zeit von Staatsinstitut zu Staatsinstitut. Die eingehenden Untersuchungen im NBS aus dem Jahre 1914, die zu einem Wert von 1,01827 int. Volt führten, sind

¹⁾ Irgendwelche Methoden der Ausgleichsrechnung hier anzuwenden, erscheint aus an anderer Stelle (U. Stille, ZS. f. Phys. 120, 703, 1943) allgemein dargelegten Gründen nicht gerechtfertigt. — ²⁾ Siehe z. B.: H. v. Steinwehr, ZS. f. Instrkde. 33, 353, 1913; H. v. Steinwehr u. A. Schulze, ebenda 42, 221, 1922; 52, 249, 1932.

schon oben erwähnt worden. Als ein weiteres Beispiel seien hier noch die ausgedehnten und besonders sorgfältigen Untersuchungen der PTR genannt, in deren Veröffentlichungen auch die jeweils von anderen Staatseinrichtungen gemessenen Werte angeführt sind ¹⁾. Die silbervoltametrische Messung der eingepprägten Spannung von Weston-Normalelementen in der PTR ergab im Jahre 1908 — vor den gemeinsamen Bestimmungen in Washington — den Wert 1,01834 int. Volt ²⁾. Für den kleinen ³⁾ und großen Elementenstamm der PTR wurden im Laufe der Jahre Werte gemessen, die in der Tabelle IV zusammengestellt sind. Als Bezugswert für alle elektrischen Messungen wird allerdings in allen Ländern zur Zeit die eingepprägte Spannung des Weston-Normalelements zu 1,01830 int. Volt angenommen.

Tabelle IV.

Eingepprägte Spannung der Weston-Normalelemente in der PTR.

Lfd. Nr.	Jahr	Kleiner Elementenstamm	Großer Elementenstamm
1	1910	1,01830 ₂	1,01831 ₀
2	1921	1,01829 ₇	1,01830 ₀
3	1931	1,01821 ₀	1,01825 ₀

So können also bei den q -Bestimmungen — wie natürlich auch bei allen anderen Präzisionsmessungen, die an ein Weston-Normalelement anschließen — durch gelegentliche Abweichungen der einzelnen Elemente in ihrer eingepprägten Spannung vom Idealwert 1,01830 int. Volt Fehler verursacht werden. Eine weitere Fehlerquelle liegt in der Unsicherheit unserer Kenntnis über den Zahlenwert der Erdbeschleunigung, die in die Bestimmungen mit Stromwaagen eingeht. Gerade nach den neueren Untersuchungen im NBS und NPL ⁴⁾ scheint dieser Punkt wieder bemerkenswert. Allerdings besteht zwischen den in Amerika und England neubestimmten Absolutwerten für die Erdbeschleunigung auch noch eine relative Differenz von $7 \cdot 10^{-6}$. Ob und gegebenenfalls welche Fehlerquellen für diese Diskrepanzen zwischen den verschiedenen Absolutbestimmungen verantwortlich zu machen sind, muß durch erneute Absolut- und Relativmessungen entschieden werden. Im Potsdamer Geodätischen Institut ist eine Neu-

¹⁾ Weitere Meßreihen über die Konstanz der Weston-Normalelemente findet man z. B. nach Messungen im NPL bei P. Vigoureux, Nat. Phys. Lab Coll. Res. 24, 79, 173, 1938. — ²⁾ W. Jäger u. H. v. Steinwehr, ZS. f. Instrkde. 28, 327, 353, 1908. — ³⁾ Der kleine Elementenstamm stellt die von der PTR für die gemeinsamen Vergleichsmessungen zur internationalen Festlegung der eingepprägten Spannung des Weston-Normalelementes 1910 nach Washington entsandten Elemente dar. — ⁴⁾ Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) 238, 65, 1939.

bestimmung der absoluten Schwere in Angriff genommen worden, ebenso eine relative Schwereverbindung mit Washington. Aus äußeren Gründen mußten diese Arbeiten zunächst zurückgestellt werden, sodaß eine Entscheidung über den Zahlenwert der Erdbeschleunigung einer späteren Zeit vorbehalten bleibt ¹⁾.

Ob in der Bestimmung der Spulenkonstanten oder sonstiger in die q -Bestimmung eingehender Größen etwa systematische Fehler zur Zeit noch nicht restlos bekannter Natur stecken, bleibt abzuwarten. Jedenfalls haben die laufenden Arbeiten bisher noch keine befriedigende Übereinstimmung ergeben, da die einzelnen gemessenen q -Werte zum Teil um mehr als $1 \cdot 10^{-4}$ voneinander abweichen ²⁾.

Somit ist aus den letzten Untersuchungen der verschiedenen Staatsinstitute als angemessener Mittelwert für den Umrechnungsfaktor q anzugeben

$$q = 0,9999_0 \pm 0,0001.$$

Vom Comité Consultatif d'Électricité wurde in Paris im Jahre 1939 ³⁾ der Wert

$$q = 0,9999 \pm (0,0001 - 0,0002)$$

angenommen. Um die Faktoren für die Umrechnung des mittleren int. Ohm, Amp. und Volt auf die entsprechenden absoluten Einheiten mit gleichen Stellenzahlen angeben zu können, wurde dort der Zahlenwert für p von 1,00049 auf 1,0005 aufgerundet. Die entsprechenden Angaben lauteten dann

$$p = 1,0005,$$

$$q = 0,9999,$$

$$p \dot{q} = 1,0004.$$

Im Rahmen der hier beabsichtigten Untersuchungen erscheint es allerdings richtiger, von der Aufrundung des p -Wertes abzusehen — z. B. schon um nicht an Genauigkeit für die Festlegung des Wertes μ_0 für die absolute Permeabilität des Vakuums zu verlieren. Es ist aber noch zu beachten, daß die für p und q zu $\pm 0,00002$ und $\pm 0,0001$ abgeschätzten Fehlergrenzen sich auf Messungen gegenüber den mittleren internationalen

¹⁾ Die Kenntnis dieser Sachlage verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn Prof. Dr. Schmehl. — ²⁾ Herrn Prof. Dr. v. Steinwehr bin ich für die briefliche Mitteilung über den derzeitigen Stand der Untersuchungen zu besonderem Dank verpflichtet. — ³⁾ Comité Consultatif d'Électricité auprès du Comité International des Poids et Mesures, Session 1939, Procès-Verbaux, Rapport et Annexes, Paris, Gauthier-Villars, 1939, S. E 36.

Einheiten beziehen. Die einzelnen Präzisionsbestimmungen, die zur Berechnung von Zahlenwerten für die Atomkonstanten führen, sind aber an die internationalen Einheiten verschiedener Staatsinstitute angeschlossen worden. Die Abweichungen der int. Ohm-Einheiten bzw. der Widerstandsnormale der einzelnen Staatsinstitute von dem mittleren internationalen Wert liegen zwar bei nur wenigen Millionsteln; dagegen sind die Differenzen für die Werte der eingepprägten Spannung der verschiedenen Normalelemente doch um etwa eine Zehnerpotenz größer. Es erscheint daher angebracht, die Fehlergrenze für q auf $\pm 0,0001_2$ zu erhöhen. In diesem Sinne werden also die Umrechnungsfaktoren nach dem derzeitigen Stande zu schreiben sein:

$$\begin{aligned} p &= 1,00049 \pm 0,00002, \\ q &= 0,9999_0 \pm 0,0001_2, \\ pq &= 1,0003_9 \pm 0,0001_4, \\ pq^2 &= 1,0002_9 \pm 0,0002_6. \end{aligned}$$

Dabei sind bei den letzten drei Werten die Fehlergrenzen eher zu klein als zu hoch abgeschätzt worden.

Zusammenstellung der Originalveröffentlichungen.

Zu Tabelle I:

1) International Critical Tables of Numerical Data, Physics, Chemistry and Technology, Bd. I, New York, Mc. Graw-Hill Book Co., 1926, S. 18, 27. — 2) F. Henning u. W. Jäger, Handb. d. Phys., Bd. II, Berlin, Springer, 1926, S. 502; W. Jäger, ebenda, Bd. XVI, 1927, S. 58. — 3) R. T. Birge, Rev. Mod. Phys. 1, 1, 1939. — 4) F. Kohlrausch, Praktische Physik, herausgegeben von F. Henning, 17. Aufl., Leipzig, Teubner, 1935, S. 934. — 5) J. Fischer, Einführung in die klassische Elektrodynamik, Berlin, Springer, 1936, S. 174. — 6) R. T. Birge, Phys. Rev. 54, 972, 1938. — 7) H. T. Wensel, Bur. of Stand. Journ. of Res. 22, 375, 1939. — 8) F. G. Dunnington, Rev. Mod. Phys. 11, 65, 1939. — 9) Deutsche Normen, DIN-Normblatt 1348, Berlin, Beuth-Verlag, 1941, S. 2.

Zu Tabelle II:

1) F. E. Smith, Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) 214, 27, 1914; Nat. Phys. Lab. Coll. Res. 11, 209, 1914. — 2) E. Grüneisen u. E. Giebe, Ann. d. Phys. (IV) 63, 179, 1920. — 3) G. Zickner, Comité International des Poids et Mesures, Procès-Verbaux des Séances, Série 2^{de}, 17, 197, 215, 1935. — 4) Ebenda 17, 196, 253, 1935. — 5) Nat. Phys. Lab. Ann. Rep. for 1934, S. 58, 1935; Comité International des Poids et Mesures, Procès-Verbaux des Séances, Série 2^{de}, 17, 196, 253, 1935. — 6) H. L. Curtis, Ch. Moon u. C. M. Sparks, Comité International des Poids et Mesures, Procès-Verbaux des Séances, Série 2^{de}, 17, 222, 1935; Bur. of Stand. Journ. of Res. 16, 1, 1936. — 7) L. Hartshorne u. N. F. Astbury, Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) 236, 423, 1937; Comité International des Poids et Mesures, Procès-Verbaux des Séances, Série 2^{de}, 18, 162, 1937. — 8) P. Vigoureux, Nat. Phys. Lab. Coll. Res. 24, 277, 1938; Comité International des Poids et Mesures, Procès-Verbaux des Séances, Série 2^{de},

18, 160, 1937. — 9) R. Yoneda, Comité International des Poids et Mesures, Procès-Verbaux des Séances, Série 2^{de}, 18, 178, 1937; Res. Electrotechn. Lab. Minist. Comm. Tokio 1940, Nr. 436. — 10) H. L. Curtis, Ch. Moon u. C. M. Sparks, Bur. of Stand. Journ. of Res. 21, 375, 1938. — 11) R. Jouaust, M. Picard u. R. Hérou, C. R. 206, 1797, 1938; Bull. Soc. Franc. Electr. (V) 8, 587, 1938. — 12) H. L. Curtis, Ch. Moon u. C. M. Sparks, Comité Consultatif d'Électricité auprès du Comité International des Poids et Mesures, Session 1939, Procès-Verbaux des Séances, Rapport et Annexes, Paris, Gauthier-Villars, 1939, S. E 43; siehe auch bei L. J. Briggs, Rev. Mod. Phys. 11, 117, 1939. — 13) F. Wenner, J. L. Thomas, I. L. Cooter u. F. R. Kotter, Comité Consultatif d'Électricité auprès du Comité International des Poids et Mesures, Session 1939, Procès-Verbaux des Séances, Rapport et Annexes, Paris, Gauthier-Villars, 1939, S. E 48; siehe auch bei L. J. Briggs, Rev. Mod. Phys. 11, 117, 1939. — 14) G. Zickner, Comité Consultatif d'Électricité auprès du Comité International des Poids et Mesures, Session 1939, Procès-Verbaux des Séances, Rapport et Annexes, Paris, Gauthier-Villars, 1939, S. E 41. — 15) R. Jouaust, M. Picard u. R. Hérou, Comité Consultatif d'Électricité auprès du Comité International des Poids et Mesures, Session 1939, Procès-Verbaux des Séances, Rapport et Annexes, Paris, Gauthier-Villars, 1939, S. E 49.

Zu Tabelle III:

1) W. E. Ayrton, T. Mather u. F. E. Smith, Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) 207, 463, 1908; Nat. Phys. Lab. Coll. Res. 4, 1, 1908; siehe hierzu auch E. B. Rosa, N. E. Dorsey u. J. M. Miller, Bur. of Stand. Bull. 8, 274, 1912. — 2a) E. B. Rosa, N. E. Dorsey u. J. M. Miller, Bur. of Stand. Bull. 8, 269, 1912. — 2b) Siehe 2a und E. B. Rosa, G. W. Vinal u. A. S. Mc Daniel, ebenda 10, 475, 1914. — 2c) Siehe 2a und H. L. Curtis u. R. W. Curtis, Bur. of Stand. Journ. of Res. 12, 733, 1934. — 3) H. L. Curtis u. R. W. Curtis, ebenda 12, 665, 1934; Comité International des Poids et Mesures, Procès-Verbaux des Séances, Série 2^{de}, 17, 238, 1935. — 4) G. Dupouy u. R. Jouaust, Journ. de phys. et le Radium 6, 123, 1935; 7, 171 S, 1936. — 5) P. Vigoureux, Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) 236, 133, 1937; Comité International des Poids et Mesures, Procès-Verbaux des Séances, Série 2^{de}, 18, 165, 1937; Nat. Phys. Lab. Coll. Res. 24, 173, 1938. — 6) H. L. Curtis, R. W. Curtis u. Ch. L. Critchfield, Comité International des Poids et Mesures, Procès-Verbaux des Séances, Série 2^{de}, 18, 149, 1937. — 7) R. Yoneda u. Y. Ishibashi, ebenda 18, 185, 1937. — 8) H. v. Steinwehr, Comité Consultatif d'Électricité auprès du Comité International des Poids et Mesures, Session 1939, Procès-Verbaux des Séances, Rapport et Annexes, Paris, Gauthier-Villars, 1939, S. E 51. — 9a) u. 9b) H. L. Curtis, R. W. Curtis u. Ch. L. Critchfield, Bur. of Stand. Journ. of Res. 22, 485, 1939; Comité Consultatif d'Électricité auprès du Comité International des Poids et Mesures, Session 1939, Procès-Verbaux des Séances, Rapport et Annexes, Paris, Gauthier-Villars, 1939, S. E 56; siehe auch bei L. J. Briggs, Rev. Mod. Phys. 11, 118, 1939.

Zu Tabelle IV:

1) H. v. Steinwehr, ZS. f. Instrkde. 33, 353, 1913. — 2) H. v. Steinwehr u. A. Schulze, ebenda 42, 221, 1922. — 3) H. v. Steinwehr u. A. Schulze, ebenda 52, 249, 1932.

Braunschweig, Physikal. Inst. der Techn. Hochschule, im August 1942.

(Mitteilung aus dem Stromrichterwerk der SSW.)

Die positive Säule mit gekrümmter Entladungsbahn.

Von Th. Wasserrab, Berlin.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 8. Januar 1943.)

Für eine zwischen gekrümmten Begrenzungsflächen brennende Niederdruckgasentladung wird die Träger- und Stromdichteverteilung ermittelt. Um die mathematische Darstellung möglichst einfach und übersichtlich zu gestalten, werden die Begrenzungsflächen als unendlich lange, konaxiale Kreiszylinderflächen angenommen. Die Berechnung ergibt in Übereinstimmung mit der Erfahrung, daß mit zunehmender Krümmung der Grenzflächen eine Annäherung der Entladung an die „innere“ Wandung, d. h. jene mit dem kleineren Krümmungsradius, erfolgt.

Schottky¹⁾ hat mit Hilfe seiner Diffusionstheorie die Beschreibung der unendlich langen, geraden, zylindrischen Säule einer Niederdruckbogenentladung gegeben. Diese Theorie ist von Spenke und Steenbeck²⁾ auf beliebige Querschnittsformen gerader, unendlich langer Säulen erweitert worden. In jedem Falle wird der örtliche Verlauf der Trägerdichte N als Eigenwertproblem gelöst, dessen Ergebnisse für viele Fälle bereits in leicht auswertbarer Form vorliegen, da die Schottkysche Diffusionstheorie der positiven Säule auf dieselbe Differentialgleichung führt, wie sie sich für den Amplitudenverlauf einer transversalschwingenden Membran ergibt.

In der folgenden Darstellung wird nun der Verlauf der Trägerdichte ermittelt für den Fall, daß es sich um eine Entladung mit gekrümmter Entladungsbahn handelt. Praktisch treten die zu untersuchenden Verhältnisse in vielen technischen Entladungsgefäßen auf, in besonders krasser Weise dort, wo eine Entladung um eine scharfe Kante einer begrenzenden Fläche herumbrennen muß. Für die folgende Erörterung des Entladungsvorganges wird man jedoch zweckmäßig möglichst einfache Verhältnisse voraussetzen und von der Betrachtung eines Modellgefäßes, Fig. 1, ausgehen, welches außer den beiden Elektroden Anode A und Kathode K im wesentlichen aus einem kreiszylindrischen Glasrohr besteht, dessen üblicherweise gerade Längsachse im vorliegenden Fall zumindest in einem gewissen Teil ihrer Gesamterstreckung kreisförmig gebogen sei. Von den kleinen Bereichen in

¹⁾ W. Schottky, Phys. ZS. 25, 342, 635, 1924. — ²⁾ E. Spenke u. M. Steenbeck, Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Werken 15/2, 18, 1936.

unmittelbarer Umgebung der beiden Elektroden abgesehen, wird man es dann mit einer positiven Säule zu tun haben, deren örtlicher Träger- und Stromdichteverlauf im wesentlichen durch die Form der Wandung mitbestimmt wird. Jedoch selbst bei dieser einfachen Gefäßform begegnet eine mathematische Behandlung dieses Problems noch zu großen Schwierigkeiten, so daß zweckmäßigerweise noch weiter vereinfacht und angenommen wird, daß die Entladung nicht von einem zylindrischen, isolierenden Rohr,

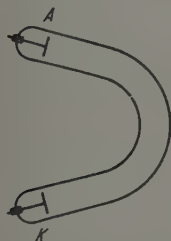


Fig. 1. Das Modellentladungsgefäß.

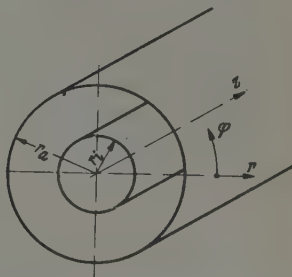


Fig. 2. Darstellung zweier konzentrischer Zylinderflächen, die als Wandungen einer elektrodenlosen Ringentladung gelten.

sondern von zwei parallelen, in einer Richtung unendlich langen, gleichfalls isolierenden Flächen begrenzt wird. Ein Längsschnitt durch das Entladungsgefäß der Fig. 1 ergibt dann gleichzeitig die Projektion der beiden parallelen Zylinderflächen. Indem weiterhin nur derjenige Teil der Entladung in Fig. 1 betrachtet wird, wo die Entladungsachse gekrümmt ist, kann man das Problem noch dadurch verallgemeinern, daß man die anschließenden, nicht gekrümmten Teile des Entladungsgefäßes sich fortdenkt und sie durch ein weiteres, gleichfalls gekrümmtes Stück ersetzt, wodurch die Entladung in sich geschlossen, elektrodenlos und in jedem Querschnitt gleichartig wird. Damit ist nun der entscheidende Schritt getan, der eine einfache mathematische Behandlung ermöglicht. In Fig. 2 sind die beiden konzentrischen Zylinderflächen, die als Begrenzungen der elektrodenlosen Ringentladung gelten, dargestellt. Sie sind in Richtung der z -Achse als unendlich lang angenommen. Die Entladung brennt in Richtung des wachsenden Winkels φ kreisförmig um den inneren Zylinder herum. Das Problem besitzt nunmehr *eine* Veränderliche, nämlich den Radius r , da Homogenität in φ und z vorausgesetzt wird. Die Differentialgleichung für den Trägerdichteverlauf

$$\Delta N + \frac{1}{D_a \tau} N = 0$$

(D_a = Koeffizient der ambipolaren Diffusion, τ = Trägerlebensdauer) lautet in ebenen Polarkoordinaten (mit $\frac{1}{D_a \tau} = k^2$)

$$\frac{d^2 N}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dN}{dr} + k^2 N = 0.$$

Die Lösung dieser Schwingungsgleichung für den Fall einer Kreisringmembran ist für die vorliegende Besselsche Differentialgleichung bekannt und lautet:

$$N = A J_0(kr) + B Y_0(kr),$$

wobei $J_0(kr)$ und $Y_0(kr)$ Besselsche Funktionen erster und zweiter Art nullter Ordnung darstellen.

Die Randbedingungen

$$(N)_{r=r_i} = 0: A J_0(kr_i) + B Y_0(kr_i) = 0,$$

$$(N)_{r=r_a} = 0: A J_0'(kr_a) + B Y_0'(kr_a) = 0$$

liefern für den Parameter k die transzendente Gleichung

$$J_0'(kr_i) Y_0(kr_a) - J_0(kr_a) Y_0'(kr_i) = 0,$$

deren Diskussion von Reinstein¹⁾ durchgeführt wurde. Eine Auswertung für verschiedene Außen- zu Innenhalbmesser r_a/r_i ergibt einen relativen Verlauf der Trägerdichte, der in Fig. 3 dargestellt ist und erkennen läßt, daß man für $r_a/r_i \approx 1$ den bekannten sinusförmigen Verlauf für planparallele, unendlich lange Ebenen als Grenzfall erhält²⁾. Für $r_a/r_i \rightarrow \infty$ wird der Trägerdichteverlauf zwischen den beiden Begrenzungsflächen unsymmetrisch und der Höchstwert nach der inneren Fläche zu verlagert.

Aus Symmetriegründen wird man für die Längsfeldstärke E einer derartigen Entladung

$$E \sim \frac{1}{r} \quad E \neq f(\varphi)$$

schreiben können, womit der Verlauf der Stromdichte j ermittelt werden kann (b_- = Elektronenbeweglichkeit):

$$j \approx e N b_- E.$$

¹⁾ E. Reinstein, Untersuchungen über die Transversalschwingungen der gleichförmig gespannten, elliptisch oder kreisförmig begrenzten Vollmembran und Kreisringmembran sowie von Vollkreis- und Kreisringmembranen mit nach speziellen Gesetzen variierten ungleichförmiger Spannung. Diss. Univ. Göttingen 1911. — ²⁾ M. Steenbeck in Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik Bd. 4 (3), S. 419, 1933.

Die Darstellung in Fig. 4 zeigt, daß für $r_a/r_i \gg 1$ die Entladung sehr stark an die innere Wandung gedrängt wird; dies hat eine starke Erwärmung dieser Fläche und eine Vergrößerung der Längsfeldstärke zur Folge. Die

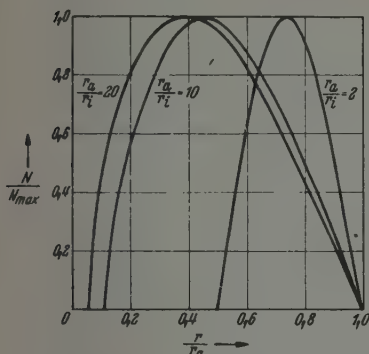


Fig. 3.

Trägerdichteverteilung einer zwischen zwei unendlich langen, konzentrischen Zylinderflächen brennenden, elektrodenlosen Ringentladung.

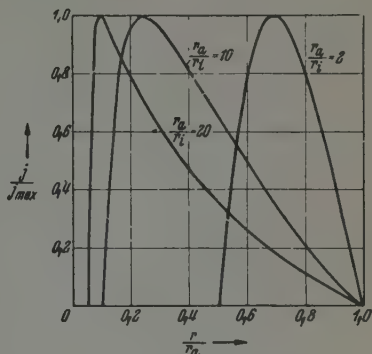


Fig. 4.

Stromdichteverlauf einer zwischen zwei unendlich langen, konzentrischen Zylinderflächen brennenden elektrodenlosen Ringentladung.

Entladung verhält sich also so, als ob ihr zwar ein kürzerer Weg [kürzer als die Symmetrale: $(r_a + r_i)/2$], aber auch nur ein engerer Querschnitt zur Verfügung stünde.

Abschließend sei noch bemerkt, daß sich die in Fig. 3 dargestellte Trägerdichteverteilung auch in einer unendlich langen, *geraden*, positiven Säule mit Kreisringquerschnitt einstellen wird, wenn die Entladung in Richtung der z -Achse brennt. Da in diesem Falle die Längsfeldstärke einen konstanten Wert über den Entladungsquerschnitt besitzt, so ist damit auch bereits die Stromdichteverteilung ($j \sim N$) bekannt.

Gibt es Wirbelreibung? II.

Entgegnung zu den Einwänden von E. Mohr.

Von E. Fues in Breslau.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 17. November 1942.)

Die von Mohr angeführten „weiteren Gründe“ für einen unsymmetrischen Spannungstensor in Flüssigkeiten werden widerlegt.

Herr E. Mohr hat¹⁾ auf Teil I meiner Arbeit²⁾ einige Fragen bzw. Bemerkungen eingewendet, die trotz der dort angestellten gaskinetischen Überlegungen die Frage nach der Symmetrie des Reibungsspannungstensors in Flüssigkeiten und Gasen als noch unentschieden hinstellen sollen. Sie werden im folgenden — wiederum vorwiegend im Rahmen gaskinetischer Schlußweise — widerlegt.

1. Herr Mohr hält (S. 576 oben) die in Teil 5 meiner Arbeit gegebene Betrachtung der „starren“ Drehströmung für „(im großen ganzen) richtig, jedoch in einem Punkt nicht ganz zu Ende geführt, indem sie wohl die richtige Auswahl der Moleküle hinsichtlich der Richtung trifft, aber außer acht läßt, daß die in seiner Fig. 2c von A bzw. A' durch den Schnitt $S-S$ tretenden Moleküle mit verschiedenen Geschwindigkeiten dort ankommen.“ Diesem wörtlich zitierten Satz folgt eine Erörterung, aus der hervorgeht, daß der Ausdruck „mit verschiedenen Geschwindigkeiten“ soviel wie „mit veränderten Geschwindigkeiten“ bedeutet. Dies wird auch durch die Fig. 1 bei Mohr mit (falschen) zusätzlichen Geschwindigkeitspfeilen belegt. Nun ist die von mir a. a. O. gegebene Überlegung vom Standpunkt des mit dem Gefäß rotierenden Systems aus durchgeführt. Infolgedessen ist der Flug der Moleküle als unter dem Einfluß von Zentrifugal- und Corioliskraft stehend angenommen, von denen die erste aus Symmetriegründen zur fraglichen Reibungsspannung nichts beiträgt. Die *ganze* Änderung der Geschwindigkeit infolge der Corioliskraft ist jedoch in der Krümmung der Bahnen berücksichtigt. Es ist nicht einzusehen, woher das Molekül außerdem noch eine zusätzliche Geschwindigkeit erwerben soll, da andere Scheinkräfte als die beiden genannten bei gleichförmiger Rotation des Bezugssystems nicht auftreten.

2. Herr Mohr fragt (S. 576 unten) nach dem Experiment, welches eindeutung zugunsten der Symmetrie entschieden hat. Dazu ist zu sagen:

¹⁾ ZS. f. Phys. 119, 575, 1942. — ²⁾ Ebenda 118, 409, 1941.

Reibung jeder Art ist (wie jeder irreversible Prozeß) ein Ausgleichsvorgang, der speziell den Ausgleich benachbarter Geschwindigkeiten erstrebt. (Der angestrebte Endzustand ist dabei eine reibungslose, nach hergebrachter Meinung „starre“ Bewegung; sei es, bei gerader Bahn, einfache Translation, oder bei gekrümmter Bahn, der Teil einer starren Rotation). Jeder Ausgleichsvorgang verzehrt sich nämlich mit erfolgtem Ausgleich, falls er nicht durch besondere Vorrichtung aufrechterhalten wird; Elektrizitäts- und Wärmeleitung sind dafür gute Beispiele. Daher kann sich eine reibende Strömungsform als Dauerzustand nur halten z. B. zwischen gegeneinander bewegten Wänden, an denen dauernd Schubarbeit geleistet wird. In einem sich selbst überlassenen rotierenden Gefäß fehlen beide Voraussetzungen; der Endzustand der in ihm herrschenden Strömung muß daher der *reibungs-freie* Zustand sein. Soweit stimmt Herr Mohr wohl mit mir überein.

Man kann nun sehr leicht an der Gestalt der Oberfläche der in einem rotierenden Gefäß befindlichen Flüssigkeit entscheiden, welches Strömungsfeld in ihr herrscht. Bei starrer Rotation entsteht das nach oben konkave Paraboloid, bei wirbelfreier Zirkulationsströmung ein Wirbeltrichter über der Drehachse, bei Strömungsruhe der ebene Flüssigkeitsspiegel usf. Der tatsächliche Vorgang in einem sich selbst überlassenen, auf einer gelagerten Achse rotierenden Gefäß ist nun bekanntlich der, daß einerlei mit welcher Anfangsströmung der Versuch begonnen wird, sich infolge der Flüssigkeitsreibung *sehr bald* die paraboloidische Gestalt der Oberfläche, also die starre Rotationsströmung herstellt. *Das beweist schon einwandfrei, daß die Flüssigkeitsreibung jedenfalls zum allergrößten Teil Verzerrungsreibung und nicht Wirbelreibung ist.* Nach längerer Versuchsdauer allerdings wird ohne äußere Arbeit das Gefäß zur Ruhe kommen und der Flüssigkeitsspiegel sich ebnen. Man kann nun die Frage erheben, ob bei diesem zweiten langsamen asymptotischen Prozeß neben der sicher wirksamen Lagerreibung auch noch die innere Reibung des Gefäßinhalts im Sinne von Mohr eine Rolle spielt. Wäre sie zu bejahen, so bedeutete das eine schwache Beteiligung von Wirbelreibung. Diese müßte sich dann aber auch schon vorher durch Abweichung von der Paraboloidgestalt und andeutungsweise Ausbildung eines Wirbeltrichters über der Drehachse bemerkbar gemacht haben, auch müßte die Abbremsung der Rotation bei flüssigem Gefäßinhalt rascher vor sich gehen, als wenn das Gefäß mit einem starren Körper gleicher Masse und Drehmasse belastet wird. Präzisionsversuche in dieser Richtung sind vermutlich noch nicht gemacht. Doch liegt dazu kaum ein Anlaß vor, denn die Folgerungen aus der vermuteten Beteiligung von Wirbelreibung wären so merkwürdig daß erst *experimentelle* Gründe und nicht ein bloßer Einfall zwingen könnten,

ihnen näher zu treten. Das durch innere Reibung der makroskopischen Beobachtung entzogene Impulsmoment müßte sich nämlich in der Wärmebewegung des Gefäßinhalts aufgespeichert finden. D.h. in ihr müßten Korrelationen zwischen Geschwindigkeiten und Orten der Gasmoleküle von einer Art bestehen, wie man sie niemals in Betracht zu ziehen veranlaßt war. Die Merkwürdigkeit einer solchen Vorstellung wird sofort noch deutlicher werden.

3. Herr Mohr fragt nämlich: „Warum soll Wärmebewegung immer völlig ungeordnet sein?“ und führt als Gegenbeispiel die partielle Ordnung der Geschwindigkeitsverteilung durch ein überlagertes makroskopisches Strömungsfeld an. Darauf ist zu antworten: Freilich kann für eine anisotrope Umgebung, z. B. ein inhomogenes Strömungsfeld, keine völlige Unordnung bzw. Isotropie der Geschwindigkeitsverteilung behauptet werden — jede Abweichung von der Maxwell-Verteilung bedeutet ja eine partielle Ordnung. Aber *der* Endzustand des ruhenden Gefäßinhalts, welcher nach Mohr das anfängliche Impulsmoment des Systems zum Teil durch innere Reibung verschluckt enthält, wäre ein Zustand, der sich in nichts als in der Vorgeschichte vom Zustand eines gleichartigen früher nicht rotierten Gefäßes gleicher Temperatur unterscheidet. *Die Mohrsche Annahme läuft darauf hinaus, anzunehmen, daß die verschiedenartige makroskopische Vorgeschichte in verschiedenen Wärmebewegungen aufbewahrt bliebe, und zwar dauernd, denn es ist nicht einzusehen (und widerspräche wohl auch dem zweiten Hauptsatz), wie das Impulsmoment der Wärmebewegung jemals wieder in makroskopisches Impulsmoment zurückverwandelt werden sollte.*

Der Verfasser hält es nicht für eine dogmatische Einstellung, sondern für eine durchaus berechtigte Denkökonomie, wenn derartige Abänderungen unserer Grundanschauungen erst auf Grund zwingender *experimenteller* Sachverhalte in Betracht gezogen werden. Diese liegen aber keineswegs vor.

4. Herr Mohr wundert sich, daß bei der von mir wiederholten Begründung der Reibungsspannung aus Korrelationen der Nebenbewegung eine von der Maxwell'schen abweichende anisotrope Geschwindigkeitsverteilung benutzt wurde. Er beruft sich auf eine von Boltzmann gegebene, im Lehrbuch von Schaefer (Bd. II, 2. Aufl., S. 416ff.) dargestellte Herleitung des Zähigkeitsmaßes, welche in erster Näherung Maxwell'sche, also isotrope Geschwindigkeitsverteilung vorauszusetzen scheint. Man muß sich ein wenig in die betreffende Überlegung hineindenken, um zu sehen, daß tatsächlich *kein* Widerspruch vorliegt. Wir versetzen uns zu diesem Zweck in eine Strömung des Profils Fig. 1 am Ort O . Ob man nun sagt, auf ein Flächenelement df bei O fallen aus allen Richtungen gleichmäßig

Moleküle ein (dünne Pfeile), die in einem Abstand λ zum letztenmal zum Stoß gekommen sind und die dort herrschende geordnete Strömungsgeschwindigkeit (dicke Zusatzpfeile) mitbringen, so daß sie als volle Geschwindigkeit ihrer Nebenbewegung in $\mathbf{0}$ jeweils die Resultierende besitzen, oder ob man von vornherein die anisotrope Verteilung der Fig. 2 für sie ansetzt, ist für unser Problem dasselbe. (Denn auf die in Fig. 1 mit der Richtung variierende Abänderung des Geschwindigkeitsbetrages kommt es solange nicht an, als nur ein mittlerer Betrag in Betracht gezogen wird.)

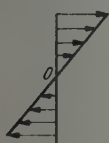


Fig. 1.

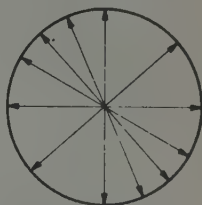


Fig. 2.

Die in der Boltzmannschen Transportrechnung vorausgesetzte Geschwindigkeitsverteilung ist also tatsächlich *keine* isotrope, wenn die transportierte Größe selbst die Geschwindigkeit (oder der Impuls) eines inhomogenen makroskopischen Strömungsfeldes ist.

5. Herr Mohr berechnet (S. 578) mit Hilfe der Boltzmannschen Transportbetrachtung den Schub auf ein zur Strömungsrichtung der Couette-Strömung senkrechtes Flächenelement $d\sigma_2$ zu Null und weist darauf hin, daß dies im Widerspruch zu einem symmetrischen Spannungstensor steht. Allerdings bestünde ein Widerspruch, wenn Mohrs Rechnung richtig wäre. Sie ist aber falsch, denn (um in seinen Worten zu bleiben) das, was transportiert, ist $u + x$, und nicht x ¹⁾. Die Ergebnisse a_2 und b_2 sind daher, wenn man richtig rechnet, identisch mit a_1 und b_1 und die Spannungskomponenten kommen symmetrisch heraus. Infolgedessen klappt auch in den Boltzmannschen Überlegungen nicht die von Mohr bedauerte Lücke.

6. Herr Mohr glaubt, daß es zur Entscheidung der Frage nach der Symmetrie des Spannungstensors nicht der Heranziehung einer so kom-

¹⁾ Zusatz bei der Korrektur: Zwar wird man wie in Fig. 1 den sekundlichen Impulstransport durch ein mit der Hauptströmung mitbewegtes Flächenelement df zu betrachten haben. Derselbe hängt aber, wie die gleiche Figur zeigt, vom Gefälle von u ab und zwar einerlei, ob df senkrecht zur y -Achse liegt ($d\sigma_1$) oder zur x -Achse ($d\sigma_2$).

plizierten Gleichung wie der Boltzmannschen Transportgleichung bedürfe. Dazu ist zu sagen, daß die von mir herangezogene Gleichung nicht umsonst Boltzmannsche *Fundamentalgleichung* genannt wird. Sie ist zwar als Integro-Differentialgleichung für den praktischen Gebrauch kompliziert und verlangt zu ihrer Auflösung in anisotropen Fällen eine Näherungsmethode. Die Kompliziertheit ist aber nicht eine solche des Gedankeninhalts, im Gegenteil ist dieser denkbar einfach und durchsichtig, sondern in ihr spiegelt sich lediglich das vielfältige Geschehen der Wärmebewegung mit ihren vielen Freiheitsgraden. Gerade zur Entscheidung allgemeiner Fragen, wie derjenigen nach der Symmetrie, scheint dieser gedanklich einfachste und strenge Ausdruck der kinetischen Theorie ganz besonders geeignet. Um so mehr, als es gar nicht darauf ankommt, die Fundamentalgleichung zu lösen, sondern nur gewisse allgemeine Eigenschaften ihrer Lösungen herauszuschälen.

Ich halte daher meine negative Antwort auf die Frage: Gibt es Wirbelreibung? solange voll und ganz aufrecht, als nicht berechnete Einwände gegen die benutzte gaskinetische Schlußweise vorgebracht werden.

Breslau, Institut für theoretische Physik.

Über das Quadrupolmoment des Atomkerns $^{181}_{73}\text{Ta}$.

Von Theodor Schmidt in Greifswald.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 14. Dezember 1942.)

Aus Messungen der Hyperfeinstruktur der Terme $5d^3 6s^2$, $^4F_{3/2, 5/2, 7/2}$, $^4P_{3/2}$ des Ta I-Spektrums wird das Quadrupolmoment des $^{181}_{73}\text{Ta}$ -Kerns zu etwa $+6 \cdot 10^{-24}$ abgeschätzt.

Die Bestimmung der Quadrupolmomente möglichst vieler Kerne bietet für viele Fragen der Kernstruktur, insbesondere der genaueren Erforschung der Kerngrundzustände ein erhebliches Interesse. Leider ist die bekannte Rabi'sche Resonanzmethode, die für die magnetischen Kernmomente Präzisionswerte liefert, zur Bestimmung der Quadrupolmomente nicht geeignet. Man ist daher zur Ermittlung von Quadrupolmomenten nach wie vor auf die Hyperfeinstrukturmethode angewiesen, d. h. auf die Untersuchung der Wechselwirkung des Kerns mit dem Elektronengebäude. Die so bestimmbaren Werte der Quadrupolmomente besitzen daher nur eine geringe Genauigkeit, ermöglichen aber dennoch bereits gewisse Schlüsse über den Kernbau ¹⁾.

Die Hyperfeinstruktur des Tantalspektrums ist bereits durch Gisolf und Zeeman ²⁾ sowie durch Mc Millan und Grace ³⁾ untersucht worden, die den Kernspin zu $i = 7/2$ bestimmten. Mc Millan und Grace stellten unter Benutzung der von Kiess und Kiess ⁴⁾ gegebenen Termanalyse des Ta I-Spektrums bei dem einen der von ihnen untersuchten Terme Abweichungen von der Intervallregel fest. Damals konnte jedoch hierfür keine brauchbare Erklärung gegeben werden. Die naheliegende Vermutung, daß es sich um die Wirkung eines Quadrupolmomentes handelt, wird durch die vorliegende Untersuchung bestätigt.

Das Tantalspektrum ⁵⁾ baut sich auf den Elektronenkonfigurationen $5d^3 6s^2$, $5d^4 6s$, $5d^3 6s 6p$, $5d^4 6p$ usw. auf. Im allgemeinen ist die Wechselwirkung zwischen den Konfigurationen so stark, daß eine Berechnung der Eigenfunktionen aussichtslos erscheint. Nur bei dem Grundterm und den unmittelbar über ihm liegenden Termen der Konfiguration $5d^3 6s^2$ läßt sich

¹⁾ Th. Schmidt, ZS. f. Phys. **106**, 358, 1937; Naturwiss. **28**, 565, 1940. —

²⁾ J. H. Gisolf u. P. Zeeman, Nature **132**, 566, 1933. — ³⁾ E. Mc Millan u. N. S. Grace, Phys. Rev. **44**, 949, 1933. — ⁴⁾ C. C. Kiess u. H. K. Kiess, Bur. Stand. Journ. Res. **11**, 277, 1933. — ⁵⁾ C. C. Kiess u. H. K. Kiess, Bur. Stand. Journ. Res. **11**, 277, 1933; C. C. Kiess u. E. Z. Stowell, ebenda **12**, 459, 1934.

erwarten, daß Eigenfunktionen, die unter der Annahme von Russel-Saunders-Kopplung errechnet sind, zu größenordnungsmäßig richtigen Ergebnissen

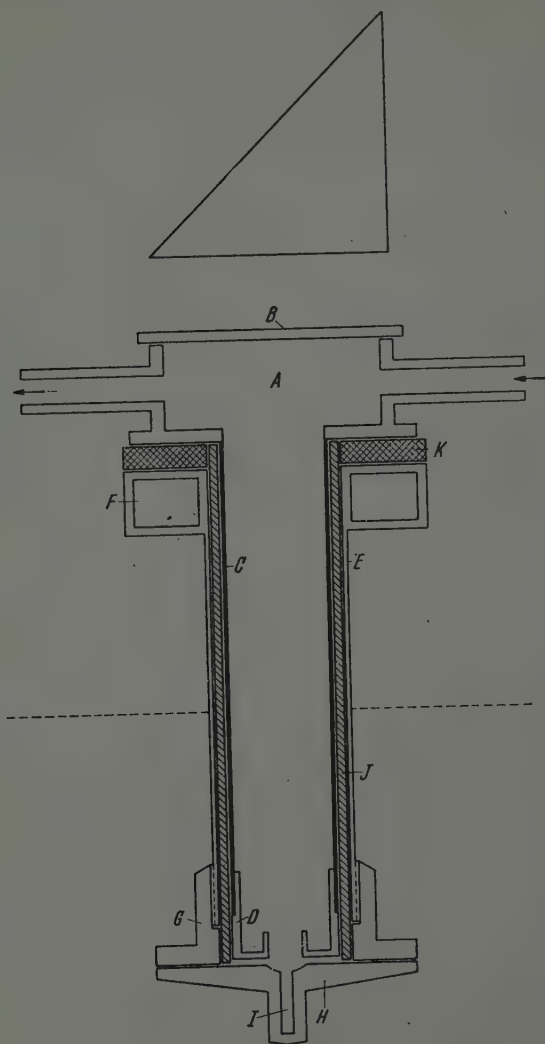


Fig. 1.

führen werden. Eine Bestätigung hierfür wird man darin erblicken, daß die aus verschiedenen Termen errechneten Werte für das Quadrupolmoment einigermaßen übereinstimmen.

Die Erzeugung der Spektrallinien geschah in einer mit Wasser oder flüssiger Luft gekühlten Schüler-Hohlkathodenentladung. Die benutzte Entladungsröhre hat sich bei dieser und einigen anderen Untersuchungen gut bewährt und sei deshalb an Hand von Fig. 1 kurz beschrieben¹⁾.

Der Anodenteil besteht aus einer Kammer *A*, die oben durch eine aufgekittete Glas- oder Quarzplatte *B* verschlossen ist und seitlich die Zu- und Ableitung für den üblichen Gasreinigungskreislauf besitzt. Nach unten setzt sich *A* in eine dünne Röhre *C* fort, in die der Einsatz *D* federnd eingepaßt ist.

Der Kathodenteil besteht aus einem Neusilberrohr *E*, das oben mit einem Wassermantel *F* versehen ist. Bei Kühlung der Entladung mit flüssiger Luft schützt *F* den oberen Teil der Röhre vor Abkühlung. Auf *E* ist unten das Aluminiumstück *G* aufgeschraubt, dessen untere Fläche plangeschliffen ist. Hierauf paßt die auswechselbare eigentliche Kathode *H* aus Aluminium mit der Hohlkathodenöffnung *I*. Auf der Wandung von *I* wird die zu untersuchende Substanz entweder in Blechform oder als dünne Schicht von Oxyd oder dergleichen aufgebracht. Anode und Kathode sind durch das Glasrohr *J* und den Hartgummiring *K* voneinander isoliert. Der letztere ist ebenso wie die zugehörigen Flächen von *A* und *F* plangeschliffen. Die Dichtung aller Planschliffe und des Gewindes zwischen *E* und *G* erfolgt durch Apiezonfett. Der Abstand zwischen *D* und *H* wird auf 0,5 bis 1 mm eingestellt, so daß die Entladung nicht in den Zwischenraum dringen kann. Im Betrieb wird die Kathode durch den äußeren Luftdruck an der Anode festgehalten. Die Röhre taucht etwa bis zur Hälfte in das Kühlmittel ein. Bei Kühlung mit flüssiger Luft darf die Abkühlung nicht zu rasch geschehen, da sonst die Fettdichtung zwischen *G* und *H* undicht wird.

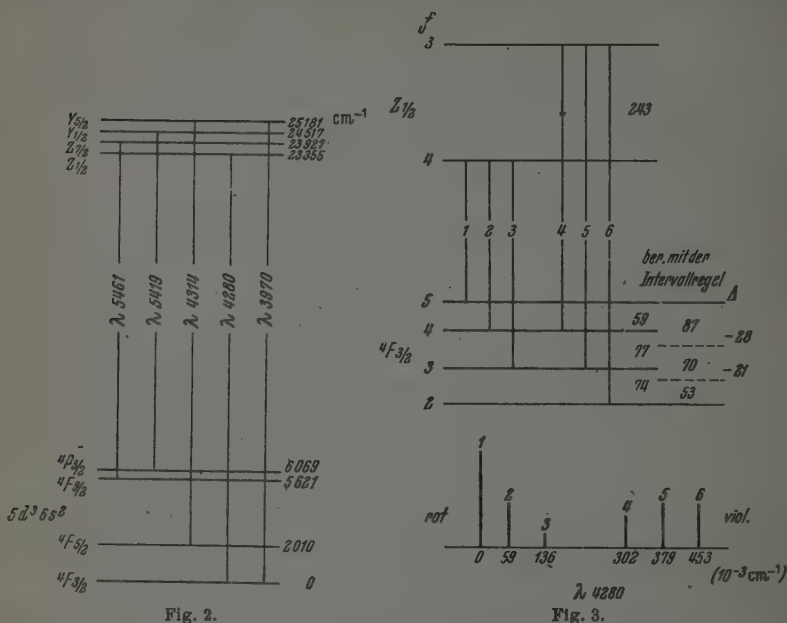
Gegenüber einer früher beschriebenen Glimmentladungsröhre²⁾ besitzt die Röhre einige Vorteile. Die Kühlung der Hohlkathode, auf die es in erster Linie ankommt, ist sehr wirksam. Die Röhre ist rasch auseinandernehmbar und es können Hohlkathoden der verschiedensten Größe und Form verwandt werden. Die vereinfachte Führung des Gasstromes hat sich als völlig ausreichend erwiesen.

Zur Erzeugung der Tantallinien wurde als Trägergas der Entladung Argon von einigen mm Hg Druck benutzt. Die Untersuchung der Linien geschah durch ein Fabry-Perot-Interferometer, das sich im parallelen Strahlengang eines Dreiprismenspektrographen befand.

¹⁾ Die Entladungsröhre sowie eine Reihe anderer Hilfsapparate wurden von Herrn Mechanikermeister Schulze in bewährter Sorgfalt hergestellt. —

²⁾ H. Schüler u. Th. Schmidt, ZS. f. Phys. 96, 485, 1935.

In Fig. 2 sind die zur Bestimmung von q herangezogenen tiefen Terme sowie die untersuchten Linien angegeben. Die Fig. 3 bis 6 zeigen die Struk-



turen und Niveauschemata der Linien λ 4280, 3970, 4314 und 5419. Die Energieniveaus der einzelnen Terme werden durch die quadratische Formel

$$E = a_0 + \frac{a}{2} C + b C (C + 1)$$

mit

$$C = f(f + 1) - i(i + 1) - j(j + 1)$$

dargestellt, wo a und b die Kopplungskonstanten für das magnetische Dipol- bzw. elektrische Quadrupolmoment sind. Tabelle 1 enthält die gefundenen Werte für die uns interessierenden unteren Terme in Einheiten 10^{-3} cm^{-1} .

Tabelle 1.

Term	a	b
$5d^3 6s^2 \ ^4F_{3/2}$	16,7	- 0,20
$\ ^4F_{5/2}$	10,4	- 0,06
$\ ^4F_{7/2}$	8,6	\sim - 0,01
$\ ^4P_{3/2}$	12,4	- 0,28

In den Figuren sind in der üblichen Weise rechts neben den gemessenen Lagen der Hyperfeinstruktur-niveaus die Niveaulagen gezeichnet, die sich bei Gültigkeit der Intervallregel ($b = 0$) und gleicher Gesamtaufspaltung

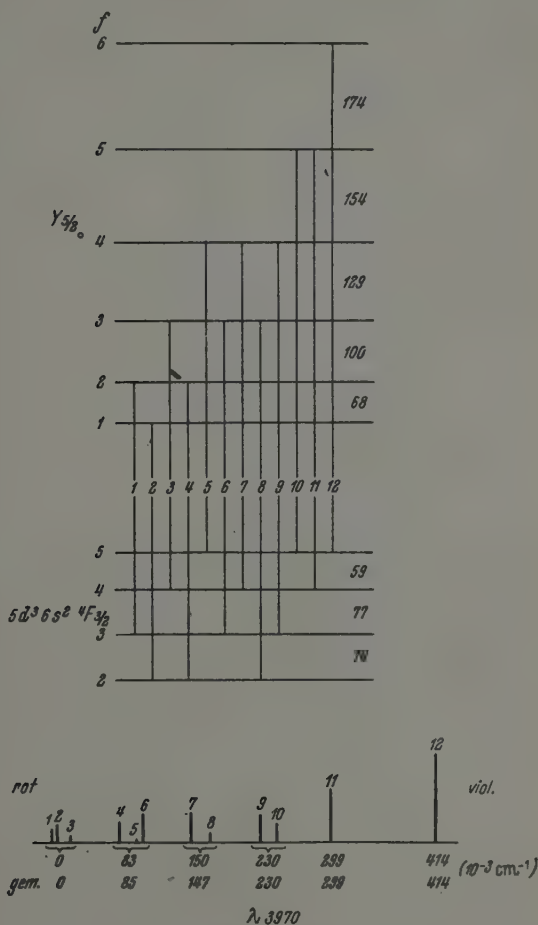


Fig. 4.

ergeben würden. Die Differenzen Δ geben ein Maß für die Genauigkeit, mit der b bestimmt werden kann. Bei den meisten Linien sind viele Komponenten nicht getrennt. Es wurden in diesen Fällen die Schwerpunkte gemessen und die Termstrukturen unter der Voraussetzung der Gültigkeit des quadratischen Gesetzes für die Hyperfeinstrukturenergien so bestimmt, daß die berechneten Schwerpunkte möglichst gut mit den gemessenen überein-

stimmen. Die berechneten Komponenten- und Schwerpunktslagen sind bei den Linienstrukturen angegeben, unter ihnen stehen die gemessenen Werte. Die mit diesem Verfahren verknüpfte Ungenauigkeit ist meist kleiner als die oben besprochene der Eigenfunktionsberechnung.

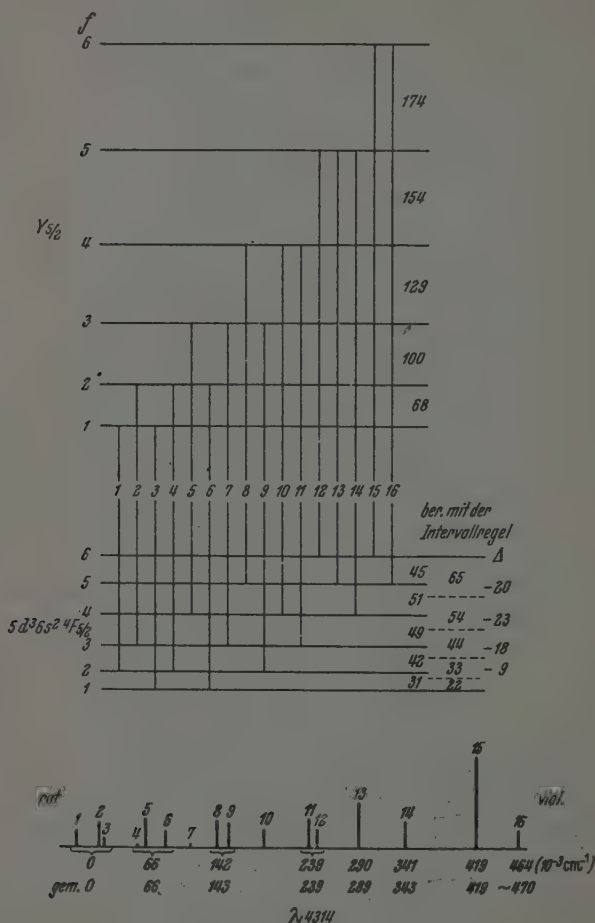


Fig. 5.

Bei λ 4280 (Fig. 3) sind alle Komponenten einzeln meßbar. Die Struktur von λ 9970 (Fig. 4) wurde unter Benützung der durch λ 4280 festgelegten Struktur des unteren Termes in der besprochenen Weise bestimmt. Die gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und gemessenen Kom-

Wir gehen nun zur Berechnung des Quadrupolmomentes q aus den Kopplungskonstanten der Tabelle 1 über. Nach Casimir¹⁾ gilt:

$$q = -b \frac{8i(2i-1)j(2j-1)}{3e^2 \sum_i r_i^{-3} (3 \cos^2 \Theta_i - 1)}.$$

Hierbei ist die Summe über alle am Zustandekommen von b beteiligten Elektronen, in unserem Falle also die drei $5d$ -Elektronen, zu erstrecken. Nach Ersatz von r_i^{-3} durch die Spin-Bahnwechselwirkung ζ kommt:

$$q = -b \frac{Z^* \cdot H_2}{\zeta \sum_i (3 \cos^2 \Theta_i - 1)} i(2i-1)j(2j-1) \cdot 1,972 \cdot 10^{-24},$$

wobei ζ in cm^{-1} , b in 10^{-3} cm^{-1} einzusetzen ist und Z^* die effektive Kernladung (für d -Elektronen etwa $Z - 11$), H_2 die relativistische Korrektur für ζ ist.

Zur Berechnung von $\sum_i (3 \cos^2 \Theta_i - 1)$ müssen wir nun die Eigenfunktionen der betreffenden Terme durch die Einzelelektronenfunktionen ausdrücken und daraus den obigen Mittelwert mit Hilfe der Matrixelemente für $(3 \cos^2 \Theta - 1)$ bilden.

Die Matrixelemente sind:

$$\langle d_{5/2}^{5/2} | 3 \cos^2 \Theta - 1 | d_{5/2}^{5/2} \rangle = \langle \bar{d}_{5/2}^{-5/2} | 3 \cos^2 \Theta - 1 | \bar{d}_{5/2}^{-5/2} \rangle = \frac{4}{7} R'_2,$$

$$\langle d_{5/2}^{3/2} | 3 \cos^2 \Theta - 1 | d_{5/2}^{3/2} \rangle = \langle \bar{d}_{5/2}^{-3/2} | 3 \cos^2 \Theta - 1 | \bar{d}_{5/2}^{-3/2} \rangle = \frac{4}{35} R'_2,$$

$$\langle d_{5/2}^{1/2} | 3 \cos^2 \Theta - 1 | d_{5/2}^{1/2} \rangle = \langle \bar{d}_{5/2}^{-1/2} | 3 \cos^2 \Theta - 1 | \bar{d}_{5/2}^{-1/2} \rangle = \frac{16}{35} R'_2,$$

$$\langle d_{3/2}^{3/2} | 3 \cos^2 \Theta - 1 | d_{3/2}^{3/2} \rangle = \langle \bar{d}_{3/2}^{-3/2} | 3 \cos^2 \Theta - 1 | \bar{d}_{3/2}^{-3/2} \rangle = -\frac{14}{35} R''_2,$$

$$\langle d_{3/2}^{1/2} | 3 \cos^2 \Theta - 1 | d_{3/2}^{1/2} \rangle = \langle \bar{d}_{3/2}^{-1/2} | 3 \cos^2 \Theta - 1 | \bar{d}_{3/2}^{-1/2} \rangle = \frac{14}{35} R''_2,$$

$$\langle d_{5/2}^{3/2} | 3 \cos^2 \Theta - 1 | d_{3/2}^{3/2} \rangle = -\langle \bar{d}_{5/2}^{-3/2} | 3 \cos^2 \Theta - 1 | \bar{d}_{3/2}^{-3/2} \rangle = \frac{12}{35} S_2,$$

$$\langle d_{5/2}^{1/2} | 3 \cos^2 \Theta - 1 | d_{3/2}^{1/2} \rangle = -\langle \bar{d}_{5/2}^{-1/2} | 3 \cos^2 \Theta - 1 | \bar{d}_{3/2}^{-1/2} \rangle = \frac{2\sqrt{6}}{35} S_2.$$

R'_2 , R''_2 und S_2 sind die relativistischen Korrekturen in der Casimirschen Bezeichnungsweise²⁾. In der $(slm_s m_l)$ -Darstellung, die später benutzt

¹⁾ H. Casimir, Verh. Teylers tweede Genootschap, Haarlem 11, 1936. Zusammenfassende Darstellung der Theorie bei H. Kopfermann, Kernmomente. Leipzig 1940. — ²⁾ Bei der im vorliegenden Fall erreichbaren Genauigkeit könnten die relativistischen Korrekturen auch vernachlässigt werden, sie seien jedoch der Vollständigkeit halber mitgeführt.

wird, ergeben sich die Matrixelemente, wenn wir die d -Eigenfunktionen durch die Quantenzahl m_l mit dem Vorzeichen von m_s als Index bezeichnen:

$$\begin{aligned}
 (2^+ | 3 \cos^2 \Theta - 1 | 2^+) &= (-2^+ | 3 \cos^2 \Theta - 1 | -2^-) = -\frac{4}{7} R'_2, \\
 (1^+ | 3 \cos^2 \Theta - 1 | 1^+) &= (-1^- | 3 \cos^2 \Theta - 1 | -1^-) = \frac{2}{175} (8 R'_2 - 7 R''_2 + 24 S_2), \\
 (2^- | 3 \cos^2 \Theta - 1 | 2^-) &= (-2^+ | 3 \cos^2 \Theta - 1 | -2^+) = \frac{4}{175} (R'_2 - 14 R''_2 - 12 S_2), \\
 (0^+ | 3 \cos^2 \Theta - 1 | 0^+) &= (0^- | 3 \cos^2 \Theta - 1 | 0^-) = \frac{4}{175} (12 R'_2 + 7 R''_2 + 6 S_2), \\
 (1^- | 3 \cos^2 \Theta - 1 | 1^-) &= (-1^+ | 3 \cos^2 \Theta - 1 | -1^+) = \frac{4}{175} (16 R'_2 + 21 R''_2 - 12 S_2), \\
 (1^+ | 3 \cos^2 \Theta - 1 | 2^-) &= (-2^+ | 3 \cos^2 \Theta - 1 | -1^-) = \frac{4}{175} (2 R'_2 + 7 R''_2 - 9 S_2), \\
 (0^+ | 3 \cos^2 \Theta - 1 | 1^-) &= (-1^+ | 3 \cos^2 \Theta - 1 | 0^-) = \frac{4}{175} (8 R'_2 + 7 R''_2 - S_2).
 \end{aligned}$$

Die Russell-Saunders-Eigenfunktionen der Terme werden nun zunächst durch die Eigenfunktionen der $(S L M_S M_L)$ -Darstellung ausgedrückt, diese weiter nach der Methode von Gray und Wills¹⁾ durch antimetrisierte Produkte von Einzelelektronenfunktionen der $(s l m_s m_l)$ -Darstellung. So ergibt sich z. B. ²⁾:

$$\begin{aligned}
 {}^4P_{3/2}^{3/2} &= \frac{1}{\sqrt{6}} [\sqrt{3} ({}^4P, 3/2, 0) - \sqrt{2} ({}^4P, 1/2, 1)] \\
 &= \frac{1}{5\sqrt{3}} [-6 (1^+ 0^+ - 1^+) + 3 (2^+ 0^+ - 2^+) - \\
 &\quad - 2 (2^- 0^+ - 1^+) - 2 (2^+ 0^- - 1^-) + \\
 &\quad + \sqrt{6} (2^- 1^+ - 2^+) + \sqrt{6} (2^+ 1^- - 2^+) + \sqrt{6} (2^+ 1^+ - 2^-)],
 \end{aligned}$$

entsprechend für die anderen Eigenfunktionen. Nach Einsetzen der angegebenen Matrixelemente kommt:

$$\begin{aligned}
 ({}^4F_{3/2}^{3/2} | \sum_i (3 \cos^2 \Theta_i - 1) | {}^4F_{3/2}^{3/2}) &= \frac{8}{875} (13 R'_2 + 14 R''_2 - 12 S_2), \\
 ({}^4F_{5/2}^{3/2} | \sum_i (3 \cos^2 \Theta_i - 1) | {}^4F_{5/2}^{3/2}) &= \frac{1}{3675} (-392 R'_2 + 721 R''_2 + 156 S_2), \\
 ({}^4F_{7/2}^{3/2} | \sum_i (3 \cos^2 \Theta_i - 1) | {}^4F_{7/2}^{3/2}) &= \frac{2}{175} (-18 R'_2 + 7 R''_2 + 36 S_2), \\
 ({}^4P_{3/2}^{3/2} | \sum_i (3 \cos^2 \Theta_i - 1) | {}^4P_{3/2}^{3/2}) &= \frac{8}{13125} (908 R'_2 + 133 R''_2 + 84 S_2).
 \end{aligned}$$

¹⁾ N. M. Gray u. L. A. Wills, Phys. Rev. **38**, 248, 1931; s. auch Condon-Shortley, Theory of Atomic Spectra, S. 227. Cambridge 1935. — ²⁾ Bezeichnung wie bei Condon-Shortley, l. c.

Einsetzen in die Casimirsche Formel gibt schließlich mit

$$R'_2 = S_2 = 1,07; \quad R''_2 = 1,25; \quad H_2 = 1,03; \\ Z^* = 62; \quad \zeta = 1500 \text{ cm}^{-1} \text{ } ^1)$$

und den oben gefundenen Werten von b die Tabelle 2.

Tabelle 2.

Term	q	Term	q
$^4F_{3/2}$	$6,3 \cdot 10^{-24}$	$^4F_{9/2}$	$2 \cdot 10^{-24}$
$^4F_{5/2}$	6	$^4P_{3/2}$	4,2

Wenn man berücksichtigt, daß der b -Wert von $^4F_{9/2}$ einen größeren Fehler enthalten kann, zeigt die ungefähre Übereinstimmung dieser Werte, daß die Rechnung zu einer größenordnungsmäßig brauchbaren Abschätzung von q führt. Als Mittelwert ergibt sich

$$\underline{q \sim + 6 \cdot 10^{-24}.$$

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft bin ich für die Überlassung eines Steinheilschen Spektrographen, eines Fabry-Perot-Interferometers und eines Komparators, der Helmholtz-Gesellschaft für die Überlassung einer Quecksilberdiffusionspumpe zu Dank verpflichtet.

Die vorliegende Arbeit wurde im Sommer 1940 durchgeführt; die Zeitumstände verzögerten die Veröffentlichung.

¹⁾ Dieser Wert ist aus den Spektren der benachbarten Elemente abgeschätzt.

(Institut für Metallphysik am Kaiser Wilhelm-Institut für Metallforschung,
Stuttgart.)

Zum Gefügebau der Realkristalle.

Die Ausbildung der Mosaikstruktur in gegossenem, plastisch verformtem und rekristallisiertem Material.

Von Ludwig Graf.

Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 5. Januar 1943.)

Die auf Grund röntgenographischer Untersuchungsergebnisse bisher getroffene Einteilung der Kristalle in „Ideal“- und „Mosaik“-Kristalle wird nachgeprüft. Dabei ergibt sich, daß einerseits die bisher röntgenographisch beobachtete „Mosaikstruktur“ wahrscheinlich ein sekundärer Effekt ist, verursacht durch plastische Verformung. Andererseits kann aber auch bei Gültigkeit der dynamischen Theorie bei der Reflexion der Röntgenstrahlen an Kristallen nichts Sicheres über das Fehlen einer Mosaikstruktur ausgesagt werden. Dagegen ließ sich zeigen, daß die vor kurzem vom Verfasser mikroskopisch beobachtete „Wachstums-Lamellenstruktur“ eine im Wachstumsmechanismus der Metall- und Salzkristalle begründete und damit grundsätzliche Erscheinung im Kristallaufbau darstellt. Die quantitative und qualitative Beschaffenheit dieser Lamellenstruktur und ihre Veränderungen durch plastische Verformung und bei der Rekristallisation werden beschrieben und gewisse Unterschiede in den strukturabhängigen Eigenschaften gegossener, plastisch verformter und rekristallisierter Metalle darauf zurückgeführt.

I. Überblick.

1. *Die bekannten Kristallbaufehler.* „Der Realkristall, welchen der Sprachgebrauch dem Idealfall gegenüberstellt, ist bis jetzt trotz vieler und sorgfältiger Untersuchungen das dunkelste Kapitel der Kristallphysik.“ Diese Äußerung von M. v. Laue¹⁾ sei zur Charakterisierung des allgemeinen Kenntnisstandes auf diesem grundlegenden Gebiet der Stoffkunde hier angeführt. Der „Realkristall“ mit seinen Fehlern ist aber bestimmend für die Eigenschaften unserer metallischen Werkstoffe. Es wird daher im folgenden versucht, auf Grund neuer experimenteller Ergebnisse einen weiteren Beitrag zur Klärung dieses wichtigen Grundproblems zu geben.

Bekanntlich werden z. Z. grundsätzlich folgende Kristallbaufehler hinsichtlich Größe und Art ihrer Ausbildung im Kristallgitter unterschieden²⁾:

¹⁾ M. v. Laue, Physik und Chemie und ihre Anwendungen in Einzeldarstellungen. Bd. VI: Röntgeninterferenzen. (4. Kap., § 19, S. 168–169.) Leipzig, Akad. Verlagsges., 1941. — ²⁾ M. Renninger, ZS. f. Krist. **89**, 344, 1934; C. Wagner, ZS. f. phys. Chem. (B) **38**, 325, 1938; A. Smekal, Handb. d. Physik XXIV/2, Kap. 5, S. 795, 2. Aufl. Berlin, Springer, 1933.

- a) *Makroskopische Verwerfungen* (auch Verzweigungs- oder Lineagestruktur genannt); Beschaffenheit: grobe Blockstruktur bzw. Verwerfungen oder Verzweigungen; Größenordnung: etwa 10^{-2} bis zu 1 mm und mehr Lineardimension; Nachweis: mikroskopisch und optisch.
- b) *Mosaikstruktur*; Beschaffenheit: feine Blockstruktur oder Verwerfung; Größenordnung: etwa 10^{-6} bis 10^{-2} mm und mehr Lineardimension; Nachweis: röntgenographisch.
- c) *Atomare Fehlstellen*; Beschaffenheit: Gitterlücken bzw. falsch eingebaute eigene oder Fremdatome innerhalb des kohärenten Gitters; Größenordnung: etwa 10^{-7} bis 10^{-5} mm Lineardimension; Nachweis: lichtelektrisch oder photochemisch.

Mit dem letztgenannten Fehler werden wir uns im folgenden nicht weiter befassen, da er unser besonderes Problem nicht berührt. Was nun den erstgenannten Fehler betrifft, so ist er wohl jedem, der sich näher mit Kristallen befaßt hat, bekannt, da er optisch und mikroskopisch sehr leicht feststellbar ist und oft durch eine eigentümliche „Pflastersteinstruktur“ der Kristallflächen (Spaltebenen) auffällt¹⁾. Eine sehr ausführliche Beschreibung dieses Fehlers hat in letzter Zeit Buerger²⁾ gegeben, der seine Entstehung auf eigentümliche Verzweigungsvorgänge infolge des dendritischen Wachstums der Kristalle zurückführt. Zweifellos hat man es hier mit einem ziemlich groben Wachstumsfehler zu tun, der sich je nach den Wachstumsbedingungen bald stärker, bald schwächer ausbilden kann, doch ist die Ursache für die Verzweigungserscheinungen noch nicht völlig geklärt²⁾. Da sich nach obiger Zusammenstellung dieser Fehler von der unter b) aufgeführten „Mosaikstruktur“ nur größenordnungsmäßig (quantitativ) unterscheidet, wird oft angenommen, daß er unter Umständen auch diese umfaßt, d. h. unter besonderen, nicht näher bekannten Bedingungen in diese übergeht und mit dieser identisch wird; eine Unterscheidung der Fehler a) und b) wäre dann nicht mehr möglich. Hierauf weist auch Renninger³⁾ hin, stellt jedoch andererseits fest, daß beide Fehlerarten völlig unabhängig voneinander und gleichzeitig miteinander auftreten können, also doch zwei grundsätzlich verschiedene Erscheinungen sind.

Was nun die Mosaikstruktur betrifft, so ist diese von ganz besonderem Interesse, da sie, im Gegensatz zu den beiden andern Fehlerarten, nach den bisherigen Vorstellungen und Erfahrungen, in den verschiedenen Gefügezuständen — gegossen, plastisch verformt, rekristallisiert — ver-

¹⁾ P. Groth, Physikal. Kristallographie, Leipzig 1885. — ²⁾ M. J. Buerger, ZS. f. Krist. **89**, 195, 1934. — ³⁾ M. Renninger, ebenda **89**, 344, 1934.

schieden stark¹⁾ ausgebildet sein soll und dadurch die Unterschiede in den strukturabhängigen Eigenschaften der verschiedenen Gefügezustände verursachen soll²⁾. So wird angenommen, daß durch ihre jeweilige Absolutgröße die Festigkeitseigenschaften und die Diffusionsgeschwindigkeit bestimmt werden. Nach Taylor³⁾ und Kochendörfer⁴⁾ sollen, entsprechend ihren Theorien zur Plastizität der Kristalle, die Grenzen der Mosaikblöcke die Orte der sogenannten Versetzungsbildung sein, und Dehlinger und Gisen⁵⁾ erklären das Fehlen einer Anfangsschubspannung (kritischen Schubspannung) bei aus der Schmelze gezüchteten Al-Einkristallen im Gegensatz zum Auftreten einer solchen bei Rekristallisations-Einkristallen durch Unterschiede in der Größe der Mosaikstruktur¹⁾. Ferner werden auch die Unterschiede im Mechanismus und in der Kinetik der Ausscheidungsvorgänge zwischen gegossenem und rekristallisiertem Material auf Größenunterschiede der Mosaikstruktur zurückgeführt²⁾. Damit ist die große Bedeutung der Mosaikstruktur ohne weiteres verständlich und es ist eine der Aufgaben der vorliegenden Arbeit, ihre Entstehung und Ausbildung in den einzelnen Gefügezuständen möglichst weitgehend klarzulegen.

2. *Zum Nachweis der Mosaikstruktur.* Die Mosaikstruktur läßt sich direkt nur röntgenographisch durch ihren Einfluß auf die Winkelbreite und die Intensität von an Kristallebenen reflektierten Röntgenstrahlen nachweisen⁶⁾. Von einer bestimmten Größe der kohärenten Bereiche, d. h. der Mosaikblöcke an verschwindet jedoch der Einfluß auf die Breite der Reflexe und man ist dann allein auf die Beeinflussung der Intensität derselben angewiesen, wodurch diese Untersuchungen experimentell ziemlich schwierig werden. Da Einkristalle sowie gegossenes Material keine merkliche

¹⁾ Man bezeichnet die „Mosaikstruktur“ als um so *stärker* oder *größer*, je *kleiner* die „Mosaikblöcke“, d. h. die kohärenten Bereiche sind und umgekehrt.

— ²⁾ U. Dehlinger, *Chemische Physik der Metalle und Legierungen*. Leipzig, Akad. Verlagsges., 1939; U. Dehlinger u. P. Wiest, *ZS. f. Metallkde.* **26**, 150, 1934; H. Bumm, *Metallwirtschaft* **14**, 429, 1935. — ³⁾ G. I. Taylor, *ZS. f. Krist.* **89**, 375, 1934. — ⁴⁾ A. Kochendörfer, *Reine und angewandte Metallkunde in Einzeldarstellungen*. Bd. VII: *Plastische Eigenschaften von Kristallen und metallischen Werkstoffen*. Berlin, Springer, 1941. — ⁵⁾ U. Dehlinger u. F. Gisen, *Phys. ZS.* **35**, 375, 1934; U. Dehlinger, *ebenda* **34**, 836, 1933; F. Gisen, *ZS. f. Metallkde.* **27**, 256, 1935. — ⁶⁾ H. G. J. Moseley u. C. G. Darwin, *Phil. Mag.* **26**, 210, 1913; C. G. Darwin, *ebenda* **27**, 315, 675, 1914; **43**, 800, 1922; H. Mark, *Naturwiss.* **13**, 1042, 1925; P. P. Ewald, *Handb. d. Physik XXIII/2*, 2. Aufl., Kap. 4, S. 207; M. v. Laue, *Physik und Chemie und ihre Anwendungen in Einzeldarstellungen*. Bd. VI: *Röntgeninterferenzen*. Leipzig, Akad. Verlagsges., 1941.

Verbreiterung der Reflexe aufweisen, liegen über die Ausbildung der Mosaikstruktur in diesen nur wenige, mit einer Ausnahme^{1) 2)} auf Salzkristalle beschränkte Untersuchungen vor. Die Größe der Mosaikblöcke *in gegossenen Metallen* ist daher lediglich aus den Messungen an Salzkristallen zu etwa 10^{-1} mm geschätzt worden³⁾. Es sei in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, daß für die Entstehung einer Mosaikstruktur in gegossenem Material bis jetzt noch keine plausible, thermodynamisch begründbare Ursache angegeben werden konnte⁴⁾. Eine von Zwicky⁵⁾ versuchte theoretische Ableitung einer sogenannten „Sekundärstruktur“, die sich als periodische Gitterkonstantenänderung dem normalen Kristallgitter überlagern sollte, hat sich als völlig unhaltbar erwiesen⁶⁾.

Von den Versuchen zum unmittelbaren Nachweis der Mosaikstruktur auf nicht röntgenographischem Wege sind wohl die Untersuchungen von Götz⁷⁾ am bekanntesten geworden. Götz beobachtete auf geätzten Spaltflächen von Wismuteinkristallen ein dreifaches, kristallographisch orientiertes Liniensystem mit einem mittleren Linienabstand von etwa 10^{-3} mm und faßte dieses als eine Auswirkung der Mosaikstruktur auf. Infolge der vielen möglichen anderen Ursachen kommt jedoch diesem Befund nur wenig Beweiskraft zu⁸⁾. Interferenzuntersuchungen mit sichtbarem oder Ultraviolettlicht, wie sie insbesondere von Buckley⁹⁾ ausgeführt worden sind, können infolge der außerordentlich viel größeren Wellenlänge desselben gegenüber Röntgenstrahlen (etwa um den Faktor 10^3) kaum einen Nachweis erbringen.

In einer kürzlich veröffentlichten Arbeit¹⁰⁾ hat der Verfasser über eine Beobachtung an Metallkristallen berichtet, die er als eine Erscheinung der „Mosaikstruktur“ gedeutet hat. Es handelt sich hierbei um eine eigentümliche, kristallographisch orientierte Linienstruktur mit einem mittleren Linienabstand von etwa 10^{-3} mm, die ohne jede Behandlung wie Polieren oder Ätzen auf der sauberen Oberfläche langsam aus der Schmelze oder der

¹⁾ R. W. James, G. W. Brindley u. R. G. Wood, Proc. Roy. Soc. London (A) **125**, 401, 1929 (Al). — ²⁾ R. W. James, ZS. f. Krist. **89**, 295, 1934. — ³⁾ A. Kochendörfer, l. c., S. 63. — ⁴⁾ H. E. Buckley, ZS. f. Krist. **89**, 221, 1934. — ⁵⁾ F. Zwicky, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **15**, 253, 816, 1929; **17**, 524, 1931; Helv. Phys. Acta **3**, 269, 1930; **4**, 49, 1931; Phys. Rev. **40**, 63, 1932. — ⁶⁾ R. H. Canfield, Phys. Rev. **35**, 114, 1930; E. Orowan, ZS. f. Phys. **79**, 573, 1932; **89**, 774, 1934; ZS. f. Krist. **89**, 327, 1934; M. J. Buerger, ebenda **89**, 242, 1934. — ⁷⁾ A. Goetz, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **16**, 99, 1930. — ⁸⁾ M. J. Buerger, ZS. f. Krist. **89**, 242, 1934; A. Smekal, Handb. d. Physik XXIV/2, 2. Aufl., Kap. 5, S. 828ff. — ⁹⁾ H. E. Buckley, ZS. f. Krist. **89**, 221, 410, 1934. — ¹⁰⁾ L. Graf, ZS. f. Elektrochem. u. phys. Chem. **48**, 181, 1942.

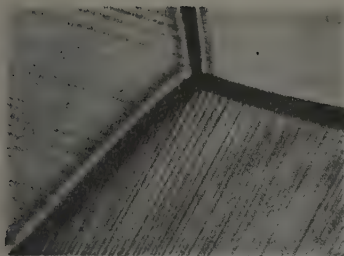


Fig. 1. Oberfläche einer sauber erstarrten Cu-Schmelze mit Linienstruktur in den Kristalliten. Originalvergr.: 175:1; Nachvergr. auf 500:1.



Fig. 2. Linienstruktur auf Cu. Vergr.: 1100:1.

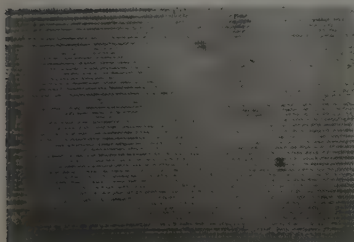


Fig. 3. Linienstruktur auf Au. Vergr.: 1100:1.

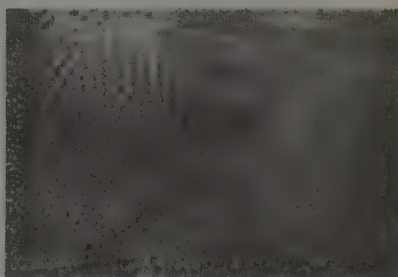


Fig. 4. Linienstruktur auf Cu mit starker Zähnung der Lamellen. Vergr.: 1100:1.



Fig. 5. Cd-Sublimationskristall mit Lamellenstruktur (nach Straumanis). Vergr.: 500:1.

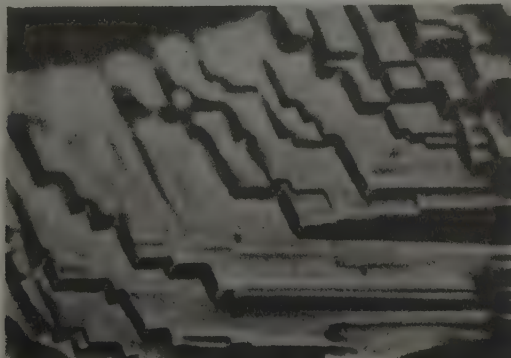


Fig. 6. W-Sublimationskristall mit Lamellenstruktur. Originalvergr.: 1100:1; Nachvergr. auf 3000:1.

Dampfphase kristallisierter Metalle mikroskopisch sichtbar ist (vgl. die Fig. 1 bis 6). Wie festgestellt werden konnte, rührt diese Linienstruktur von einer Lamellenstruktur der Kristalle her, die sich als weitgehend unabhängig von der Art des Kristallisationsprozesses erwies (Kristallisation aus der Schmelze, der Gasphase, wässriger Lösung oder Rekristallisation) und auch bei Mischkristallen genau so wie bei reinen Metallen auftrat. Diese Lamellenstruktur muß demnach aufs engste mit dem Wachstumsmechanismus der Kristalle verknüpft sein, was in der genannten Arbeit unter Heranziehung der Beobachtungen von Volmer und Mitarbeitern¹⁾ unmittelbar beim Wachstumsprozeß eingehend klargelegt worden ist. Die größenordnungsmäßige Übereinstimmung der Lamellenstruktur mit der (geschätzten) Größe der Mosaikstruktur²⁾ ³⁾ legte es nahe, diese beiden Strukturen als miteinander identisch zu betrachten, insbesondere da es sehr unwahrscheinlich schien, daß zwei derart ausgeprägte und in ihrer Größenordnung übereinstimmende Fehlerstrukturen innerhalb des Kristallgitters *nebeneinander* auftreten.

Der naheliegendste Einwand gegen diese Gleichsetzung war, daß es sich bei der beobachteten Struktur offensichtlich um eine *Lamellenstruktur*, und nicht um eine *Blockstruktur* handelt. Eine Querunterteilung der Lamellen konnte aber (im Gegensatz zu der von Götz beobachteten Linienstruktur) mikroskopisch selbst bei 1200facher Vergrößerung nicht festgestellt werden. Auch vor kurzem zu diesem Zweck hergestellte elektronenmikroskopische Aufnahmen⁴⁾ bis zu 6000facher Vergrößerung erbrachten keinen anderen Befund (vgl. Fig. 7). Zwar wurde mitunter mikroskopisch eine ausgeprägte Zahnung der Lamellen beobachtet, die an manchen Stellen direkt eine mosaikartige Struktur auf der Oberfläche hervorrief (vgl. Fig. 4),

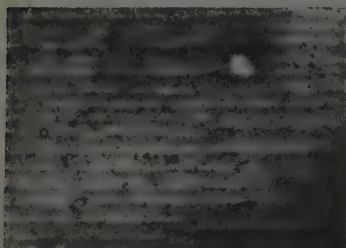


Fig. 7. Elektronenmikroskopisches Bild der Linienstruktur auf Cu (nach dem Mahlschen Abdruckverfahren). Originalvergr.: 6000:1; Verkleinert auf 5000:1.

¹⁾ M. Volmer, Die chem. Reaktion. Bd. IV: Kinetik der Phasenbildung. Leipzig, Verlag Th. Steinkopff, 1939. — ²⁾ G. I. Taylor, ZS. f. Krist. 89. 375, 1934. — ³⁾ A. Kochendörfer, Reine und angewandte Metallkunde in Einzeldarstellungen. Bd. VII: Plastische Eigenschaften von Kristallen und metallischen Werkstoffen. Berlin, Springer, 1941. — ⁴⁾ Für die Herstellung dieser Aufnahmen habe ich Herrn Dr. Mahl. AEG-Forschungsinstitut, Berlin, bestens zu danken.

doch ist diese jedenfalls nicht, wie zuerst angenommen, auf eine Blockstruktur der Lamellen zurückzuführen, sondern auf den besonderen Mechanismus des „Herauswachsens“ der Lamellen aus der Schmelze^{1) 2)}. Eine Erklärung für die mikroskopische Unsichtbarkeit der angenommenen Blockstruktur innerhalb der Lamellen hat der Verfasser seinerzeit durch die Annahme zu geben versucht, daß infolge des besonderen Bauprinzips die Grenzen *zwischen den Lamellen* viel gröber in Erscheinung treten müßten als die Grenzen *zwischen den Blöcken innerhalb der Lamellen*, weshalb letztere nicht mehr mikroskopisch auflösbar sein sollten.

Eine weitere Prüfung ergab aber noch manche andere Unstimmigkeiten zwischen der „Mosaikstruktur“ und der „Wachstums-Lamellenstruktur“. So soll erstere nach den neueren Untersuchungen *nicht von grundsätzlicher Natur*³⁾ sein, während dies bei letzterer offenbar der Fall ist, da sie aufs engste mit dem Wachstumsmechanismus verknüpft zu sein scheint¹⁾. Außerdem weist die Lamellenstruktur eine wenig veränderliche Lamellendicke von etwa 10^{-3} bis 10^{-4} mm auf bei nur geringer Abhängigkeit von der Entstehungsart der Kristalle, im Gegensatz zur Mosaikstruktur, deren Blockgröße je nach den Wachstumsbedingungen makroskopische Größe erreichen soll, um in Idealkristallen schließlich mit den äußeren Grenzen der Kristalle zusammenzufallen⁴⁾.

Diese Unstimmigkeiten gaben den Anlaß zu einer genauen Durchsicht der Literatur über das Problem der „Mosaikstruktur“, was schließlich dazu führte, die Fragestellung umzukehren und zunächst einmal zu prüfen, inwieweit denn überhaupt die Vorstellungen über die Mosaikstruktur in gegossenen Metallen richtig und gesichert sind. Wie im folgenden klargelegt wird, stellte sich dabei heraus, daß sich *durch eine unzulässige Verallgemeinerung spezieller röntgenographischer Befunde* im Laufe der Zeit gewisse Vorstellungen über das Auftreten und die Beschaffenheit sowohl der „Mosaik-kristalle“ als auch der „Idealkristalle“ entwickelt haben, die einer kritischen Prüfung nicht standhalten, sich aber zum Teil bis heute in der allgemeinen Ansicht und Auffassung erhalten haben. Um hier völlige Klarheit zu schaffen, sollen daher *zunächst die Beobachtungen und Tatsachen, die zur Annahme einer „Mosaikstruktur“ geführt haben, nochmals genau durchgegangen und nachgeprüft* werden. Nach der Klärung der grundsätzlichen Fragen zur Mosaikstruktur wird es dann möglich sein, *die neu beobachtete*

¹⁾ L. Graf, ZS. f. Elektrochem. u. phys. Chem. **48**, 181, 1942. —

²⁾ M. Volmer, Die chem. Reaktion. Bd. IV: Kinetik der Phasenbildung. Leipzig, Verlag Th. Steinkopff, 1939. — ³⁾ A. Smekal, l. c.; M. Renninger, l. c. — ⁴⁾ M. Renninger, l. c.; R. W. James, ZS. f. Krist. **89**, 295, 1934.

Wachstums-Lamellenstruktur richtig zu beurteilen und unter Umständen unter die bekannten Kristallbaufehler einzureihen.

II. Der röntgenographische Nachweis der Mosaikstruktur.

Die grundsätzliche Kenntnis vom Vorhandensein einer „Mosaikstruktur“ in den Realkristallen ist allein den Untersuchungen über die Intensitätsgesetze reflektierter Röntgenstrahlung entsprungen. Wie schon sehr bald nach der Entdeckung der Röntgeninterferenzen Darwin¹⁾ bemerkt hat, wird die Reflexionsintensität sehr stark durch die Unvollkommenheiten des Kristallgefüges beeinflusst, und zwar derart, daß mit zunehmender Abweichung vom idealen Kristallbau die Reflexionsintensität ansteigt. Bekanntlich ergeben sich für die Reflexionsintensität theoretisch ganz verschiedene Ansätze, je nach den der Rechnung zugrunde gelegten Voraussetzungen. In einem Fall, in der von v. Laue²⁾ zugleich mit der Entdeckung der Röntgeninterferenzen entwickelten wellenkinematischen Theorie, wird u. a. die Wechselwirkung der Atome im Gitter, d. h. ihre Beeinflussung durch gegenseitige Zustrahlung, völlig vernachlässigt, während diese im anderen Fall, in der von Darwin¹⁾ und Ewald³⁾ aufgestellten dynamischen Theorie besonders berücksichtigt wird unter der Annahme eines unendlich großen kohärenten Gitters. Diese beiden Ansätze führen zu ganz verschiedenen Ergebnissen; sowohl die Reflexionsintensität als auch die Breite der Reflexionskurve ist nach der kinematischen Theorie viel größer als nach der dynamischen Theorie. Entsprechend den Voraussetzungen kann man für die kinematische Theorie nur bei Reflexion an sehr kleinen Kriställchen, in denen infolge der geringen Anzahl kohärenter (d. h. miteinander gekoppelter) Atome die gegenseitige Zustrahlung vernachlässigbar ist, Gültigkeit erwarten, während umgekehrt die Bedingungen der dynamischen Theorie nur bei großen Kristallen erfüllt sein können.

In Wirklichkeit entsprachen jedoch überraschenderweise die an großen Kristallen (insbesondere an Steinsalz, NaCl) beobachteten Reflexionsintensitäten und -breiten durchweg viel besser den nach der kinematischen als nach der dynamischen Theorie berechneten Werten; dagegen konnte die dynamische Theorie nur bei wenigen ausgesuchten Kristallen (insbesondere an Diamanten) bestätigt werden. Das Reflexionsvermögen der Realkristalle liegt also im allgemeinen zwischen den durch die beiden

¹⁾ C. G. Darwin, Phil. Mag. 27, 315, 675, 1914. — ²⁾ M. v. Laue, Münch. Ber. 1912, S. 303; vgl. auch Physik und Chemie und ihre Anwendungen in Einzeldarstellungen. Bd. VI: Röntgeninterferenzen. Leipzig, Akad. Verlagsges., 1941. — ³⁾ P. P. Ewald, Ann. d. Phys. 54, 519, 1917.

Theorien gegebenen Grenzwerten, wobei die Annäherung an diese von Kristall zu Kristall verschieden ist und nicht nach dem äußeren makro- oder mikroskopischen Befund beurteilt werden kann¹⁾. Die Kristalle entsprechen somit in ihrem Gitterbau meist nicht der theoretischen Idealvorstellung, nach der sie in exakter geometrischer Konstruktion durch einfache Parallelverschiebung der Basisatome der Elementarzelle nach den drei Richtungen des Raumes aufgebaut und als völlig kohärent zu betrachten sind. Die Kohärenz der Atome erstreckt sich jedenfalls nur auf kleinere Bereiche des Kristallgitters. Da eine genaue Bestimmung der atomaren Einzelheiten nicht möglich ist, kann man sich den Aufbau derartiger Kristalle entweder aus kleinen Elementen (Blöcken) unbestimmten mittleren Volumens vorstellen, die mit kleinen Neigungen (in der Größenordnung von Minuten) gegeneinander verlagert sind; oder man kann annehmen, daß ihre Kristallebenen gewisse „Verwerfungen“ besitzen²⁾. Da von diesen beiden hypothetischen Annahmen erstere der Rechnung wesentlich leichter zugänglich ist, wurde sie von Darwin²⁾ und Ewald³⁾ bevorzugt, wodurch sich dann allgemein der Begriff des „Mosaikkristalls“ bzw. der „Mosaikstruktur“ eingeführt hat.

III. Die röntgenographischen Untersuchungsergebnisse über den Gefügeaufbau der Kristalle.

Die meisten der bisherigen Untersuchungen zur Klärung der Intensitätsgesetze reflektierter Röntgenstrahlung befaßten sich mit der Bestimmung der durch die Atomeigenschaften bedingten — strukturunabhängigen⁴⁾ — Faktoren, insbesondere des Atomformfaktors, während man den Einfluß des Gefügeaufbaues, d. h. der Mosaikstruktur der Kristalle auf die Intensität, als strukturabhängigen⁴⁾ und daher von Kristall zu Kristall in unkontrollierbarer Weise sich ändernden Faktor möglichst auszuschalten trachtete. Dies gelang einerseits durch geeignete „Präparierung“ [Abschmirgelung⁵⁾ und Polierung⁶⁾] der zur Reflexion benutzten Kristallflächen, wodurch sich eine gut reproduzierbare „Mosaikstruktur“ erzeugen ließ, die zudem die Voraussetzungen der kinematischen Theorie so ausgezeichnet erfüllte, daß hierdurch beste Übereinstimmung von Messung

¹⁾ M. Renninger, l. c. — ²⁾ C. G. Darwin, Phil. Mag. 43, 800, 1922.
— ³⁾ P. P. Ewald, Handb. d. Physik XXIII/2, 2. Aufl., Kap. 4, S. 207, Ziffer 21. — ⁴⁾ A. Smekal, Handb. d. Physik XXIV/2, 2. Aufl., Kap. 5, S. 828ff. — ⁵⁾ W. L. Bragg, R. W. James u. C. H. Bosanquet, Phil. Mag. 41, 309, 1921. — ⁶⁾ E. Wagner u. H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. 68, 369, 1922.

und Rechnung erzielt wurde. Andererseits suchte man sich durch eine Vorprüfung mittels Divergenzaufnahmen¹⁾ besonders gute, d. h. aus großen, wenig verschwenkten kohärenten Bereichen bestehende Kristalle aus, welche die dynamische Theorie dann befriedigend erfüllten. Hieraus entwickelte sich bereits eine gewisse Klassifizierung der verschiedenen Kristallarten in „Mosaik“- oder „Ideal“-Kristalle, da gute natürliche Kristalle nur in bestimmten Stoffklassen, z. B. unter Diamanten, gefunden wurden, während z. B. Steinsalzkristalle stets eine gewisse „Mosaikstruktur“ aufwiesen.

Nach Klärung der übrigen intensitätsbeeinflussenden Faktoren haben sich dann Bragg, Darwin und James²⁾ die Aufgabe gestellt, zu bestimmen, welche der beiden Theorien natürliche Kristalle von Steinsalz (NaCl), Flußspat (CaF₂) und Baryt (BaSO₄) erfüllen. Dabei kamen sie zu folgendem Befund: „Baryt nähert sich ebenso wie Flußspat und Steinsalz dem idealen „Mosaiktyp“. Unter Bezugnahme auf diese und frühere Beobachtungen kamen Ehrenberg, Ewald und Mark³⁾ bereits zu dem *allgemeinen* Schluß: „Der Kristall ist ein Mosaik. Das ist nach den bisherigen Erfahrungen in den meisten Fällen anzunehmen.“ Ferner sind sehr genaue Messungen und Rechnungen an NaCl und KCl sowie an einem Al-Kristall (dem einzigen Metallkristall) von James und Mitarbeitern⁴⁾ ausgeführt worden, worüber dieser in einem zusammenfassenden Bericht⁵⁾ schreibt, daß alle diese Kristalle Mosaikkristalle sind. Weiter heißt es dort an einer anderen Stelle: „Die Anwendung dieser Methode zeigt, daß die Mehrzahl der Real-kristalle einen Gefügebau besitzen, der zwischen den beiden extremen Typen liegt, aber daß die meisten derselben sich viel mehr dem Mosaiktyp als dem ideal-vollkommenen Typ nähern.“ Außer diesen, rechnerisch wie experimentell ziemlich schwierigen Intensitätsuntersuchungen wurde zur Gütebestimmung der Kristalle häufig die einfachere „Divergenzmethode“ angewendet, d. h. die Messung der Breite der Reflexionskurve mittels des Doppelkristallspektrometers¹⁾. Die hierbei an ausgesuchten Diamanten und Calcitkristallen (CaCO₃) gefundenen „Halbwertsbreiten“ stimmten größenordnungsmäßig gut mit den nach der dynamischen Theorie be-

¹⁾ B. Davis u. W. M. Stempel, Phys. Rev. **17**, 608, 1921; W. Ehrenberg u. H. Mark, ZS. f. Phys. **42**, 807, 1927. — ²⁾ W. L. Bragg, C. G. Darwin u. R. W. James, Phil. Mag. **1**, 897, 1926. — ³⁾ W. Ehrenberg, P. P. Ewald u. H. Mark, ZS. f. Krist. **66**, 547, 1928. — ⁴⁾ R. W. James, I. Waller u. D. R. Hartree, Proc. Roy. Soc. London (A) **118**, 334, 1928 (NaCl); R. W. James u. G. W. Brindley, ebenda **121**, 155, 1928 (KCl); R. W. James, G. W. Brindley u. R. G. Wood, ebenda **125**, 401, 1929 (Al). — ⁵⁾ R. W. James, ZS. f. Krist. **89**, 295, 1934.

rechneten Werten überein¹⁾, während z. B. bei Steinsalzkristallen auch bei den besten Stücken stets eine, wenn auch geringe, Mosaikstruktur zu beobachten war²⁾. Alle diese Befunde festigten die schon früh aufgekommene Klassifizierung der Kristallarten in „Mosaikkristalle“ und „Idealkristalle“ derart, daß sich diese Auffassung allgemein in der Literatur durchsetzte. Dabei galt als Hauptvertreter der „Mosaikkristalle“ das Steinsalz, als Hauptvertreter der „Idealkristalle“ der Diamant; so weist z. B. Renninger³⁾ auf den stets betonten Mosaikcharakter des Steinsalzes hin. Aber auch andere Kristallarten oder sogar ganze Stoffgruppen wurden auf Grund weniger Einzeluntersuchungen der einen oder anderen Klasse zugeteilt; beispielsweise findet man über die Metalkristalle unter Bezugnahme auf die oben erwähnte *einzige* Untersuchung an einem Aluminiumeinkristall in der Fachliteratur⁴⁾ den Satz: „Die Metalle entsprechen in ihrem Verhalten ganz den idealen Mosaikkristallen.“

Es unterliegt nun keinem Zweifel, daß alle Kristalle, die nicht exakt nach der dynamischen Theorie reflektieren, keine einheitliche, d. h. kohärente Gebilde sein können, sondern eine mehr oder weniger ausgeprägte Mosaikstruktur oder Verwerfung besitzen müssen. Es ist aber schon sehr bald von Bragg, James und Bosanquet⁵⁾ festgestellt worden, daß der Zustand eines Kristalls, d. h. der Grad seiner „Vollkommenheit“, sehr stark durch äußere Einwirkungen, wie z. B. mechanische Beanspruchungen oder Wärmebehandlung verändert werden kann, so daß die Reflexionsintensitäten beträchtlich beeinflußt werden. Man vergleiche hierzu auch das oben erwähnte Verfahren zur Herstellung „idealer Mosaikkristalle“ durch Abschmirgelung der betreffenden Kristallflächen. Da nun alle diese Untersuchungen an *natürlichen* Kristallen vorgenommen worden sind, deren Vorgeschichte fast immer unbekannt ist, so kann niemals mit Sicherheit angenommen werden, daß diese Kristalle nach ihrer Entstehung *keine* Veränderung ihres Gefüges durch äußere Einflüsse erlitten haben, z. B. durch plastische Verformung infolge des Gebirgsdruckes. Dies wurde in allen hier aufgeführten grundlegenden Arbeiten nicht herausgestellt. So zieht,

¹⁾ B. Davis u. W. M. Stempel, Phys. Rev. 17, 608, 1921; 19, 504, 1922; B. Davis u. H. Purks, ebenda 34, 181, 1929; Proc. Nat. Acad. Amer. 13, 419, 1927; W. Ehrenberg u. H. Mark, ZS. f. Phys. 42, 807, 1927; W. Ehrenberg u. G. v. Susich, ebenda 42, 823, 1927; S. K. Allison u. J. H. Williams, Phys. Rev. 35, 1930 u. a. — ²⁾ H. Seemann, Ann. d. Phys. (V) 6, 1, 1930. — ³⁾ M. Renninger, ZS. f. Krist. 89, 344, 1934. — ⁴⁾ F. Halla u. H. Mark, Röntgenographische Untersuchungen von Kristallen, S. 225–226. Leipzig Verlag J. A. Barth, 1937. — ⁵⁾ W. L. Bragg, R. W. James u. C. H. Bosanquet, Phil. Mag. 41, 309, 1921.

um nur *ein* Beispiel anzuführen, James¹⁾ in seinem zusammenfassenden Bericht aus seiner Diskussion über die Beeinflussung der Mosaikstruktur durch mechanische Beanspruchung keine Schlußfolgerungen bezüglich der Bewertung der bisherigen Untersuchungsergebnisse an natürlichen Kristallen. Auch aus der Vorgeschichte der von ihm untersuchten künstlich gezüchteten Aluminiumeinkristalle²⁾, die zur Freilegung der zu den Messungen notwendigen Kristallflächen abgeschliffen und abgeätzt worden waren, wird keine Schlußfolgerung auf eine mögliche Beeinflussung des Gefüges und damit der Reflexionsintensitäten gezogen. Zweifellos kann aber auch in diesem Fall an den zur Messung verwendeten Flächen infolge der mit dem Abschleifen verbundenen plastischen Verformung trotz des Abätzens nicht mehr mit einem ungestörten Gitter gerechnet werden.

Aus dieser kurzen Zusammenstellung geht mit genügender Deutlichkeit hervor, wie trotz Kenntnis des großen Einflusses mechanischer Beanspruchungen auf den Gefügezustand der Kristalle die röntgenographischen Untersuchungsergebnisse eine unzulässige Verallgemeinerung erfahren haben. Aus all diesen Messungen an undefiniertem Kristallmaterial³⁾ können unmöglich grundsätzliche Schlüsse bezüglich der Vollkommenheit des Gefügebauaufbaues bestimmter Kristallarten gezogen und diese in „Mosaik“- oder „Ideal“-Kristalle eingeteilt werden. Es bleibt dadurch völlig ungeklärt, ob die Mosaikstruktur eine allgemeine oder spezielle Erscheinung bestimmter Kristallarten ist, d. h. ob sie bei gewissen Kristallarten *immer* oder *nur unter bestimmten Bedingungen* (z. B. bei extrem rascher Erstarrung) *schon während des Wachstums*, also *primär*, entsteht, oder ob sie überhaupt erst *nach* dem Wachstum *durch äußere Einflüsse*, also *sekundär*, verursacht wird. Gerade dies ist aber zur Beurteilung und Kenntnis des Gefügebauaufbaues der Kristalle von höchster Wichtigkeit. Zwar gibt Ewald⁴⁾ an, daß der Einfluß des Wachstums (d. h. der Kristallisationsbedingungen) auf die Güte der Kristalle aus Messungen der Reflexionsbreite von Kirkpatrick und Ross⁵⁾ an Calcit (CaCO_3) und Steinsalz hervorgehe. In der genannten Arbeit wird aber lediglich über Messungen an besonders ausgesuchten natürlichen Kristallen berichtet, die zwar den nach der dynamischen Theorie berechneten Werten besonders nahekamen, woraus sich aber nichts über

¹⁾ R. W. James, ZS. f. Krist. **89**, 295, 1934. — ²⁾ R. W. James, G. W. Brindley u. R. G. Wood, Proc. Roy. Soc. London (A) **125**, 401, 1929 (Al).

— ³⁾ Auf die Ergebnisse von M. Renninger (ZS. f. Krist. **89**, 344, 1934) an einem künstlich gezüchteten Steinsalzkristall kommen wir weiter unten zu sprechen. — ⁴⁾ P. P. Ewald, Handb. d. Physik, 2. Aufl., XXIII/2, Kap. 4, Ziff. 23, S. 339. — ⁵⁾ P. Kirkpatrick u. P. A. Ross, Phys. Rev. **43**, 596, 1933.

den Einfluß der Wachstumsbedingungen auf die Mosaikstruktur aussagen läßt. Man kann hieraus nur soviel entnehmen, daß sich offensichtlich mit zunehmender Sorgfalt bei der Auswahl der untersuchten Kristall Exemplare die Reflexionseigenschaften derselben immer mehr denjenigen des idealen Kristalls nähern und die Mosaikstruktur mehr und mehr verschwindet.

Eine direkte Bestätigung dieser Auffassung haben schließlich die Untersuchungen von Renninger¹⁾ an einem künstlich gezüchteten Steinsalzkrystall erbracht, der ersten und bisher einzigen Untersuchung an einem hinsichtlich Entstehungs- und Vorgeschichte eindeutig definierten Steinsalzkrystall. Diese lieferte das bei dem betonten Mosaikcharakter des Steinsalzes überraschende Ergebnis, daß die kleinen, durch die Verzweigungsstruktur (makroskopische Verwerfung) gebildeten Kristallbereiche von etwa 0,1 bis 1 mm Lineardimension nach den dynamischen Gesetzen reflektierten, sich also wie Idealkristalle verhielten. Renninger hat diesen Befund so aufgefaßt, daß in diesen Bereichen keine „Mosaikstruktur“ mehr vorhanden wäre und der Kristall also nur noch die durch die Verzweigungsstruktur verursachten makroskopischen Verwerfungen und ferner atomare Fehlstellen enthalten würde, woraus er den Schluß zog, daß die „Mosaikstruktur“ nicht grundsätzlicher Natur sei. Er glaubte daher, durch bessere Wachstumsbedingungen auch die makroskopischen Verwerfungen noch verringern und damit die „idealen“ Bereiche noch vergrößern zu können. Dagegen hat er weitere Schlußfolgerungen über die Bewertung der früher an natürlichen Kristallen gewonnenen Ergebnisse hinsichtlich der möglichen Ursache der bei diesen beobachteten Mosaikstruktur völlig unterlassen. Beachtet man aber, wie in der gewissermaßen geschlossenen Untersuchungsreihe des Steinsalzes die röntgenographisch beobachtbare Mosaikstruktur bei den natürlichen Kristallen mit zunehmender Sorgfalt bei der Auswahl und Behandlung mehr und mehr abnimmt, um schließlich beim künstlich gezüchteten Kristall ganz zu verschwinden, d. h. röntgenographisch nicht mehr nachweisbar zu sein, so spricht dies sehr dafür, daß die bisher röntgenographisch in Erscheinung getretene Mosaikstruktur überhaupt nicht primärer Natur ist, d. h. niemals schon beim Wachstum der Kristalle entsteht. Sie scheint vielmehr eine rein sekundäre Erscheinung zu sein, verursacht durch (äußere) Einflüsse nach dem Wachstum, und zwar ausschließlich durch plastische Verformung. Wir vermuten daher, daß die bisher röntgenographisch beobachtete Mosaikstruktur ein reiner Verformungs-

¹⁾ M. Renninger, ZS. f. Krist. 89, 344, 1934.

effekt ist, und aus der Schmelze gezüchtete Einkristalle demnach keine derartige Mosaikstruktur besitzen ¹⁾).

Diese Annahme läßt sich zwar noch nicht zwingend beweisen, da noch zu wenig Untersuchungsmaterial an künstlich gezüchteten Einkristallen und damit über den Einfluß der Wachstumsbedingungen vorliegt. Doch sprechen die bekannten Beobachtungen und Untersuchungsergebnisse nicht dagegen. So kann z. B. noch ein weiteres Untersuchungsergebnis an einem künstlich gezüchteten Einkristall, nämlich an einem Seignettesalzkrystall ($\text{KNaC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4(\text{H}_2\text{O})$), von Kirkpatrick und Ross ²⁾ angeführt werden, dessen Reflexionskurven sehr gut mit den von der dynamischen Theorie geforderten übereinstimmten. Diesem Fall wurde jedenfalls deshalb bisher keine besondere Beachtung geschenkt, da entgegengesetzte Ergebnisse, wie beim Steinsalz, hier offenbar nicht vorlagen und man diese Kristallart auf Grund dieser einen Messung eben den „Ideal-kristallen“ zurechnete. Tatsächlich dürfte ihm aber fast dieselbe Bedeutung beizumessen sein, wie dem Befund an Steinsalz; denn auch hier erweist sich der *künstlich gezüchtete* Kristall sogleich als „*Idealkristall*“.

Eine weitere Stütze für unsere Auffassung ist das von Dehlinger und Gisen ³⁾ beobachtete Fehlen einer Anfangsschubspannung (kritischen Schubspannung) bei aus der Schmelze gezüchteten Al-Einkristallen, während durch Rekristallisation hergestellte Al-Einkristalle stets eine kritische Schubspannung aufwiesen. Diese Beobachtung macht es einerseits verständlich, daß bei *weichen, natürlichen* Kristallen stets eine mehr oder weniger ausgeprägte röntgenographisch in Erscheinung tretende Mosaikstruktur vorhanden ist; denn diese Kristalle verformen sich extrem leicht, d. h. schon bei äußerst geringen mechanischen Beanspruchungen. Man kann daher nur bei künstlich gezüchteten und vorsichtig behandelten Kristallen völliges „Fehlen“ der Mosaikstruktur erwarten, wie dies von Renninger bei Steinsalz gezeigt worden ist. Andererseits findet die Beobachtung von Ewald ⁴⁾, daß sich *harte natürliche* Kristalle, wie Diamant, Beryll und Topas, in ihrem Reflexionsvermögen durchweg mehr dem

¹⁾ Gegossenes vielkristallines Material kann unter Umständen eine derartige Mosaikstruktur aufweisen, verursacht durch die bei der Abkühlung auf Zimmertemperatur erfolgende, in den einzelnen kristallographischen Richtungen verschiedene große Kontraktion und die damit verbundene mechanische Beanspruchung und mögliche plastische Verformung einzelner Kristallite. —

²⁾ P. Kirkpatrick u. P. A. Ross, Phys. Rev. **43**, 596, 1933. — ³⁾ U. Dehlinger u. F. Gisen, Phys. ZS. **35**, 375, 1934; U. Dehlinger, ebenda **34**, 886, 1933; F. Gisen, ZS. f. Metallkde. **27**, 256, 1935. — ⁴⁾ P. P. Ewald, Handb. d. Physik XXIII/2, 2. Aufl., Kap. 4, Ziff. 17, S. 301.

Idealkristall nähern bzw. diesem gleichkommen und zudem ziemlich unempfindlich gegen mechanische Beanspruchungen sind, eine vernünftige Erklärung. Sie erleiden eben infolge ihrer großen Härte durch eine mechanische Beanspruchung nicht sofort eine plastische Verformung wie die weichen Kristalle. Während man also bisher die Unterschiede im Aufbau der harten und weichen Kristalle *auf grundsätzliche Wachstumsunterschiede* zurückführte, setzen wir nunmehr *für alle Kristallarten gleich ideales Wachstum* voraus und erklären die beobachteten Gefügeunterschiede *durch sekundäre Effekte nach dem Wachstum*.

Wenn somit einerseits sehr wahrscheinlich gemacht werden konnte, daß die bisher röntgenographisch beobachtete Mosaikstruktur nur eine sekundäre Erscheinung ist, verursacht durch plastische Verformung der Kristalle nach ihrer Entstehung, so ist damit noch keineswegs geklärt, ob *in unverformten Einkristallen überhaupt keine Mosaikstruktur vorhanden ist oder ob eine auch hier vorhandene Mosaikstruktur sich infolge viel geringerer oder andersartiger Ausbildung* (größere oder besonders geformte Mosaikblöcke) *jedlichem röntgenographischen Nachweis entzieht*. Die Beantwortung dieser Frage hängt eng mit der folgenden zusammen: Wo hört die Gültigkeit der kinematischen Theorie auf und wo beginnt die der dynamischen Theorie? Hierauf werden wir im Zusammenhang mit der „Wachstums-Lamellenstruktur“ nunmehr näher einzugehen haben.

IV. Die Baufehler von röntgenographisch „ideal-vollkommenen“ Kristallen.

Wird auf Grund der Gültigkeit der dynamischen Reflexionsgesetze bei einem Kristall dieser als „Idealkristall“ erkannt, so bedeutet dies nach der üblichen Auffassung nur, daß er *keine* (röntgenographisch nachweisbare) *Mosaikstruktur* besitzt. Er kann aber noch Gitterstörungen durch atomare Fehlstellen (Gitterlücken oder falsch eingebaute eigene oder Fremdatome) aufweisen, die infolge ihrer kleinen Dimensionen innerhalb des kohärenten Gitters röntgenographisch nicht erfaßt werden können. Außerdem kann auch noch eine mehr oder weniger stark ausgeprägte makroskopische Verwerfung vorhanden sein, die sich röntgenographisch nur noch bei Untersuchungen größerer Kristallbereiche nach der Divergenzmethode oder auch schon optisch bemerkbar macht, wie z. B. im Fall des von Renninger¹⁾ untersuchten künstlich gezüchteten Steinsalzkristalls. Die einzelnen Gitterblöcke der makroskopischen Verwerfung waren in diesem Fall von 0,1 bis 1 mm Lineardimension und hatten eine gegenseitige Verkantung von

¹⁾ M. Renninger, ZS. f. Krist. **89**, 344, 1934.

der Größenordnung 1 Minute, verhielten sich aber im einzelnen röntgenographisch als „ideale“ Kristallbereiche (d.h. sie reflektierten nach der dynamischen Theorie). Durch eine Verringerung bzw. Vermeidung der makroskopischen Verwerfung, z. B. durch Verbesserung der Wachstumsbedingungen, glaubt Renninger¹⁾ noch eine wesentliche Vergrößerung der „idealen“ Bereiche erzielen zu können. Dieser Ansicht gibt auch James Ausdruck, wenn er in seinem oben erwähnten zusammenfassenden Bericht schreibt²⁾: „Wir können uns denken, daß der Mosaikkristall allmählich in den vollkommenen Kristall übergeht durch Zunahme der Größe der vollkommenen Bereiche, bis einer von diesen den ganzen Kristall erfüllt.“

Diesen röntgenographischen Befunden und allgemeinen Überlegungen stehen jedoch nunmehr die unmittelbaren mikroskopischen Beobachtungen des Verfassers³⁾ an künstlich nach verschiedenen Verfahren hergestellten Metallkristallen gegenüber. Danach ist bei allen untersuchten Metallkristallen, unabhängig davon, ob sie aus der Dampfphase, der Schmelze oder durch Rekristallisation im festen Zustand entstanden waren, eine *Lamellenstruktur von der Größenordnung 10^{-3} bis 10^{-4} mm Lamellendicke* festgestellt worden. Diese Lamellenstruktur fand eine starke Stütze durch frühere mikroskopische Beobachtungen anderer Forscher unmittelbar an wachsenden Kristallen. So haben Volmer und Mitarbeiter⁴⁾ das Wachstum dieser Lamellen an Ag, Hg, Cd und Sn, sowie an PbJ_2 unmittelbar mikroskopisch beobachten können, und zwar sowohl bei der Elektrolyse aus wässrigen Lösungen wie aus der Dampfphase. Inzwischen konnte der Verfasser noch einige weitere ähnliche Beobachtungen in der Literatur feststellen. Es sind dies ausführliche Untersuchungen von Kohlschütter und Torricelli⁵⁾ an Silberkristallen während der elektrolytischen Abscheidung aus wässriger Silbernitratlösung; ferner mikroskopische Wachstumsbeobachtungen an NaCl und KCl von Gyulai⁶⁾. *In beiden Arbeiten wird der Lamellenwachstumsmechanismus bestätigt, doch sind die letztgenannten Untersuchungen von ganz besonderem Interesse, da sie gerade das röntgenographisch so eingehend untersuchte Steinsalz betreffen. Auch die heteropolaren Kristalle besitzen danach genau die gleiche Lamellenstruktur wie die Metallkristalle, und auch hier erwies sich diese Struktur völlig unabhängig davon, ob die Kristallisation aus übersättigten wässrigen Lösungen, aus der Schmelze*

¹⁾ M. Renninger, ZS. f. Krist. 89, 344, 1934. — ²⁾ R. W. James, ebenda 89, 305, 1934, Abschn. 6. — ³⁾ L. Graf, ZS. f. Elektrochem. u. phys. Chem. 48, 181, 1942. — ⁴⁾ M. Volmer, Die chem. Reaktion. Bd. IV: Kinetik der Phasenbildung. Leipzig, Verlag Th. Steinkopff, 1939. — ⁵⁾ V. Kohlschütter u. A. Torricelli, ZS. f. Elektrochem. 48, 213, 1932. — ⁶⁾ Z. Gyulai, ZS. f. Krist. 91, 142, 1935.

oder aus der Dampfphase erfolgte. Die Bindungsart der Atome im Kristall ist somit ohne Einfluß auf den lamellaren Wachstumsvorgang. Damit tritt die grundsätzliche Natur der Lamellenstruktur noch deutlicher und universaler in Erscheinung. Man hat also mit ziemlicher Sicherheit in allen Kristallen mit metallischer und heteropolarer Bindung — abgesehen von solchen mit extremen Schichtgittern¹⁾ — infolge dieses Wachstumsvorganges einen lamellaren Aufbau mit einer Lamellendicke von der Größenordnung 10^{-3} bis 10^{-4} mm anzunehmen.

Diese Lamellenstruktur ist daher auch in allen auf Grund röntgenographischer Untersuchungen als „ideal“ gefundenen Kristallen vorhanden, also z. B. auch in den von Renninger²⁾ als „ideal“ festgestellten, d. h. nach der dynamischen Theorie reflektierenden, etwa 0,1 bis 1 mm großen Kristallblöcken des von ihm untersuchten künstlich gezüchteten Steinsalzkristalls. Wir kommen so zu einer überraschenden Diskrepanz zwischen mikroskopischem und röntgenographischem Befund, doch ist in diesem Fall der mikroskopische Befund nicht anzuzweifeln. Wie sind danach die röntgenographischen Ergebnisse zu bewerten? Hier gibt es zwei Möglichkeiten: entweder es erfolgt schon bei viel kleineren kohärenten Gitterbereichen als man bisher angenommen hat, eine Reflexion nach den dynamischen Gesetzen, wobei möglicherweise weniger die Form als die Größe des Volumens derselben von Einfluß ist, oder die Kohärenzstörungen an den Lamellengrenzen sind so gering, daß sie die Intensität der reflektierten Strahlung nicht oder nur sehr wenig beeinflussen.

Hierüber läßt sich aus den bekannten röntgenographischen Untersuchungen keine Entscheidung treffen. Da die Halbwertsbreite (= Gesamtbreite der Reflexionskurve in halber Höhe) bei Idealkristallen sich nach der dynamischen Theorie zu etwa 8 Sekunden berechnet³⁾, während Renninger²⁾ bei seinem künstlich gezüchteten Steinsalzkristall etwa 14 Sekunden findet, kann aus dieser geringen Linienverbreiterung die Teilchengröße nicht mehr mit Sicherheit nach der Formel von Scherrer⁴⁾ und v. Laue⁵⁾

¹⁾ Vgl. hierzu die mikroskopischen Untersuchungen von R. Marcelin, *Ann. Physique* (9) **10**, 185, 189, 1918; A. Marcelin u. S. Boudin, *Compt. rend.* **190**, 1496, 1930; **191**, 31, 1930; L. Kowarski, Thèses, Univ. de Paris (Paris 1935) an Glimmer und Paratoluidin, die bei Spaltung bzw. im Auf- und Abbau diskontinuierliche Dickenunterschiede von 1 bis 2 Molekülschichten aufwiesen. —

²⁾ M. Renninger, *ZS. f. Krist.* **89**, 344, 1934. — ³⁾ Nach M. Renninger (*ZS. f. Krist.* **89**, 344, 1934); dort ist die „Halbweite“ angegeben, das ist die halbe Breite der Reflexionskurve in halber Höhe, also 4 Sekunden. — ⁴⁾ Siehe R. Zsigmondy, *Kolloidchemie*. Leipzig, Verlag O. Spamer, 1920. — ⁵⁾ M. v. Laue, *ZS. f. Krist.* **64**, 115, 1926.

berechnet werden. Die sich hieraus für den künstlich gezüchteten Steinsalzkristall ergebende Teilchengröße von etwa 10^{-3} mm kann höchstens als untere Grenze derselben aufgefaßt werden. Dieser Wert fällt aber mit der Größe der Lamellendicke gerade zusammen, so daß sich hieraus kein Anhaltspunkt ergibt.

Auch die Intensitätsverhältnisse der reflektierten Strahlung lassen nicht mit Sicherheit ausschließen, daß bereits die geringe Dicke *einer* Lamelle für eine Reflexion nach den dynamischen Gesetzen ausreicht. Denn die Grenze des Gültigkeitsbereichs der kinematischen bzw. der dynamischen Theorie kann wegen der nur sehr ungenauen Erfassung der primären Extinktion nur ganz roh angegeben werden¹⁾. Sie liegt schätzungsweise bei einer Teilchengröße zwischen 10^{-1} bis 10^{-3} mm, d. h. die dynamische Theorie wird sicher bei kohärenten Bereichen von 10^{-1} mm gelten, sie kann aber auch schon bei einer Teilchengröße von 10^{-3} mm erfüllt sein. Außerdem ist noch ein gewisser Einfluß der besonderen Form der kohärenten Bereiche und ihre Lage zur Reflexionsebene (Lamellenebenen senkrecht oder parallel zu ihr) möglich. Jedenfalls gehen die Angaben von Renninger²⁾ und Ewald³⁾ über die Größe der kohärenten Bereiche in dem von ihnen untersuchten „idealen“, d. h. nach der dynamischen Theorie reflektierenden Steinsalzkristall beträchtlich darüber hinaus, was sich zur Zeit auf Grund unserer Kenntnisse über den Gültigkeitsbereich der kinematischen bzw. dynamischen Theorie aus der Intensität der reflektierten Strahlung aussagen läßt.

Dagegen macht der besondere, unmittelbar beobachtete Wachstumsmechanismus der Kristalle, wobei eine Lamelle auf der andern *nacheinander* entsteht, eine gewisse (geringe) Kohärenzstörung zwischen den Lamellen sehr wahrscheinlich. Außerdem spricht hierfür das Sichtbarwerden der Lamellen nach plastischer Verformung auf vorher mikroskopisch homogenen Flächen [vgl. die „Verformungsstrukturen“ in⁴⁾]; dies ist — unter Voraussetzung einer günstigen Lage der Wachstumslamellen zu den wirksamen Translationselementen⁴⁾ — nur dann möglich, wenn an den Lamellengrenzflächen der normale Ablauf des Verformungsmechanismus (das „Wandern der Versetzungen“) infolge irgendwelcher Gitterstörungen gehemmt ist, so

¹⁾ M. v. Laue, Physik und Chemie und ihre Anwendungen in Einzeldarstellungen. Bd. VI: Röntgeninterferenzen. (4. Kap., § 23, S. 214; 5. Kap., § 31, S. 307.) Leipzig, Akad. Verlagsges., 1941. — ²⁾ M. Renninger, ZS. f. Krist. **89**, 344, 1934. — ³⁾ P. P. Ewald u. M. Renninger, Papers and Discussions of the internat. Conf. on Physics, London B II, S. 57, 1934; siehe auch R. Brill u. M. Renninger, Ergebn. d. techn. Röntgenkunde **6**, 141, 1938. — ⁴⁾ L. Graf, ZS. f. Elektrochem. u. phys. Chem. **48**, 181, 1942.

daß sich die Lamellen bis zu einem gewissen Grade unabhängig voneinander und daher verschieden stark verformen, wodurch sie sich gegeneinander abheben.

Die Wachstums-lamellenstruktur hat sich jedenfalls bis jetzt dem röntgenographischen Nachweis entzogen, und ihr Vorhandensein auch in „Idealkristallen“ läßt sich durch die bekannten röntgenographischen Untersuchungsergebnisse nicht ausschließen. Die mikroskopischen Beobachtungen sprechen aber eindeutig für ihr Vorhandensein in allen Salz-¹⁾ und Metalkristallen^{2) 3) 4)}, abgesehen von solchen mit ausgesprochenen Schichtgittern, über die abweichende Ergebnisse vorliegen⁵⁾. Sie ist daher als eine grundsätzliche Fehlstruktur aufzufassen, verursacht durch den besonderen Wachstumsmechanismus der Kristalle. Die Lamellendicke ist im allgemeinen von der Größenordnung 10^{-3} bis 10^{-4} mm und von den Erstarrungsbedingungen etwas abhängig^{2) 6)}. Sie ist keine Konstante in physikalischem Sinn, da sie durch den offenbar statistischen Schwankungen unterworfenen „Lamellenkeim“ bestimmt wird, über dessen Entstehung sich zur Zeit noch wenig aussagen läßt²⁾.

V. Die Unterschiede der „Mosaikstruktur“ in gegossenem, plastisch verformtem und rekristallisiertem Material.

Es spricht nichts dafür, in gegossenem Material außer der „Verzweigungs- oder Lineagestruktur“, der „Wachstums-Lamellenstruktur“ und den „atomaren Fehlstellen“, deren Entstehungen sich auf bestimmte bekannte oder mögliche Ursachen zurückführen lassen, noch weitere Fehler im Kristallgitter anzunehmen, also etwa noch eine „Mosaikstruktur“, wie eingangs beschrieben. Hierfür liegt bis jetzt nicht der geringste Anhalt vor und auch theoretische Überlegungen machen das Vorhandensein einer weiteren Fehlstruktur weder wahrscheinlich noch erklärlich. Es ist daher wohl zulässig und auch zweckmäßig, die schon eingeführte Bezeichnung

¹⁾ Z. Gyulai, ZS. f. Krist. **91**, 142, 1935. — ²⁾ L. Graf, ZS. f. Elektrochem. u. phys. Chem. **48**, 181, 1942. — ³⁾ M. Volmer, Die chem. Reaktion. Bd. IV: Kinetik der Phasenbildung. Leipzig, Verlag Th. Steinkopff, 1939. — ⁴⁾ V. Kohlschütter u. A. Torricelli, ZS. f. Elektrochem. **48**, 213, 1932. — ⁵⁾ Vgl. hierzu die mikroskopischen Untersuchungen von R. Marcelin, Ann. Physique (9) **10**, 185, 189, 1918; A. Marcelin u. S. Boudin, Compt. rend. **190**, 1496, 1930; **191**, 31, 1930; L. Kowarski, Thèses, Univ. de Paris (Paris 1935) an Glimmer und Paratoluidin, die bei Spaltung bzw. im Auf- und Abbau diskontinuierliche Dickenunterschiede von 1 bis 2 Molekülschichten aufwiesen. — ⁶⁾ M. Straumanis u. N. Brakes, ZS. f. phys. Chem. (B) **30**, 117, 1935.

„Mosaikstruktur“ auf die Wachstums-Lamellenstruktur zu übertragen und außerdem auch für die durch plastische Verformung entstehende weitere Unterteilung der Wachstumslamellen in kleinere kohärente Bereiche, sowie für die bei der Rekristallisation entstehende Wachstums-Lamellenstruktur anzuwenden bzw. weiterhin beizubehalten. Wo notwendig, können die etwas verschiedenartigen Mosaikstrukturen der drei Gefügezustände zur einfachen Unterscheidung kurz als „Wachstums-Mosaikstruktur“, „Verformungs-Mosaikstruktur“ und „Rekristallisations-Mosaikstruktur“ bezeichnet werden.

Damit kann nunmehr die „Mosaikstruktur“ quantitativ sehr viel genauer als bisher beschrieben werden und zudem ist es möglich, auch gewisse *qualitative* Eigenschaften und Unterschiede ihrer Ausbildung in den drei Gefügezuständen anzugeben. Während man bisher allgemein angenommen hat [vgl. z. B. Renninger¹⁾ oder James²⁾], daß die Mosaikstruktur kein Kristallfehler von grundsätzlicher Natur sei, sondern mit zunehmender Verbesserung der Wachstumsbedingungen immer geringer würde, um schließlich, wenn die Grenzen der kohärenten Bereiche mit den äußeren Begrenzungsflächen des Kristalls zusammenfallen, ganz zu verschwinden, *so stellt nunmehr* nach der obigen Definition *die Mosaikstruktur* in Form der Lamellenstruktur einen *grundsätzlichen* Kristallbaufehler dar. Außerdem liegt damit die Größe der Mosaikstruktur in gegossenem Material ziemlich eindeutig fest, da die Lamellendicke nur sehr wenig veränderlich ist³⁾ 4). Sie besitzt also eine *untere Grenze*, denn sie kann *nie geringer* bzw. die *kohärenten Bereiche* können *nie größer* werden als die *Wachstumslamellen*. Andererseits kann sich aber die Mosaikstruktur auch *nicht beliebig stark* ausbilden, d. h. es lassen sich die kohärenten Gitterbereiche durch eine plastische Verformung nicht beliebig weit unterteilen. Dies ist den röntgenographischen Untersuchungen von Dehlinger und Kochendörfer⁵⁾ an gewalztem Kupferblech zu entnehmen, wobei die kleinste Teilchengröße etwa $4 \cdot 10^{-5}$ mm bei allen Walzgraden oberhalb 5% betrug. Die Mosaikstruktur besitzt *also eine untere und obere Grenze* und ist damit quantitativ sehr genau erfaßt. Zwischen diesen im gegossenen bzw. stark plastisch verformten Zustand auftretenden Extremwerten liegt offensichtlich die Mosaikstruktur des rekristallisierten Materials, denn diese ist sicher stärker

¹⁾ M. Renninger, ZS. f. Krist. 89, 344, 1934. — ²⁾ R. W. James, ebenda 89, 295, 1934. — ³⁾ L. Graf, ZS. f. Elektrochem. u. phys. Chem. 48, 181, 1942. — ⁴⁾ M. Straumanis u. N. Brakcs, ZS. f. phys. Chem. (B) 30, 117, 1935. — ⁵⁾ U. Dehlinger u. A. Kochendörfer, ZS. f. Krist. 101, 134, 1939; ZS. f. Metallkde. 31, 231, 1939.

als in gegossenem Material, wie Dehlinger und Gisen ¹⁾ röntgenographisch festgestellt haben und wie wahrscheinlich auch unmittelbar aus den mikroskopischen Untersuchungen hervorgeht²⁾. Damit stimmen diese Befunde mit der bisherigen³⁾ ¹⁾ ⁴⁾ quantitativen Unterscheidung der Mosaikstruktur in den drei Gefügezuständen völlig überein. Außerdem lassen sich jetzt aber noch gewisse qualitative Unterschiede angeben und damit neue Gesichtspunkte zur Erklärung der Unterschiede in den strukturabhängigen Eigenschaften der drei Gefügezustände gewinnen. Dies soll im folgenden kurz versucht werden.

1. *Die Wachstums-Mosaikstruktur.* Bei einer qualitativen Beschreibung wollen wir hier nicht nur von der Größe, sondern auch von der Form der „Mosaikblöcke“, d. h. der kohärenten Bereiche, absehen und uns vorzugsweise für die Beschaffenheit ihrer Grenzflächen interessieren, die zweifellos einen wesentlichen Einfluß auf die Eigenschaften des Materials haben werden. Wie oben ausgeführt, muß man wohl annehmen, daß an den Grenzen der Wachstums lamellen des gegossenen Materials gewisse Gitterstörungen vorliegen, doch läßt sich über die Art derselben heute noch wenig aussagen und es ist noch nicht einmal ganz sicher erwiesen, ob und in welchem Grade sie Kohärenzstörungen für Röntgenstrahlen darstellen. Auf jeden Fall können diese Störungen nur gering sein, da sie sich ja nur beim Aufwachsen der Lamellen aufeinander bilden und daher nur in geringen Übergangs- und Orientierungsfehlern bestehen. Das Kristallgitter wird sich wahrscheinlich nicht völlig gleichmäßig (d. h. translatorisch) von Lamelle zu Lamelle fortsetzen, sondern jeweils an den Lamellengrenzen geringe Verschiebungen aufweisen. Die sich hierbei an manchen Stellen ergebenden geringen Abweichungen der Grenzatome von der Normalgitterlage bilden keine groben, mehrere Atomschichten tief ins Gitter hineinwirkende Störungen, was auch schon durch die Anlagerung der Atome bei Temperaturen nahe des Schmelzpunktes ausgeschlossen ist. Der Zustand des Gitters an den Lamellengrenzen ist daher thermodynamisch überaus stabil.

Diese Auffassung der Gitterstörungen an den Lamellengrenzflächen wird durch die Eigenschaften des Gußmaterials bestätigt. Am bemerkenswertesten ist das Fehlen jeglicher Anfangsschubspannung (kritischen Schub-

¹⁾ U. Dehlinger u. F. Gisen, Phys. ZS. **35**, 375, 1934; U. Dehlinger, ebenda **34**, 836, 1933; F. Gisen, ZS. f. Metallkde. **27**, 256, 1935. —

²⁾ L. Graf, ZS. f. Elektrochem. u. phys. Chem. **48**, 181, 1942. — ³⁾ U. Dehlinger, Chemische Physik der Metalle und Legierungen. Leipzig, Akad. Verlagsges., 1939; U. Dehlinger u. P. Wiest, ZS. f. Metallkde. **26**, 150, 1934; H. Bumm, Metallwirtschaft **14**, 429, 1935. — ⁴⁾ U. Dehlinger, Die Physik **5**, 9–11, 1937.

spannung) bei der plastischen Verformung von aus der Schmelze gezüchteten Einkristallen¹⁾. Nach Taylor²⁾ hemmt jede gröbere Gitterstörung die Wanderung der Versetzungen und damit den Verformungsmechanismus, was somit an den Lamellengrenzen nicht der Fall ist (vgl. hierzu das rekristallisierte Material!). Ferner ist die Diffusionsgeschwindigkeit und damit auch die Ausscheidungsgeschwindigkeit einer übersättigten Phase in Gußmaterial äußerst gering^{3) 4)} und die Lamellengrenzflächen treten hierbei nie merklich als Ausscheidungsorte auf⁴⁾, wie auch eigene (unveröffentlichte) Versuche an Cu-übersättigten Ag-Cu-Mischkristallen ergeben haben. Die besonders bei Gußmaterial gleichmäßig innerhalb der Kristallite auftretende sogenannte „mikroskopisch homogene“ Ausscheidung erfolgt in völlig regelloser, statistischer Verteilung ohne Bevorzugung der Lamellengrenzen. Da Gitterstörungen und freie Oberflächen immer beschleunigend auf die Diffusion bzw. erleichternd auf die Ausscheidung wirken, können die Lamellengrenzen weder als Orte stärkerer Gitterstörungen noch als innere freie Oberflächen aufgefaßt werden. Sie bilden also eine äußerst geringe, sich in den strukturabhängigen Eigenschaften kaum merklich auswirkende Störung im Gitter des Gußmaterials.

2. Die Verformungs-Mosaikstruktur. Wird Gußmaterial plastisch verformt, dann entstehen außer hohen elastischen Gitterverzerrungen auch Kohärenztrennungen an allen den Stellen, an denen eine Abgleitung des Gitters stattgefunden hat. Diese Kohärenztrennungen sind somit identisch mit den sichtbaren und unsichtbaren Gleitlinien. Da eine Abgleitung auf den Lamellengrenzflächen wegen der dort befindlichen Gitterstörungen nicht erfolgen kann bzw. die Translationselemente nur selten parallel zu den Wachstumslamellen liegen, entstehen diese neuen Kohärenztrennungen stets innerhalb der Wachstumslamellen, die hierdurch eine Längs- oder Querunterteilung in kleinere Kohärenzbereiche erfahren. Die „Mosaikstruktur“ vergrößert sich also durch plastische Verformung.

Die dabei entstehenden neuen Grenzflächen im Gitter sind jedoch ganz anders beschaffen als die Lamellengrenzflächen. Grundsätzlich unterscheidet sich ja der plastisch verformte Zustand vom gegossenen Zustand durch erhöhte freie Energie, da ein gewisser Teil der Verformungsenergie

¹⁾ U. Dehlinger u. F. Gisen, Phys. ZS. **35**, 375, 1934; U. Dehlinger, ebenda **34**, 836, 1933; F. Gisen, ZS. f. Metallkde. **27**, 256, 1935. — ²⁾ G. I. Taylor, ZS. f. Krist. **89**, 375, 1934. — ³⁾ U. Dehlinger, Chemische Physik der Metalle und Legierungen. Leipzig, Akad. Verlagsges., 1939; U. Dehlinger u. P. Wiest, ZS. f. Metallkde. **26**, 150, 1934; H. Bumm, Metallwirtschaft **14**, 429, 1935. — ⁴⁾ L. Graf, ZS. f. Metallkde. **30**, 59, 1938; G. Wassermann, ebenda, S. 62.

im Material aufgespeichert worden ist. Die Aufspeicherung erfolgt erstens *innerhalb* der kohärenten Bereiche als elastische Verzerrung derselben und zweitens an den neu gebildeten Kohärenzgrenzen, an denen sich nach den bisherigen Untersuchungen der Hauptteil der aufgespeicherten Energie befinden soll¹⁾. Man kann daher nicht annehmen, daß die theoretische Idealvorstellung der reinen Schiebegleitung, wonach die Durchwanderung der Versetzungen in *einer* Atomebene ohne jegliche zurückbleibende Gitterstörung stattfinden soll, der Wirklichkeit entspricht. Dann dürften nämlich bei der Abgleitung weder Kohärenztrennungen noch Energieaufspeicherungen erfolgen, was aber zweifellos auch bei reiner Schiebegleitung der Fall ist. Man hat also sicher mit beträchtlichen Gitterstörungen in den Gleitebenen zu rechnen, besonders, da an manchen Stellen innerhalb der Gleitebenen die Abgleitung nicht durch Wandern von Versetzungen, sondern unter gewaltsamer Trennung der kohärenten Gitterbereiche erzwungen wird. Die Abgleitung erfolgt daher auch nicht nur in *einer* Gitterebene, sondern in einer Schicht, die mehrere, meist sogar sehr viele Gitterebenen umfaßt²⁾, deren Atome zum Teil stark aus ihrer Normallage verzerrt werden. Die durch plastische Verformung entstandenen Kohärenzgrenzen unterscheiden sich somit von den Lamellengrenzen durch stark erhöhte Gitterenergie, was auch in dem besonderen Verhalten derselben zum Ausdruck kommt: sie sind Stellen stark erhöhter Diffusions- und Ausscheidungsgeschwindigkeit, wie z. B. Untersuchungen von Wassermann an Al-Cu-Legierungen, sowie eigene Versuche an Be-übersättigten Ni-Be-Einkristallen gezeigt haben³⁾. Sie befinden sich daher in einem thermodynamisch instabilen Zustand, der bei höherer Temperatur durch Rekristallisation in einen thermodynamisch stabileren Zustand übergeht.

3. Die Rekristallisations-Mosaikstruktur. Bei der Rekristallisation eines plastisch verformten Materials findet eine völlige Neukristallisation im festen Zustand bei Temperaturen weit unterhalb des Schmelzpunktes der betreffenden Stoffe statt. Dies ist unmittelbar aus der mikroskopischen Beobachtung zu entnehmen¹⁾. Ein direkter Beweis dafür, daß auch der Wachstumsmechanismus bei der Rekristallisation *grundsätzlich* der gleiche sein muß wie bei der Kristallisation aus der Schmelze, ergab sich aus der

¹⁾ Vgl. hierzu die zusammenfassende Darstellung bei W. G. Burgers, Handb. d. Metallphysik III, Rekristallisation, verformter Zustand und Erholung. Leipzig, Akad. Verlagsges., 1941. — ²⁾ A. Kochendörfer, Reine und angewandte Metallkunde in Einzeldarstellungen. Bd. VII: Plastische Eigenschaften von Kristallen und metallischen Werkstoffen. Berlin, Springer, 1941. — ³⁾ L. Graf, ZS. f. Metallkde 30, 59, 1938; G. Wassermann, ebenda S. 62.

Beobachtung, daß auch rekristallisiertes Material eine Lamellenstruktur von der gleichen Größenordnung wie gegossenes Material besitzt¹⁾ (vgl. Fig. 8 und 9). Trotzdem entspricht der rekristallisierte Zustand keineswegs

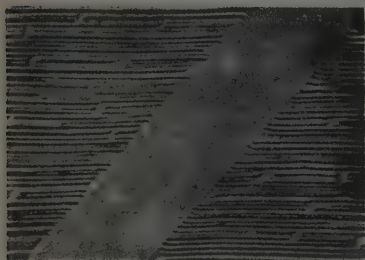


Fig. 8. Linienstruktur auf rekristallisiertem Ag-Blech mit Zwillingslamelle.
Vergr.: 1100:1.

wieder dem gegossenen Zustand, sondern es bestehen bemerkenswerte Unterschiede in den strukturabhängigen Eigenschaften. So zeigt rekristallisiertes Material eine viel höhere Diffusionsgeschwindigkeit und eine ganz andersartige Kinetik der Ausscheidung einer übersättigten Phase als Gußmaterial²⁾. Die Ausscheidung verläuft hier vorwiegend „mikroskopisch inhomogen“, d. h. nicht gleichzeitig im ganzen Kristallit, sondern



Fig. 9. Linienstruktur auf rekristallisiertem Pt-Blech
(nach Raub). Vergr.: 1050:1.

von dessen Rand aus beginnend allmählich nach innen fortschreitend [zweiphasig!²⁾]. Ferner ist das Bestehen einer Anfangsschubspannung (kritischen Schubspannung) in Rekristallisations-Einkristallen besonders hervor-

zuheben, während sie in gegossenen Kristallen völlig fehlt³⁾. Man muß daher bei grundsätzlich gleichem Wachstumsmechanismus doch gewisse zusätzliche Störungen in rekristallisiertem Material annehmen, bedingt durch die viel geringere Beweglichkeit der Atome beim Rekristallisationsvorgang ge-

¹⁾ L. Graf, ZS. f. Elektrochem. u. phys. Chem. **48**, 181, 1942. —
²⁾ U. Dehlinger, Chemische Physik der Metalle und Legierungen. Leipzig. Akad. Verlagsges., 1939; U. Dehlinger u. P. Wiest, ZS. f. Metallkde. **26**, 150, 1934; H. Bumm. Metallwirtschaft **14**, 429, 1935. — ³⁾ U. Dehlinger u. F. Gisen, Phys. ZS. **35**, 375, 1934; U. Dehlinger, Phys. ZS. **34**, 836, 1933; F. Gisen, ZS. f. Metallkde. **27**, 256, 1935.

flächen hier wesentlich stärker sind als bei Gußmaterial. Ferner wurde bei der Untersuchung rekristallisierter Silberbleche mitunter eine viel größere und auch etwas anders ausgebildete (ungleichmäßigere) Lamellenstruktur mit einer Lamellendicke bis zu etwa $5 \cdot 10^{-3}$ mm beobachtet [vgl. Fig. 10¹⁾]. Bei genauer Betrachtung der Aufnahmen kann man außerdem an den etwas hervorstehenden Seitenflächen der groben Lamellen eine wesentlich feinere Lamellierung erkennen, die größenordnungsmäßig den Wachstumslamellen entspricht (vgl. Fig. 11). Abgesehen davon, daß es sich hierbei nur um eine sogenannte Ätzstruktur, also um einen reinen Ätzeffekt handeln könnte, läßt sich dieser Befund auch so erklären, daß in rekristallisiertem Material die Lamellen eine wesentlich geringere Ausdehnung in der Lamellenebene und damit also zahlreiche,

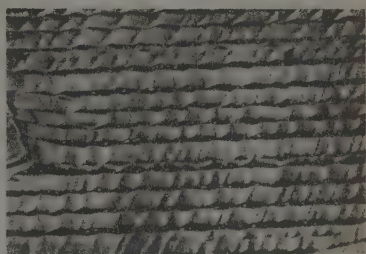


Fig. 10. Grobe Linienstruktur auf rekristallisiertem Ag-Blech. Vergr.: 1100:1.

die Lamellen unterteilende „Quergrenzen“ besitzen, was man kurz mit „mikroskopischer Verwerfung“ bezeichnen könnte. Dagegen erstrecken sich in gegossenem Material die Lamellen bis zu den Grenzen der „makroskopischen Verwerfungen“. Eine sichere Entscheidung hierüber kann an Hand des vorliegenden

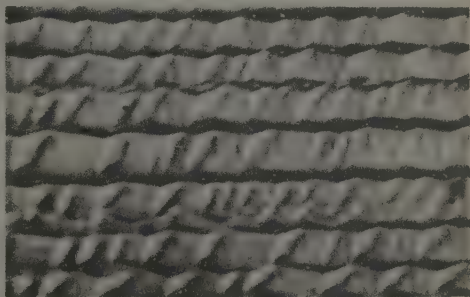


Fig. 11. Ausschnitt aus Fig. 10. nachvergr. auf etwa 2300:1.

Untersuchungsmaterials noch nicht getroffen werden²⁾. Doch sind schon bei Annahme stärkerer Störungen an den Lamellengrenzflächen die qualitativen Unterschiede in den strukturabhängigen Eigenschaften zwischen rekristallisiertem und gegossenem Material gut verständlich. Denn diese Unterschiede, wie z. B. erhöhte Diffusions- und Ausscheidungsgeschwindigkeit oder das Bestehen einer Anfangsschubspannung

¹⁾ L. Graf, ZS. f. Elektrochem. u. phys. Chem. 48, 181, 1942. — ²⁾ Vgl. hierzu E. Zehnder u. A. Kochendörfer, erscheint demnächst in den Naturwissenschaften.

(kritischen Schubspannung) liegen eindeutig im Sinn gröberer Kohärenzstörungen.

Die Stabilität des rekristallisierten Gefüges (der Störungen) ist dabei so groß, daß es sich erst durch Aufschmelzen beseitigen läßt. Eine wesentliche Änderung des Gefüges durch Wärmebehandlung unterhalb des Schmelzpunktes des betreffenden Stoffes ist nicht zu erwarten, desgleichen nicht durch das in vielkristallinem, rekristallisiertem Material bei höheren Temperaturen erfolgende Kornwachstum, d. h. das Weiterwachsen der Kristallite auf Kosten ihrer Nachbarn [sogenannte Oberflächenrekristallisation¹⁾]. Hierbei können wohl Einkristalle entstehen, doch haben diese grundsätzlich noch die gleichen Eigenschaften wie die primär, d. h. bei der sogenannten Bearbeitungsrekristallisation unmittelbar aus dem verformten Gefüge entstandenen Kristalle^{2) 3)}.

Wir haben damit in den Mosaikstrukturen der drei Gefügezustände außer den quantitativen auch ganz bestimmte qualitative Unterschiede feststellen können. Wenn dies auch erst einen Anfang zu ihrer endgültigen Klärung darstellt, so erscheinen die vorliegenden Ergebnisse doch bereits geeignet, für die qualitativen Unterschiede in den strukturabhängigen Eigenschaften der drei Gefügezustände eine gewisse Erklärung zu geben. Inwieweit dadurch die von Dehlinger²⁾ sowie Kochendörfer⁴⁾ gegebene, nur auf die quantitativen Unterschiede zurückgeführte und durch eingehende Rechnungen des letzteren wahrscheinlich gemachte Erklärung dieser Erscheinungen berührt wird, wird in einer besonderen Untersuchung klargelegt werden.

VI. Zusammenfassung.

1. Es wird nachgewiesen, daß die röntgenographischen Untersuchungsergebnisse über die Mosaikstruktur der Kristalle in unzulässiger Weise verallgemeinert worden sind, woraus sich über den Gefügebau der Kristalle falsche Vorstellungen entwickelt haben. Eine richtige Bewertung derselben macht es sehr wahrscheinlich, daß die bisher röntgenographisch

¹⁾ W. G. Burgers, Handb. d. Metallphysik III, Rekristallisation, verformter Zustand und Erholung. Leipzig, Akad. Verlagsges., 1941; L. Graf, ZS. f. Metallkde. **30**, 193, 1938. — ²⁾ U. Dehlinger u. F. Gisen, Phys. ZS. **35**, 375, 1934; U. Dehlinger, ebenda **34**, 836, 1933; F. Gisen, ZS. f. Metallkde. **27**, 256, 1935. — ³⁾ Vgl. hierzu die zusammenfassende Darstellung bei W. G. Burgers, Handb. d. Metallphysik III, Rekristallisation, verformter Zustand und Erholung. Leipzig, Akad. Verlagsges., 1941. — ⁴⁾ A. Kochendörfer, Reine und angewandte Metallkunde in Einzeldarstellungen. Bd. VII: Plastische Eigenschaften von Kristallen und metallischen Werkstoffen. Berlin, Springer, 1941.

nachgewiesene Mosaikstruktur allein durch plastische Verformung verursacht wurde, also ein reiner Verformungseffekt ist.

2. Andererseits konnte gezeigt werden, daß ein röntgenographisch „ideales“ Verhalten der Kristalle, d. h. Reflexion nach der dynamischen Theorie, das Vorhandensein der mikroskopisch festgestellten Wachstums-Lamellenstruktur nicht ausschließt, da gerade in dem in Frage kommenden Größenbereich die Gültigkeitsgrenze der dynamischen Theorie nur auf etwa drei Größenordnungen genau angegeben werden kann. Die auch von andern Forschern beobachtete Lamellenstruktur erwies sich offensichtlich als eine Erscheinung grundsätzlicher Natur im Gefügeaufbau der Kristalle, bedingt durch den besonderen Wachstumsmechanismus derselben, und zwar bei Metall- und Salzkristallen.

3. Im gegossenen Material ist außer der Verzweigungs- oder Lineage-Struktur und den atomaren Fehlstellen nur noch die Wachstums-Lamellenstruktur sicher nachgewiesen, eine besondere „Mosaikstruktur“ konnte bis jetzt nicht festgestellt werden. Es wird daher der Begriff „Mosaikstruktur“ auf die Wachstums-Lamellenstruktur übertragen und soll außerdem auch auf die durch plastische Verformung entstandene Unterteilung der Wachstumslamellen sowie auf die bei der Rekristallisation entstehende Lamellenstruktur angewendet werden. Die quantitativ und qualitativ etwas verschiedenen Mosaikstrukturen der drei Gefügezustände können zur genauen Unterscheidung als „Wachstums-Mosaikstruktur“, „Verformungs-Mosaikstruktur“ und „Rekristallisations-Mosaikstruktur“ bezeichnet werden.

4. Die Mosaikstruktur besitzt danach eine untere und obere Grenze, d. h. die kohärenten Bereiche können eine bestimmte Höchstgröße, gegeben durch die Größe der Wachstumslamellen, nicht überschreiten, und eine bestimmte Mindestgröße, gegeben durch die beschränkte Unterteilbarkeit der kohärenten Bereiche bei der plastischen Verformung, nicht unterschreiten.

5. Die Beschaffenheit der Mosaikstruktur in den drei Gefügezuständen wird insbesondere hinsichtlich der Zustände an den Grenzen der kohärenten Gitterbereiche eingehend beschrieben und damit auch ihre qualitativen Unterschiede herausgestellt. Hierdurch konnten die qualitativen Unterschiede in den strukturaabhängigen Eigenschaften der drei Gefügezustände, die bisher nur auf quantitative Unterschiede in der Mosaikstruktur zurückgeführt worden waren, gut verständlich gemacht werden.

(Mitteilung aus dem Forschungs-Institut der AEG.)

Das Gesetz der Magnetisierung in schwachen Feldern*).

Von Klaus Sixtus.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 11. Januar 1943.)

Geradlinige und gekrümmte Permeabilitätskurven. Erweiterung des Magnetisierungsgesetzes von Rayleigh. Ableitung von Remanenz, Hysterese und Verlustwinkel. Übereinstimmung zwischen theoretischen Folgerungen und Meßergebnissen in einem beträchtlichen Feldbereich. Deutung der Versuchsergebnisse auf Grund der bekannten Elementarvorgänge bei der Magnetisierung.

1. Einleitung.

Das magnetische Verhalten ferromagnetischer Stoffe in schwachen Feldern ist bisher ausschließlich durch eine empirisch gefundene Gesetzmäßigkeit beschrieben worden, welche nach Lord Rayleigh, der sie durch besonders beweiskräftige Messungen belegte¹⁾, oft als das Rayleigh-Gesetz bezeichnet wurde. Dieses sagt aus, daß die Permeabilität μ eines Stoffes von einem Anfangswert μ_A im Felde 0 linear mit der Feldstärke H ansteigt:

$$\mu = \mu_A + cH. \quad (1)$$

Rayleigh fand in einem Feldstärkenbereich zwischen $2 \cdot 10^{-5}$ und $4 \cdot 10^{-2}$ Ø vollständige Proportionalität zwischen Induktion und Feldstärke, also eine konstante Permeabilität. Erst in höheren Feldern machte sich die Feldabhängigkeit bemerkbar und bis über 1 Ø hinaus gab das letzte Glied der Gleichung genau den Überschuß über den Anfangswert wieder.

In der Folgezeit wurde die Rayleighsche Beziehung von vielen Forschern bestätigt; unter diesen ist besonders Jordan²⁾ zu nennen, dessen Systematik des Verhaltens in schwachen Wechselfeldern auf dieser Gleichung aufbaut. Die Bestätigung beschränkt sich nicht auf niederpermeable Stoffe, mit einer Permeabilität von etwa 100, wie sie in den beiden genannten Arbeiten verwendet wurden. Das beweisen z. B. die Messungen von Ellwood und Legg³⁾ an einer Nickel-Eisen-Legierung, deren Per-

*) Auszugsweise vorgetragen auf der Gautagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft in Berlin am 11. Oktober 1942.

¹⁾ Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 23, 225, 1887. — ²⁾ H. Jordan, Elektr. Nachr. Techn. 1, 7, 1924. — ³⁾ W. B. Ellwood u. V. E. Legg, Bell. Syst. Techn. Journ. 16, 212, 1937.

meabilität etwa 2000 betrug. Auf Grund aller der Belege, die in den 50 Jahren zwischen der Aufstellung des Gesetzes und der letztgenannten Bestätigung gesammelt wurden, hat man sich daran gewöhnt, jenes Gesetz als ein Naturgesetz anzusprechen.

Aus diesem Grunde bedeutete es eine besondere Überraschung, als die Legierungsentwicklung der letzten Jahre uns mit Stoffen bekannt machte, die im gleichen Feldbereich, in dem sonst eine geradlinig ansteigende Permeabilitätskurve erhalten wurde, d. h. bis zu Feldern von $\frac{1}{5}$ der Koerzitivkraft, deutliche Abweichungen vom Rayleigh-Verhalten zeigen. In Fig. 1 sind zwei solche Kurven der eines „normalen“ Stoffes gegenübergestellt; die Kurven wurden ballistisch an aus dünnem Band gewickelten Ringkernen gemessen. Kern 17 bestand aus einer Nickel-Eisenlegierung mit 40 % Ni und wurde bei 700° C geglüht, Kern 18 aus dem gleichen Material nach Glühung bei 1350° C in reinstem Wasserstoff, Kern 3 aus Eisen mit 3 % Si, das ebenfalls durch längere Glühung bei 1350° C in reinstem Wasserstoff¹⁾ von permeabilitätserniedrigenden Stoffen befreit worden war. Man erkennt, daß auch die Kurven für Kern 3 und 18 zwar oberhalb 50 mØ einen durchaus normalen Verlauf haben, daß sie aber nach geringen Feldstärken hin im Gegensatz zu der Kurve für Kern 17 zunehmend steiler werden. Die bei Kern 3 besonders deutlich ausgeprägte Krümmung macht es unmöglich, etwa wie bei Kern 17 eine Extrapolation auf $H = 0$ vorzunehmen und so eine Anfangspermeabilität zu bestimmen.

Da eine befriedigende Modellvorstellung auch für das normale Verhalten noch nicht existiert²⁾, erschien es am aussichtsreichsten, eine analytische Fassung durch eine empirische Erweiterung der Rayleighschen Beziehung zu versuchen. Zwar hinterläßt eine solche Gleichung, die nicht auf Grund eines Modells, sondern aus den Ergebnissen der Messung abgeleitet wurde, in dem, der sich mit ihr beschäftigt, immer ein Gefühl von

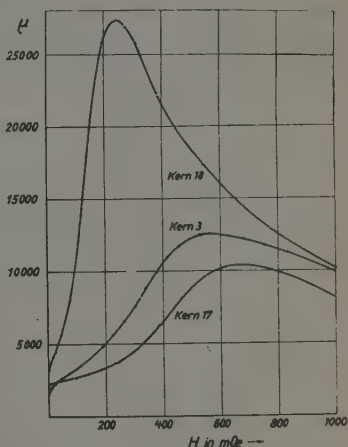


Fig. 1. Permeabilitätskurven von Nickel-eisen mit 40 % Ni, das bei 700° (Kern 17) und bei 1350° (Kern 18) und von Silicium-eisen mit 3 % Si (Kern 3), das bei 1350° geglüht wurde.

¹⁾ F. Pawlek, Arch. f. Eisenh.-Wesen 16, 363, 1942/43. — ²⁾ R. Becker u. H. Döring, Ferromagnetismus, S. 221. Berlin 1938.

Unbefriedigtsein. Dieses Gefühl ist bei der ebenfalls empirischen Rayleigh-Gleichung deshalb schwächer ausgeprägt, weil sie wegen ihrer Einfachheit den Grundgesetzen der Natur näher zu sein scheint als die erweiterte Gleichung mit einem gebrochenen Exponenten. Die Unkenntnis der Elementarvorgänge war jedenfalls beim Rayleigh-Gesetz kein Hinderungsgrund, daß die aus ihm gezogenen Folgerungen praktische und theoretische Bedeutung erlangten.

2. Verallgemeinerung des Magnetisierungsgesetzes von Rayleigh.

a) *Gleichfeld.* Es hat sich gezeigt, daß die gekrümmten Permeabilitätskurven am einfachsten durch eine Gleichung dargestellt werden können,

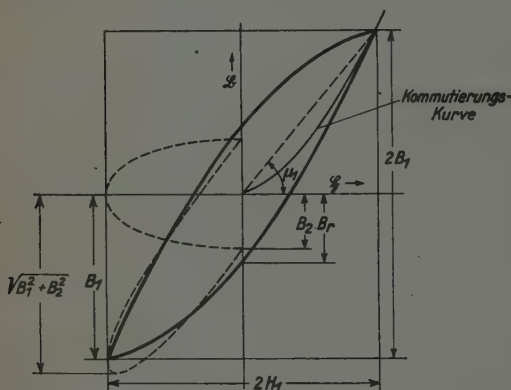


Fig. 2. Hystereseschleife bei kleiner Aussteuerung in schematischer Darstellung nach Jordan.

welche aus Gleichung (1) durch Multiplikation der rechten Seite mit H^N hervorgeht, wobei N eine zwischen 0 und 1 liegende Materialkonstante ist. Dies ist gleichbedeutend mit der Annahme einer Feldabhängigkeit der Größen μ_A und c . Aus den Messungen ließ sich allerdings nicht entscheiden, ob diese Annahme bezüglich c wirklich notwendig war; sie

wurde vorläufig aus Gründen besserer Übersichtlichkeit zugrunde gelegt. Dementsprechend setzen wir statt der Rayleighschen Beziehung

$$B = \mu_A H + \nu H^2 \quad (2)$$

zwischen Induktion B und Feld H auf dem aufsteigenden Ast einer kleinen Hystereseschleife (Schleifenspitze im Koordinaten-Nullpunkt, Fig. 2)

$$B = H^N (\mu_B H + \nu_B H^2) = \mu_B H^N \left(H + \frac{\nu_B}{\mu_B} H^2 \right). \quad (3)$$

Die Permeabilität auf dem aufsteigenden Ast ist also

$$\mu = \frac{B}{H} = \mu_B H^{N-1} \left(1 + \frac{\nu_B}{\mu_B} H \right). \quad (4)$$

Da μ für $H = 0$ nicht kleiner als 1 werden kann, müßte man streng genommen bei der Ableitung Magnetisierung und Suszeptibilität an Stelle

von B und μ gebrauchen, wonach der rechten Seite von Gleichung (4) das Glied $+1$ hinzuzufügen wäre. Dieses im normalen Fall von $\mu > 100$ zu vernachlässigende Korrektionsglied wurde weggelassen, um die Beziehung zwischen der allgemein üblichen Form der Rayleigh-Gleichung und ihrer Erweiterung klar hervortreten zu lassen.

Bei einer Aussteuerung bis $H = 2 H_1$ und $B = 2 B_1$ ergibt sich als Abhängigkeit zwischen den Spitzenwerten H_1 und B_1 aus (3)

$$B_1 = \mu_B (2 H_1)^N \left(H_1 + \frac{2^{\nu_B}}{\mu_B} H_1^2 \right). \quad (5)$$

Gleichung (5) beschreibt den Ort der Schleifenspitzen für ein Koordinatensystem durch den Mittelpunkt der Schleife und gibt damit auch die sogenannte Kommutierungskurve wieder (Fig. 2). Die auf dieser bestimmte Amplituden-Permeabilität $\mu_1 = B_1/H_1$ ist zum Unterschied von (4)

$$\mu_1 = \mu_B (2 H_1)^N \left(1 + \frac{2^{\nu_B}}{\mu_B} H_1 \right). \quad (6)$$

Als weitere Kenngrößen sollen nun die Remanenz und die Fläche der Hystereseschleife berechnet werden. Dazu behalten wir als Nullpunkt des Koordinatensystems die untere Schleifenspitze bei, setzen $B_r = B_1 - B_{H_1}$ und erhalten nach Umformung für die auf die Spitzeninduktion B_1 bezogene Remanenz B_r/B_1

$$\frac{B_r}{B_1} = \frac{\mu_B H_1^N \left[(2^N - 1) H_1 + (2^{1+N} - 1) \frac{\nu_B}{\mu_B} H_1^2 \right]}{\mu_B H_1^N \left(2^N H_1 + 2^{1+N} \frac{\nu_B}{\mu_B} H_1^2 \right)}.$$

In erster Annäherung kann das letzte Glied im Nenner vernachlässigt werden, und wir erhalten

$$\frac{B_r}{B_1} = 1 - 2^{-N} + (2 - 2^{-N}) \frac{\nu_B}{\mu_B} H_1. \quad (7)$$

Die Fläche der Hystereseschleife, den Hystereseverlust F_h , berechnen wir aus der Differenz zwischen dem Rechteck $2 H_1 \cdot 2 B_1$ und dem zweifachen Flächenstück, das zwischen dem aufsteigenden Schleifenast und den Rechteckseiten $B = 0$ und $H = 2 H_1$ liegt. Wegen der Symmetrie der beiden Schleifenäste ist dieses vereinfachte Verfahren zulässig.

$$F_h = 4 H_1 B_1 - \int_0^{2 H_1} B dH = 4 H_1 B_1 - \frac{2^{2+N}}{2+N} \mu_B H_1^{2+N} - \frac{2^{3+N}}{3+N} \nu_B H_1^{3+N},$$

$$F_h = \mu_B H_1^N \left(\frac{2^{2+N} N}{2+N} H_1^2 + \frac{2^{3+N} (1+N)}{3+N} \frac{\nu_B}{\mu_B} H_1^3 \right). \quad (8)$$

Gleichungen (7) und (8) unterscheiden sich wesentlich von den aus der ursprünglichen Rayleigh-Gleichung abgeleiteten Formeln für Remanenz und Verlust, die sich für $N = 0$ aus (7) und (8) ergeben. Die Remanenz B_r/B_1 hat nach (7) für $H_1 = 0$ einen endlichen Wert, und der Verlust F_h enthält außer dem ungefähr mit der dritten Potenz von H_1 ansteigenden Glied noch ein zweites, das nahezu mit der zweiten Potenz von H_1 geht.

b) *Wechselfeld*. Das im Wechselfeld zu erwartende Verhalten eines Materials mit „Rayleigh-Eigenschaften“ wurde zuerst von Rayleigh selbst und später besonders eingehend von Jordan erörtert. Es werden dort^{1) 2)} die Grund- und Oberwellen der Induktion abgeleitet, indem im allgemeinen Ausdruck für die Rayleigh-Schleife für H ein sinusförmiger Verlauf $H_1 \cos \omega t$ angenommen und der damit für B erhaltene Ausdruck nach Fourier entwickelt wird. Wir können uns dieses im Fall der erweiterten Rayleigh-Gleichung sehr umständliche Verfahren ersparen, wenn wir uns auf die Berechnung der Grundwelle der Induktion beschränken. Da uns die Wechselstromverluste, zu denen nur die Grundwelle beiträgt, aus später ersichtlichen Gründen besonders interessieren, beschreiten wir den folgenden abgekürzten Weg: Nach dem Vorgang von Rayleigh wird die Grundwelle der Induktion in zwei Komponenten zerlegt, von denen die eine, \mathfrak{B}' , konphas mit dem Feld $H = H_1 \cos \omega t$ schwingt, während die zweite, \mathfrak{B}'' , um 90° gegen \mathfrak{H} phasenverschoben ist. Wegen $B_1 = \mu_1 H_1$ gilt

$$B' = B_1 \cos \omega t.$$

Die Amplitude von \mathfrak{B}'' berechnen wir auf Grund des Satzes, daß die Fläche der von beiden Komponenten bestimmten Ellipse gleich der oben berechneten Fläche der Hystereseschleife F_h ist. Setzen wir vorläufig

$$B'' = B_2 \sin \omega t,$$

so ergibt sich B_2 also aus

$$F_H = \pi B_2 H_1.$$

Wegen der Möglichkeit einer direkten Messung interessiert besonders die Phasenverschiebung ε zwischen der Grundwelle der Induktion $\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}''$ und dem Feld \mathfrak{H} . Der durch Hysterese verursachte Verlustwinkel ε ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{B_2}{B_1} = \frac{F_h}{\pi H_1 B_1}.$$

¹⁾ Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 23, 225, 1887. — ²⁾ H. Jordan, Elektr. Nachr.-Techn. 1, 7, 1924.

Nach Einsetzen von F_h und B_1 aus Gleichungen (8) und (5) und bei Beschränkung auf niedrige Felder erhalten wir

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{4}{\pi} \left(\frac{N}{2+N} \right) + \frac{8(1+N)}{\pi(3+N)} \frac{\nu_B}{\mu_B} H_1. \quad (9)$$

Ebensowenig wie die Remanenz B_r/B_1 im Gleichfeldfall wird auch $\operatorname{tg} \varepsilon$ bei Extrapolation auf $H_1 = 0$ nicht zu Null, sondern hat einen endlichen, nur von N abhängigen Wert. $\operatorname{tg} \varepsilon$ geht nur auf Hysterese zurück, ist also unabhängig von der Frequenz.

c) Anschluß an die Terminologie von Jordan¹⁾. Die in einem von einer Spule umgebenen Eisenkern bei Wechselstrommagnetisierung entstehenden Verluste werden meist in einer Brückenordnung aus dem bei Abgleich der Brücke eingestellten Widerstand bestimmt, aus dem sich nach Abzug des Spulenwiderstandes der Verlustwiderstand R_v ergibt. Der Quotient aus Verlustwiderstand R_v und induktivem Widerstand ωL ist gleich dem tg des Verlustwinkels:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_v = \frac{R_v}{\omega L}.$$

$\operatorname{tg} \varepsilon_v$ kann nun nach Jordan in drei Anteile aufgespalten werden, die sich durch ihre Feldstärke- und Frequenzabhängigkeit unterscheiden. Von diesen hängt der erste ($\operatorname{tg} \varepsilon_h$) nur vom Feld ab, er läßt sich aus der Rayleighgleichung ableiten und geht auf Hysterese zurück. Der zweite ($\operatorname{tg} \varepsilon_w$) ist nur frequenzabhängig und durch Wirbelstromverluste bedingt; während der dritte ($\operatorname{tg} \varepsilon_n$) ein weder vom Feld noch von der Frequenz abhängiges Restglied, das Jordansche Verlustglied, darstellt, das von Jordan als Nachwirkungseffekt gedeutet wurde²⁾. Man bezieht heute meist diese Anteile auf die „Verlustbeiwerte“ h , w und n und erhält folgende Gleichung für den gesamten Eisenverlustwinkel:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_v = \frac{R_v}{\omega L} = \frac{h \cdot H_{eff}}{2\pi} + \frac{w \cdot \omega}{2\pi} + \frac{n}{2\pi}. \quad (10)$$

Hier bedeutet ω die Kreisfrequenz in s^{-1} , H_{eff} die effektive Feldstärke in A/cm, für h benutzt man die Einheit cm/kA, für w : μs , für n : $^{\circ}/100$.

¹⁾ H. Jordan, Elektr. Nachr.-Techn. 1, 7, 1924. — ²⁾ Man muß unterscheiden zwischen der Jordanschen Nachwirkung, die angenähert temperaturunabhängig ist, und einer stark temperaturabhängigen Nachwirkung, die sich z. B. durch eine zeitliche Änderung der Permeabilität nach Entmagnetisierung verrät und viel größere Beträge erreicht als die erstere. Bei den Versuchsproben wurde die Abwesenheit von temperaturabhängiger Nachwirkung durch das genannte Permeabilitätskriterium festgestellt. Eine Diskussion der verschiedenen Nachwirkungseffekte findet man bei R. Becker u. W. Döring, Ferromagnetismus, S. 242. Berlin 1939.

Wie wir oben gezeigt haben, folgt aus der erweiterten Rayleigh-Gleichung ohne besondere Hilfsannahmen ein von Frequenz und Feld unabhängiger Beitrag zum Verlustwinkel, aus dem wir durch Gleichsetzen mit $n/2\pi$ erhalten

$$n = \frac{8N}{2+N}$$

bzw.

$$\frac{n}{[\frac{0}{\infty}]} = \frac{8000N}{2+N} \quad (11)$$

Im Falle einer experimentellen Bestätigung dieser Gleichung wäre das Jordansche Verlustglied also allein durch Hysterese erklärbar.

Das zweite Glied auf der rechten Seite von (9) entspricht offenbar dem feldabhängigen Glied in (10) und wir erhalten durch Gleichsetzen

$$(H_1 = \sqrt{2} H_{eff}) \quad h = \frac{\sqrt{2} \cdot 16 (1+N)}{3+N} \frac{\nu_B}{\mu_B}$$

und bei kleinem N den aus der Rayleigh-Gleichung direkt zu folgernden Wert

$$h = 7,55 \frac{\nu_B}{\mu_B}$$

bzw.

$$\frac{h}{\left[\frac{\text{cm}}{\text{kA}}\right]} = 9500 \frac{\nu_B \left[\frac{G}{\text{O}}\right]}{\left[\frac{1}{\text{O}}\right] \cdot \mu_B} \quad (12)$$

3. Versuchsziel.

Die Richtigkeit der Annahme, welche der oben gebrachten Ableitung zugrunde liegt, kann durch einen Vergleich zwischen den abgeleiteten Größen und dem Experiment geprüft werden. Dafür eignen sich am besten die aus der Kommutierungskurve bestimmte Permeabilität μ_1 , die ebenfalls im Gleichfeld gemessene und auf $H_1 = 0$ extrapolierte Remanenz $(B_r/B_1)_0$ und der im Wechselfeld erhaltene frequenz- und feldunabhängige Verlustwinkel $\text{tg } \varepsilon_n$, da diese Größen maßgeblich durch den Wert von N beeinflusst werden.

Die Nachprüfung sollte nicht nur an besonders behandeltem Silicium-eisen, sondern auch an Nichteisen erfolgen, nachdem sich herausgestellt hatte, daß eine Glühung bei hoher Temperatur auch bei diesem eine gekrümmte Permeabilitätskurve hervorrief. Weiterhin wurde eine hochprozentige Chrom-Eisenlegierung, die bereits nach Glühung wenig über der Rekristallisationstemperatur den Effekt zeigt, gemessen. Auf gleiche Weise sollten daneben auch einige Legierungen untersucht werden, die praktisch einen geraden μ -Verlauf aufwiesen, bei denen also sehr kleine

N -Werte zu erwarten waren. Auch bei unlegiertem Eisen werden gekrümmte μ -Kurven beobachtet. Es wurde jedoch nicht in die Versuche einbezogen, da unsere Proben selbst durch langzeitliche Glühung bei hoher Temperatur nicht von Nachwirkungseffekten, welche die Messung störten, befreit werden konnten.

Zur Übersicht über die zu erwartenden Werte geben wir in Tabelle 1 eine Zusammenstellung der für gegebene N aus (7), (9) und (11) berechneten Höhe von $(B_r/B_1)_0$, $\lg \varepsilon_n$ und n .

Tabelle 1. In den Gleichungen (7), (9) und (11) vorkommende Ausdrücke berechnet für verschiedene N .

N	Gl. (7)		Gl. (9)		Gl. (11)
	$(B_r/B_1)_0$ [$= 1 - 2^{-N}$] o/oo	$\Delta(B_r/B_1)$ für $\frac{\nu_B}{\mu_B} H_1 = 1$ [$= 2 - 2^{-N}$]	$\lg \varepsilon_n$ [$= \frac{4}{\pi} \left(\frac{N}{2 + N} \right)$] o/oo	$\Delta \lg \varepsilon$ für $\frac{\nu_B}{\mu_B} H_1 = 1$ [$= \frac{8}{\pi} \left(\frac{1 + N}{3 + N} \right)$] o/oo	n [$= \frac{8N}{2 + N}$] o/oo
0	0	1,0	0	0,850	0
0,001	0,7	1,0007	0,6	0,850	4
0,002	1,4	1,0014	1,3	0,851	8
0,005	3,5	1,0035	3,2	0,852	20
0,01	6,9	1,0069	6,4	0,855	40
0,02	14	1,014	13	0,860	79
0,05	34	1,034	30	0,877	195
0,10	67	1,067	61	0,904	381
0,15	98	1,098	89	0,930	558
0,20	129	1,129	116	0,955	728
0,25	159	1,159	141	0,979	890
0,30	188	1,188	166	1,003	1044

4. Versuche.

Die Messungen wurden an Legierungen aus Eisen mit etwa 8% Silicium, mit 40% Nickel, mit 76% Nickel, 2% Chrom und 5% Kupfer (Mumetall) und mit 20% Chrom ausgeführt. Die Kerne waren zum Teil aus Band gewickelt, zum Teil bestanden sie aus gestanzten Blechringen und waren, mit Ausnahme von Kern 10 und 17, bei 1350° zwecks Reinigung längere Zeit in reinstem Wasserstoff geglüht worden. Nähere Angaben über Blechdicke und Behandlung finden sich in Tabelle 2. An allen Kernen wurden die Gleichfeldeigenschaften bestimmt, während im Wechselfeld nur an vier Kernen gemessen wurde.

Wir teilen im folgenden nur die Meßergebnisse an zwei Proben ausführlich mit und beschränken uns bei dem Rest auf eine tabellenmäßige Wiedergabe der gefundenen Kenngrößen. Bei den beiden Beispielen handelte

es sich um die Kerne 3 und 18, deren μ -Kurven bereits in Fig. 1 gegeben sind. Sie waren aus 0,1 mm bzw. aus 0,05 mm dickem Band zu Ringen von 40 mm Innen- und 65 mm Außendurchmesser gewickelt und 24 Stunden bei 1350° C in reinstem Wasserstoff geglüht worden. Die Isolation zwischen den Bandwindungen bestand aus Al_2O_3 -Pulver, das vor dem Glühen zur Vermeidung des Zusammenbackens auf das Band aufgebracht worden war. Die Kerne wurden in Isolierstoffbüchsen gelegt, die mit Wicklungen von 1000 und 100 Windungen versehen wurden, welche als Sekundär- und Primärspule bei den ballistischen Messungen dienten. Die zweite Wicklung wurde auch für die Wechselstrommessungen benutzt. 1 Stunde vor Beginn jeder Meßreihe wurden die Proben mit Wechselstrom entmagnetisiert.

Bei der Aufnahme der Kommutierungskurve wurde wie üblich für jeden Wert von H_1 das Feld erst etwa zehnmal kommutiert, bevor der ballistische Ausschlag registriert wurde. Das Verhältnis B_r/B_1 ist gleich dem Quotienten aus Differenz und Summe der beim Ausschalten von H_1 und Wiedereinschalten in entgegengesetzter Richtung erhaltenen Galvanometeraus schläge. Da die Meßgenauigkeit bei 1/2% liegt und die Differenzen beider Ausschläge nur wenige Prozent betragen, ist die Genauigkeit des für B_1/B_r erhaltenen Wertes nicht sehr hoch. Sie betrug bei Messungen mit ein und demselben Galvanometer etwa $\pm 5\%$.

Es lag nahe, eine Verbesserung dadurch zu erzielen, daß man den größten Teil der Ausschläge durch eine Luftinduktivität kompensierte und damit die Fehler verringerte. Die Verwendung von Luftinduktivitäten der hier notwendigen Größe führt jedoch zu neuen Schwierigkeiten, deren Beseitigung bisher wegen Zeitmangel noch nicht in Angriff genommen wurde. Die Summe der beiden Galvanometeraus schläge war beim Supergalvanometer, welches eine Schwingungsdauer von 7 Sekunden besitzt, immer etwas niedriger als der Kommutierungsaus schlag. Wurde hingegen mit einem Galvanometer mit größerer Schwingdauer von 25 Sekunden gemessen, so trat diese Diskrepanz nicht mehr auf. Dafür wurde eine B_r/B_1 -Kurve erhalten, die in ihrem geradlinigen Teil gegenüber der vorher erhaltenen um etwa 10⁰/₀₀ nach unten verschoben war. Ein solcher Unterschied der mit Galvanometern verschiedener Schwingungsdauer gemessenen Werte, den man offenbar als einen Nachwirkungseffekt deuten muß, trat nur bei der Remanenzkurve, nicht aber bei der Kommutierungskurve auf. Zur Auswertung der Remanenz wurden die niedriger liegenden mit dem langsam schwingenden Galvanometer erhaltenen Meßwerte herangezogen.

Die Messung der Induktivität und des Verlustwiderstandes wurde bei 60 Hz mit Hilfe einer Maxwell-Brücke durchgeführt, die einen bis 1 μF

veränderlichen, verlustarmen Dekadenkondensator enthielt. Bei 400 und 800 Hz wurde zum Teil in einer Brücke mit Induktionsnormale, zum Teil in der Maxwell-Brücke gemessen. In den Fällen, wo beide Methoden am gleichen Kern benutzt wurden, ergaben sich praktisch gleiche Werte.

Die Permeabilitätskurven von Kern 3 (Fig. 3) zeigen die schon in Fig. 1 erkennbare Krümmung in vergrößertem Maßstab. Daneben ist ein

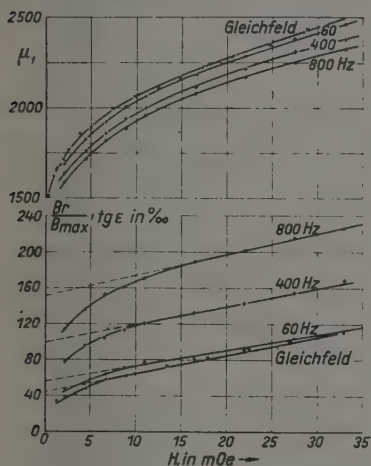


Fig. 3. Siliciumeisen (Kern 3).

Permeabilität μ , bezogene Remanenz B_r/B_{max} und Verlustwinkel $\text{tg } \varepsilon$ bei Gleich- und Wechselstrom.

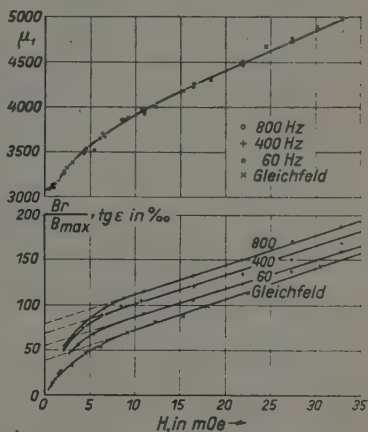


Fig. 4. Nickeleisen (Kern 18).

Absinken der Permeabilität mit steigender Frequenz zu beobachten, das auch bei normalem Transformatorenblech in einer Größe zu bemerken ist, die weit über das von der bisher entwickelten Theorie¹⁾ erlaubte Maß hinausgeht. Bei Kern 18 (Fig. 4) ist ein derartiger Effekt nicht vorhanden, dagegen setzt sich hier bei der Gleichfeldpermeabilität die Krümmung nicht bis zu den untersten Meßpunkten fort, sondern mündet erneut in einen flacheren Kurventeil ein. Dies konnte trotz der mit der Annäherung an die untere Grenze des Meßbereichs zunehmenden Meßungenauigkeit eindeutig festgestellt werden.

In Fig. 3 und 4 ist neben den μ -Kurven die Remanenz B_r/B_1 und $\text{tg } \varepsilon_v$ über dem Feld bzw. über der Feldamplitude aufgetragen. Es fällt sofort auf, daß bei gleicher Frequenz aufgenommene Meßpunkte nicht, wie man es bei normalen Werkstoffen gewöhnt ist²⁾, auf einer Geraden liegen. Zwar läßt sich durch einen Teil der Punkte eine Gerade ziehen, von der sich

¹⁾ W. Wolman, ZS. f. techn. Phys. 1929, S. 595. — ²⁾ W. B. Ellwood u. V. E. Legg, Bell. Syst. Techn. Journ. 16, 212, 1937.

aber die zu niedrigen Feldern gehörigen Werte mehr und mehr entfernen. Die die Meßpunkte verbindende Kurve geht nach niedrigen Feldern bei Kern 18 sicher, bei Kern 3 wahrscheinlich durch den Koordinatennullpunkt. So entscheidend diese Feststellung für die physikalische Deutung der magnetischen Vorgänge ist, so bedeutet sie im Hinblick auf unsere obige formale Ableitung nur eine Einschränkung des Bereiches, in dem eine Nachprüfung der entwickelten Formeln möglich ist und bei Bewährung der Ableitung eine Beschränkung ihres Gültigkeitsbereiches. Wir werden also

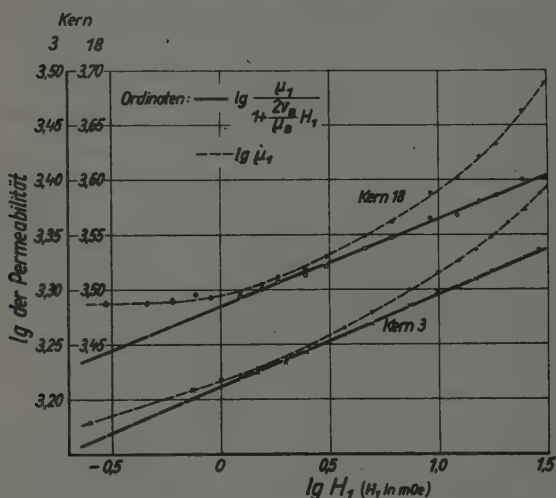


Fig. 5. Permeabilitätskurven von Kern 3 und Kern 18 in doppelt-logarithmischer Darstellung (gestrichelt) und nach Umformung entsprechend Gleichung (6) (ausgezogen).

zweckmäßigerweise den geraden Kurventeil bis zur Ordinatenachse verlängern, und erhalten so bei den Gleichfeldkurven $(B_r/B_1)_0$, während bei den Wechselstromkurven aus den Ordinatenabschnitten, welche noch den Wirbelstromverlust enthalten, der dem Jordanschen Verlustglied entsprechende Verlustbeitrag $\lg \varepsilon_n$ durch Extrapolation auf $f = 0$ abgetrennt werden muß. Aus den so gefundenen Größen wurde dann mit Hilfe von (7) und (9) der Exponent N berechnet und in Tabelle 2 unter der Bezeichnung N_r bzw. N_n eingetragen.

Zur Bestimmung von N aus der Permeabilität μ_1 nach Gleichung (6) wurde μ_1 durch $1 + \frac{2\nu_B}{\mu_B} H_1$ geteilt und in doppeltlogarithmischem Maßstab über H_1 aufgetragen (Fig. 5). $\frac{\nu_B}{\mu_B}$ ergab sich aus der Steigung der B_r/B_1 -Kurve, da $(2 - 2^{-N})$ ohne wesentlichen Fehler gleich 1 gesetzt

werden kann (s. Tabelle 1). Die Punkte liegen in einem größeren Feldbereich gut auf einer Geraden, was bei direkter Auftragung von $\lg \mu_1$ über $\lg H_1$ (Fig. 5, gestrichelte Kurven) nicht der Fall ist. Bei sehr geringen Werten von H_1 liegen die Meßpunkte nicht nur bei Kern 18, wo dies zu erwarten war, sondern in geringerem Maße auch bei Kern 3 oberhalb dieser Geraden. Der aus der Neigung der Geraden bestimmte Wert von N_μ wurde ebenfalls in Tabelle 2 eingetragen.

Fig. 6 bringt die Permeabilitätskurven der übrigen gemessenen Kerne. Bei Mumetall ist die Krümmung nur angedeutet, bei dem Rest deutlich ausgeprägt. Kern 1 ist dadurch bemerkenswert, daß er aus Blechringen bestand, welche aus warmgewalztem Transformatorenblech gestanzte und darauf hochgeglüht worden waren. Eine geordnete Kristallorientierung wie sie in kaltgewalztem und geglühtem Band auftritt, ist hier nur angedeutet, außerdem wird sie in einem Blechring, wo die Vorzugsrichtung alle möglichen Winkel mit dem Feld einschließt, magnetisch unwirksam sein. Ahwesenheit oder Abwesenheit einer Textur scheint also die Krümmung der Permeabilitätskurve nicht wesentlich zu beeinflussen. Ein Flacherwerden der Kurve bei niedrigsten Feldern, wie bei Kern 18, konnte bei keiner der übrigen Proben beobachtet werden und trat auch bei einem Kern aus Siliciumeisen, der mit Wechselstrom bis herunter zu $50 \cdot 10^{-6} \text{ Ø}$ gemessen wurde, nicht auf. In Tabelle 2 sind die Ergebnisse aller Gleichfeldmessungen zusammengefaßt. μ_{10} (bei $H_1 = 10 \text{ mØ}$) und H_c sind zur magnetischen Kennzeichnung des Werkstoffs angegeben, $\Delta B_r/B_1$ gibt den auf 1 Ø bezogenen Anstieg des geradlinigen Teiles der bezogenen Remanenz, $(B_r/B_1)_0$ den Abschnitt, den die verlängerte Gerade auf der Ordinatenachse ergibt. Die nächsten Spalten enthalten den aus $(B_r/B_1)_0$ bzw. den aus der Permeabilitätskurve $\left(\mu_1 / \left(1 + \frac{2\nu_B}{\mu_H} H_1 \text{ über } H_1\right)\right)$ bestimmten Exponenten N . Aus der Permeabilitätskurve findet man auch μ_B und aus diesem und $\Delta B_r/B_1 \approx \frac{\nu_B}{\mu_H}$ die Größe von ν_B . Tabelle 3 enthält die an vier dieser

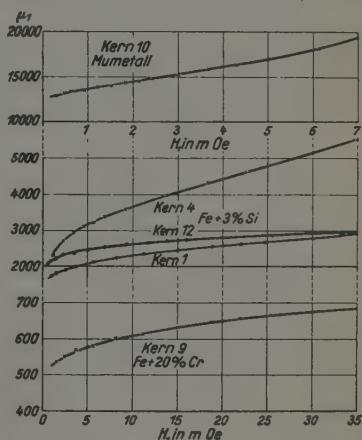


Fig. 6. Permeabilitätskurven von Ringkernen aus verschiedenen Legierungen.

Ringkerne gemessenen Wechselstromgrößen. Die Jordanschen Verlustbeiwerte n liegen bei allen Kernen bis auf Nr. 17 weit über den üblichen. Die Wirbelstromkonstante w_{gem} wurde aus dem Anstieg des Verlustwinkels mit der Frequenz entnommen, während w_{ber} aus der auf el.-magn. Einheiten bezogenen Zahlenwertgleichung $w_{ber} = \frac{4\pi^2 d^2 \mu}{3 \varrho}$ unter Benutzung eines aus dem angenähert geradlinigen Teil der μ - H -Kurve extrapolierten $\mu_{H=0}$ -Wertes bestimmt wurde. Bei den Kernen 3 (12, 17, 18) wurde benutzt für μ : 1800 (2500, 2260, 3500) und für ϱ : 0,5 (0,5, 0,7 0,7) $\times 10^5$ el.-magn. Einh.

Tabelle 2. Gleichfeld-Kenngrößen verschiedener Kerne.
(Glühung bei 1350° C, Kern 17 bei 700° C, Kern 10 bei 1000° C.)

Kern-Nr.	Legierung Form	Blechedicke mm	μ_{10}	H_c Ø	$\frac{\Delta(B_T/B_1)}{\approx \nu_B/\mu_B}$ $\frac{1}{1/\varnothing}$	$(B_T/B_1)_0$ ‰	N_r	N_μ	μ_B	ν_B 1/Ø
1	3% Si-Fe Stanzringe	0,35	2300	0,21	2,70	60	0,090	0,102	3650	9900
3	3% Si-Fe Bandring	0,10	2050	0,35	2,15	43	0,064	0,083	2730	5870
4	3% Si-Fe Bandring	0,35	3600	0,11	4,50	80	0,120	0,157	6200	27900
12	3% Si-Fe Bandring	0,10	2600	0,28	0,76	48	0,071	0,076	3460	2630
17	40% Ni-Fe Bandring	0,05	2310	0,53	0,80	0	0	0,010	2350	1880
18	40% Ni-Fe Bandring	0,05	3930	0,17	3,2	41	0,061	0,080	5010	16000
10	Mu-Metall Stanzringe	0,35	13500	0,024	21,5	15	0,021	0,020	14760	318000
9	20% Cr-Fe Stanzringe	0,10	610	0,73	0,89	41	0,061	0,063	770	685

Tabelle 3. Wechselfeld-Kenngrößen verschiedener Kerne.

Nr.	$\frac{\Delta \text{tg } \varepsilon}{\approx 0,85 \frac{\nu_B}{\mu_B}}$ 1/Ø	h cm/kA	$\text{tg } \varepsilon_n$ ‰	n ‰	N_n	w_{gem} μs	w_{ber} μs
3	1,75	19000	48	302	0,079	820	150
12	0,82	9170	54	340	0,089	770	210
17	0,63	7000	7	44	0,011	88	32
18	3,25	36400	52	326	0,086	214	52

Eine Prüfung unserer Annahmen gestattet der Vergleich der auf drei verschiedene Arten erhaltenen Exponenten N miteinander. Bei zwei (3, 18) von den vier im Wechselfeld gemessenen Kernen stimmt N_n zufriedenstellend mit dem aus der Gleichfeld- μ -Kurve abgeleiteten N_μ überein.

während das aus der Remanenz abgeleitete N_r bis zu 90% unter N_n liegt. Bei Kern 12 wurden nahezu gleiche Werte für N_n und N_r gefunden, während N_n höher als diese liegt. Kern 17 hat eine in dem hier betrachteten Bereich praktisch geradlinig ansteigende Permeabilitätskurve, aus der sich trotzdem ein recht gut mit N_n übereinstimmendes N_μ ergibt. Dagegen ergibt sich N_r hier, wie auch die Messungen von Ellwood und Legg erwarten ließen, zu Null. Vergleichen wir die Werte von N für die übrigen Kerne in Tabelle 2 miteinander, so finden wir bei N_r ebenfalls eine deutliche Neigung zu geringeren Werten. Wir können aus diesen Ergebnissen folgern, daß unsere formale Ableitung zwar in einem gewissen Feldbereich das Verhalten der Proben, insbesondere derjenigen mit stark gekrümmter μ -Kurve, richtig beschreibt, daß aber offenbar ein Einfluß nicht berücksichtigt ist, der bei Proben mit fast geradliniger μ -Kurve besonders deutlich in Erscheinung tritt. Es ist anzunehmen, daß es sich dabei um eine Nachwirkung im Jordanschen Sinne handelt.

Wie man aus Tabelle 1 ersehen kann, sollte $\Delta \operatorname{tg} \varepsilon$ für alle N 0,85 des Wertes von $\Delta (B_r/B_1)$ betragen. Diese Folgerung aus der Theorie wird durch die Meßergebnisse wenigstens angenähert bestätigt. Dagegen sind die aus der Rechnung erhaltenen Werte des Wirbelstrombeiwertes besonders bei 3, 12 und 18 wesentlich niedriger als die Meßwerte. Diskrepanzen, wie sie bei Kern 17 auftreten, sind nicht ungewöhnlich. Eine Erklärung konnte bisher auch für diese üblichen Abweichungen nicht gegeben werden.

5. Deutung der Versuchsergebnisse.

Die vorliegende Untersuchung hat gezeigt, daß eine Reihe von Legierungen, meist nach besonderer Glühung, eine in schwachen Feldern gekrümmte Permeabilitätskurve besitzt, welche mit einem verhältnismäßig hohen Hystereseverlust verbunden ist. Auf Grund einer formalen Erweiterung der Rayleigh-Gleichung wurden Formeln abgeleitet, welche den Verlauf von Permeabilität, Remanenz und Verlustwinkel in einem beträchtlichen Feldbereich befriedigend wiedergeben. Während aber nach dieser Formel die Permeabilität im Felde Null auf den Wert 1 sinken sollte, deuten verschiedene experimentelle Beobachtungen, nämlich das Abbiegen der Remanenz- und Verlustwinkelkurven vom geradlinigen Verlauf und der flache Anfangsteil der μ -Kurve bei Kern 18, darauf hin, daß die Formel bei sehr niedrigen Feldstärken nicht mehr gilt.

Wenngleich dieser Formel auch keine bestimmte Modellvorstellung zugrunde liegt, so kann man sich doch ein gewisses Bild von den Vorgängen

machen, die zu einer gekrümmten Permeabilitätskurve führen. In den hier behandelten Werkstoffen mit niedrigen inneren Spannungen liegt die Magnetisierungsrichtung eines magnetischen Elementargebietes im entmagnetisierten Zustand in einer der acht möglichen kristallographisch bedingten Vorzugsrichtungen¹⁾. Die Auswahl der sich einstellenden Richtung erfolgt auf Grund der elastischen Spannung an dem betrachteten Orte. Die Magnetisierungsvektoren benachbarter Gebiete werden also im allgemeinen Winkel von 90° oder von 180° untereinander bilden; der Übergang von einer Richtung in die andere erfolgt allmählich in einer Grenzschicht, die als 90° - oder 180° -Wand bezeichnet wird. Durch Feldänderungen bewirkte Magnetisierungsänderungen sind nun in schwachen Feldern verbunden mit Verschiebungen der Wände der Elementargebiete und man stellt sich vor, daß beide Arten von Wänden sowohl reversible, gewissermaßen elastische Bewegungen ausführen können, die bei Wegnahme des Feldes wieder zurückgehen, wie auch irreversible Bewegungen, zu deren Hinlauf eine andere Feldstärke notwendig ist als zum Rücklauf.

Man hat die Permeabilitätskurven vom Rayleigh-Typ durch das Zusammenwirken eines überwiegenden Anteils reversibler Magnetisierungsänderungen — etwa von reversiblen 90° -Wandverschiebungen — und eines mit wachsendem Feld von Null ansteigenden Anteils irreversibler Magnetisierungsänderungen zu erklären versucht. Da der Ablauf der irreversiblen Wandverschiebungen in einem Gebiet an die Erreichung einer gewissen kritischen Feldstärke geknüpft ist, mußte Preisach²⁾ ein spezielles Verteilungsgesetz der kritischen Feldstärke und daneben noch der Vormagnetisierung in den Einzelgebieten annehmen, um das Rayleigh-Verhalten beschreiben zu können. Bei den Stoffen mit gekrümmter Permeabilitätskurve, bei denen die irreversiblen Vorgänge offenbar in schwachen Feldern eine viel größere Rolle spielen, könnte man auch eine solche, natürlich wesentlich kompliziertere Verteilungsfunktion aufstellen. Hier soll jedoch nur die Möglichkeit einer physikalischen Deutung diskutiert werden. Einen Hinweis dazu geben die Einkristallmessungen von Williams³⁾. Dieser fand an einem rahmenförmigen Einkristall aus reinem Eisen, dessen Seiten parallel zu (100)-Richtungen geschnitten waren, eine rechteckige Hystereseschleife; die Rahmenkanten waren also Vorzugsrichtungen der Magnetisierung. Bei Vorhandensein einer einzigen Vorzugsrichtung treten aber praktisch nur 180° -Wände zwischen den Elementargebieten auf. An

¹⁾ R. Becker u. W. Döring, *Ferromagnetismus*, S. 105. Berlin 1939. —

²⁾ R. Becker u. H. Döring, *Ferromagnetismus*, S. 221. Berlin 1938. — ³⁾ H. J. Williams, *Phys. Rev.* 52, 747, 1004, 1937.

einem anderen (100)-Einkristallrahmen, der zwar aus Siliciumeisen bestand, für den aber bezüglich der Hystereseschleife sicher das gleiche wie bei dem Eisenrahmen gilt, maß Williams die Permeabilität bei geringen Induktionen und fand eine stark gekrümmte Kurve, die in der üblichen μ - H -Darstellung in Fig. 7 gezeichnet ist. Der für diese Kurve von uns bestimmte Exponent N_μ von etwa 0,24 liegt nur wenig höher als die in der vorliegenden Arbeit an Vielkristallen gefundenen Werte. Für einen Rahmen, dessen Kanten parallel zu (110)-Richtungen verliefen, ergab sich die ebenfalls in Fig. 7 dargestellte Kurve, für die N_μ zu 0,22 bestimmt wurde, während sich für einen (111)-Rahmen ein geradliniger Anstieg mit $N = 0$ ergab. Die Hystereseschleifen der beiden letztgenannten Proben sind nicht bekannt, so daß auch die zugehörigen μ -Kurven keine weiteren Aufschlüsse für unser Problem geben.

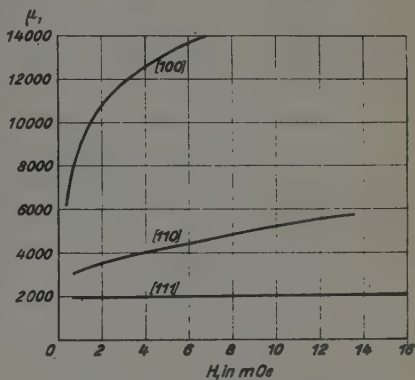


Fig. 7. Permeabilitätskurven von Einkristallrahmen aus Siliciumeisen mit verschiedener Orientierung nach Williams¹⁾.

Wenn auch durch diese Darlegungen ein Zusammenhang zwischen irreversiblen 180°-Wandverschiebungen und den gekrümmten μ -Kurven nahegelegt wird, so ist es durchaus nicht ausgeschlossen, daß auch irreversible 90°-Wandverschiebungen den neuen Typ von Permeabilitätskurven verursachen. Man hat ja bisher die Höhe der Anfangspermeabilität weicher Nickel-Eisenlegierungen durch 90°-Wandverschiebungen zu erklären vermocht, und es ist unwahrscheinlich, daß in dem besonders weichen Kern 18 nun die 180°-Wände besonders beweglich werden sollten.

Unabhängig von der Deutung der gekrümmten Kurven lassen sich aber schon jetzt allgemeine Angaben über die Bedingungen machen, unter denen solche Kurven auftreten. Den von uns untersuchten Proben mit großer Kurvenkrümmung — großem N — ist gemeinsam, daß die Energie der inneren Spannungen besonders klein gegenüber der Kristallenergie ist. Die erstere läßt sich wenigstens überschlägig in bekannter Weise aus der Anfangspermeabilität abschätzen. Bei den eisenreichen Legierungen ist diese Bedingung wegen deren hoher Kristallenergie auch ohne besondere Glühung erfüllt, und in der Tat kann man unter gewissen Umständen auch

¹⁾ H. J. Williams, Phys. Rev. 52, 747, 1004, 1937.

an normal geglühten eisenreichen Legierungen eine gekrümmte Permeabilitätskurve beobachten. Meist wird hier aber diese Gestalt der Permeabilitätskurve durch Nachwirkungserscheinungen beeinflusst, die erst durch eine Glühung bei hoher Temperatur beseitigt werden. Eine solche ist auch bei Nickel-Eisenlegierungen, welche eine geringe Kristallenergie besitzen, notwendig, um das Spannungsniveau genügend weit herabzusetzen.

Es hat sich gezeigt, daß bei Erfüllung der erwähnten Bedingung die Größe eines Faktors $4 H_c \mu_A / B_s$, der in der Theorie des Ferromagnetismus an verschiedenen voneinander unabhängigen Stellen mit etwas verschiedenem numerischen Faktor (π bzw. $9/2$) erscheint, ein Kriterium für das Auftreten der gekrümmten Permeabilitätskurve darstellt. Bei den gekrümmten Kurven, bei denen sich μ_A nicht durch Extrapolation bestimmen läßt, greifen wir versuchsweise einen Wert, z. B. bei $10 m\theta$, heraus. Es ergibt sich, daß der Faktor bei der Nickeleisenprobe Nr. 17 mit Rayleigh-Verhalten oberhalb 0,2, bei den Stoffen mit gekrümmter Kurve unterhalb 0,2 liegt. Dies ergibt sich aus Tabelle 2 mit den Sättigungswerten B_s für Siliciumeisen von 20000, Nickeleisen 14000, Mumetall 8000 und Chrom-, eisen 16000. Vergleicht man nur die vier Siliciumeisenproben miteinander so ergibt sich bei Anordnung nach fallenden Werten des obengenannten Faktors die gleiche Reihenfolge wie bei Ordnung nach steigenden Werten von N_r .

Hiermit sind nur einige Zusammenhänge angedeutet; ein tiefergehendes Verständnis der Erscheinungen ist nur auf Grund weiterer Untersuchungen zu gewinnen. Dazu gehört einmal die Ausdehnung der Versuche auf noch geringere Felder, besonders bei Stoffen mit wenig gekrümmter μ -Kurve. Bei den letzteren muß auch das Auftreten von Nachwirkung studiert werden, da gewisse Beobachtungen, wie z. B. die Tatsache, daß N_u meistens größer als N_r gefunden wird, sich als Nachwirkungseinfluß erklären lassen. Andere Versuche informatorischer Natur über den Temperatureinfluß auf N_u , bei denen sich N_u im Bereich zwischen -45° und $+105^\circ$ nur um 20% änderte, lassen die Möglichkeit offen, daß es sich dabei um temperaturunabhängige Nachwirkung handelt. Daneben sollte auch die Abhängigkeit des N_u von einer nach Vormagnetisierung zurückbleibenden Remanenz genauer untersucht werden, was bisher nur überschlägig durchgeführt werden konnte und ebenfalls eine geringe Änderung des N_u ergab.

6. Zusammenfassung.

In vielen ferromagnetischen Stoffen ergibt die Auftragung der Permeabilität über dem Felde in schwachen Feldern einen geradlinigen Verlauf,

aus dem man durch Extrapolation auf die Feldstärke Null die „Anfangspermeabilität“ finden kann. Diese Gesetzmäßigkeit ist in einer nach Rayleigh benannten Formel niedergelegt. Bei einer Anzahl von Stoffen zeigt jedoch die Permeabilitätskurve eine deutliche Krümmung auf den Koordinatenanfangspunkt hin, so daß eine Extrapolation hier nicht möglich ist. Der gekrümmten Permeabilitätskurve kann durch eine Erweiterung des Rayleighschen Gesetzes auf die allgemeine Form

$$\mu = aH^N (1 + bH) + 1$$

Rechnung getragen werden, wo a , b und N materialabhängige Konstanten sind. Auf Grund dieser Gleichung wird Remanenz und Fläche der Hystereseschleife und der Verlustwinkel bei Wechselstrommagnetisierung abgeleitet. Die auf die Spitzeninduktion bezogene Remanenz und der Verlustwinkel sollten danach, von einem endlichen durch N bestimmten Wert im Felde Null beginnend, geradlinig mit dem Felde ansteigen. Die Versuchsergebnisse an Legierungen aus Siliciumeisen, Nickeleisen und Chromeisen, die durch Glühung bei hoher Temperatur weitgehend von inneren Spannungen befreit wurden, bestätigen in einem beträchtlichen Feldbereich zufriedenstellend diese theoretischen Folgerungen. Die bei sehr niedrigen Feldstärken unter 5 mØ auftretenden Abweichungen beschränken den Gültigkeitsbereich der erweiterten Formel und verbieten einen Schluß auf die Permeabilität im Felde Null. In einem Deutungsversuch wird angenommen, daß die gekrümmten Permeabilitätskurven durch überwiegende Mitwirkung von irreversiblen Wandverschiebungen beim Magnetisierungsprozeß in schwachen Feldern verursacht werden, während bei Kurven vom Rayleigh-Typ in spannungsarmen Werkstoffen reversible 90°-Wandverschiebungen vorherrschend sind.

Über den Einfluß adsorbierten Sauerstoffs auf die Sekundäremission aufgedampfter Metallschichten bei 293° und 83° abs.

Von R. Suhrmann und W. Kundt¹⁾.

Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 26. Januar 1943.)

Im Hochvakuum aufgedampfte Cu-, Ag-, Au-, Cd- und Be-Schichten werden bei Zimmertemperatur der Einwirkung von Sauerstoff ausgesetzt. Anschließend wird evakuiert und die Ausbeute I_s/I_p der Sekundärelektronen in Abhängigkeit von der Energie der Primärelektronen abwechselnd bei Zimmertemperatur und der Temperatur der flüssigen Luft ermittelt. — Bei Zimmertemperatur sind die an Cu, Ag und Au gemessenen Werte von I_s/I_p durch die Sauerstoffeinwirkung nur wenig verändert. Werden die mit Sauerstoff beladenen Metallschichten jedoch auf 83° abs. abgekühlt, so nimmt die Sekundärelektronenausbeute für Primärelektronen geringer Energie (100 Volt) reversibel um 100 % zu. Gleichzeitig verschiebt sich das Maximum der Ausbeute nach kleineren Energien der Primärelektronen. Im Laufe von mehreren Stunden nimmt der Effekt ab, wobei die Metallschicht dauernd unter Klebvakuum steht. Die Zunahme der Ausbeute ist für schnelle Primärelektronen geringer als für langsame. Der Unterschied ist bei Au am größten, bei Cu am kleinsten. Mit Wasserstoff beladene Ag- und Au-Schichten zeigen den Effekt nur in sehr geringem Maße bzw. gar nicht. — Die Sekundäremission einer Cd-Schicht erhöht sich bereits bei Zimmertemperatur durch Einwirkung von O₂ bei dieser Temperatur um 100 % für langsame Primärelektronen; für schnelle ist die Zunahme geringer. Die reversible Erhöhung der Ausbeute durch Abkühlung der mit Sauerstoff beladenen Oberfläche auf 83° abs. ist um eine Zehnerpotenz kleiner als bei den edleren Metallen. — Die Ausbeute von Be nimmt durch die Sauerstoffeinwirkung bei Zimmertemperatur um mehrere 100 % zu, für schnelle Primärelektronen wesentlich stärker als für langsame. Auch bei Sauerstoff beladenem Be ist die reversible Ausbeuteerhöhung durch Abkühlung auf 83° abs. nur gering. Die reversible Temperaturabhängigkeit der Sekundäremission der mit Sauerstoff beladenen Metalloberflächen wird durch einen Temperatureinfluß auf die Wechselwirkung zwischen dem Metallgitter und den Sauerstoffatomen innerhalb des Gitters gedeutet.

1. Problemstellung.

Läßt man auf die reine Oberfläche eines edleren Metalls (Cu, Ag, Au) bei Zimmertemperatur Sauerstoff einwirken, so werden die Sauerstoffmoleküle mehr oder weniger in Atome gespalten, die entweder in das Metallinnere eindiffundieren oder auf der Oberfläche adsorbiert werden. In letzterem Falle bilden sie wegen ihrer hohen Elektronenaffinität eine mit

¹⁾ Eine kurze Veröffentlichung erfolgte in den Naturwiss. 27, 548, 1939.

der negativen Ladung nach außen gerichtete Doppelschicht und erhöhen deshalb die Elektronenaustrittsarbeit. Die Folge ist eine beträchtliche Herabsetzung der lichtelektrischen Elektronenemission dieser Metalle.

Da die Sekundärelektronen im Durchschnitt eine größere Anfangsgeschwindigkeit besitzen als die Photoelektronen und deshalb durch das Austrittspotential an der Oberfläche weniger behindert werden, wird die Sekundäremission durch eine Veränderung der Austrittsarbeit nur verhältnismäßig wenig beeinflusst ¹⁾. An der *Oberfläche* adsorbierte Sauerstoffatome verändern daher die Sekundärelektronenausbeute nur wenig ²⁾. Dagegen könnte der in den obersten Metallschichten gelöste Sauerstoff eine *Temperaturabhängigkeit* der Sekundäremission hervorrufen. Während die Sekundäremission einer reinen Metalloberfläche zwischen 83 und 293° abs. keinen merklichen Einfluß der Temperatur erkennen läßt ³⁾, könnte die Wechselwirkung zwischen dem Metallgitter und dem in den obersten Metallschichten gelösten Sauerstoff von der Temperatur abhängen und sich daher ein Temperatureinfluß auf die Sekundäremission eines edlen Metalls, das vorher der Einwirkung von Sauerstoff unterworfen wurde, bemerkbar machen.

Behandelt man ein weniger edles Metall (Be, Cd) mit Sauerstoff, so tritt an der Oberfläche eine Oxydbildung ein. Der aufgenommene Sauerstoff wird also fester gebunden als bei einem edleren Metall, so daß eine Beeinflussung der Wechselwirkung zwischen dem Metallgitter und dem Sauerstoff durch eine Temperaturänderung wenig wahrscheinlich ist. Aus diesem Grunde ist bei den mit Sauerstoff behandelten Oberflächen leichter oxydierbarer Metalle kein oder nur ein geringfügiger Temperatureinfluß auf die Sekundärelektronenausbeute zu erwarten.

Zur Prüfung dieser Folgerungen haben wir die Sekundärausbeute von Cu-, Ag-, Au-, Cd- und Be-Schichten, die bei 83° abs. kondensiert, dann auf Zimmertemperatur erwärmt und bei dieser Temperatur der Einwirkung von Sauerstoff unterworfen wurden, in Abhängigkeit von der Energie der Primärelektronen gemessen, und zwar bei 293 und 83° abs. Zur Kontrolle wurden auch einige Versuche mit adsorbiertem Wasserstoff ausgeführt.

¹⁾ J. H. De Boer u. H. Bruining, *Physica* 6, 941, 1939; H. Mahl, *Jahrb. AEG-Forschung* 6, 33, 1939. — ²⁾ L. R. G. Treloar, *Proc. Phys. Soc. London (A)* 49, 392, 1937. — ³⁾ Vgl. die Literaturzusammenstellung bei H. Bruining, *Die Sekundärelektronenemission fester Körper*, S. 84. Berlin 1942, sowie die vorangehende Arbeit der Verfasser, in der das Fehlen eines Temperatureinflusses zwischen 83° und 293° abs. bei reinen Metalloberflächen, die in der vorliegenden Arbeit benutzten Apparatur bestätigt wurde.

2. Ausführung der Versuche.

Als Untersuchungsgefäß diente die in einer vorangehenden Arbeit¹⁾ beschriebene Versuchszelle aus Wolframglas, bei der alle Glasteile miteinander verschmolzen waren und für deren Elektroden vakuumgeschmolzene Metalle verwendet wurden. Das bezüglich seiner Sekundäremission zu untersuchende Metall wurde auf das untere abgeflachte Ende eines Glasrohres aufgedampft, das durch Einfüllen von flüssiger Luft von außen auf 83° abs. gekühlt werden konnte. Dieses Rohr war zur Erhöhung der Wärmekapazität und zur Vermeidung elektrostatischer Störungen mit Kupferspänen gefüllt, die an Erde lagen.

Die Versuchsanordnung und die Meßmethode waren die gleichen wie in der vorangehenden Arbeit. Die verwendeten Elektronenströme lagen in der Größenordnung von 10^{-9} bis 10^{-10} Amp.

Für die Aufdampfversuche wurden vakuumgeschmolzene Metallproben benutzt. Ehe man sie in die eigentliche Versuchszelle einführte, heizte man in einer besonderen Vakuumapparatur zunächst die Verdampfungswendel aus Wolframdraht und dann die in ihr befindliche Metallprobe aus, bis das Metall zu verdampfen begann. Cu, Ag und Au schmolzen hierbei zu einem Kügelchen zusammen.

Darauf wurde das Ansatzrohr mit der Verdampfungswendel an die Versuchszelle angeschmolzen und die letztere an der Hochvakuumapparatur 4 bis 5 Stunden bei 350° C ausgeheizt. Die Metallteile der Elektronenkanone wurden durch Elektronenbombardement ausgeglüht und die Verdampfungswendeln bis kurz vor dem Beginn des Verdampfens der Metallproben geglüht.

Um einen gleichmäßigen und dichten Metallbelag der Prallelektrode zu erhalten, wurde die zu untersuchende Metallschicht bei 83° abs. kondensiert und dann auf Zimmertemperatur erwärmt. Wie an anderer Stelle ausgeführt wurde²⁾, vermeidet man hierdurch die Bildung einzelner voneinander getrennter Kristallite, die dem Metallspiegel ein mattes Aussehen verleihen. Bei 293° abs. ließ man nun Sauerstoff oder Wasserstoff in die Versuchszelle eintreten.

Der Sauerstoff wurde entweder einer Stahlflasche entnommen und durch Überleiten über erhitztes Kupfer und Ausfrieren mit flüssiger Luft gereinigt oder in der Vakuumapparatur durch Erhitzen von KMnO_4 -Kristallen hergestellt. Ein Unterschied in den Versuchsergebnissen war

¹⁾ R. Suhrmann u. W. Kundt, ZS. f. Phys. 120, 363, 1943. — ²⁾ R. Suhrmann u. G. Barth, ZS. f. Phys. 103, 133, 1936, besonders S. 148, unten.

nicht zu beobachten. Den Wasserstoff ließen wir durch ein Palladiumröhrchen eindiffundieren unter Benutzung der in Fig. 1 dargestellten Vorrichtung¹⁾. Nachdem das Gas einige Minuten auf die Metalloberfläche bei Zimmertemperatur eingewirkt hatte, wurde evakuiert und bei Klebvakuum und im allgemeinen 293° abs. die Ausbeute als Funktion des Beschleunigungspotentials der Primärelektronen gemessen. Hierauf kühlten wir die Parallelektrode mit flüssiger Luft ein und maßen wenige Minuten nach Beendigung der ersten Messung die Ausbeute bei 83° abs. Das Erwärmen auf Zimmertemperatur konnte durch elektrisches Heizen beschleunigt werden; es dauerte etwa 30 Minuten. Nun ermittelte man wieder die Ausbeute bei 293° abs. und bei 83° abs. und setzte die Ermittlung solcher Meßreihen bei laufenden Pumpen fort.

3. Versuchsergebnisse.

a) *Kupfer mit Sauerstoff.* Eine undurchsichtige Cu-Schicht stand 10 Minuten lang unter einem O_2 -Druck von 10 Torr bei 293° abs. Nach dem Evakuieren auf Klebvakuum wurde sie auf 83° abs. eingekühlt und die Sekundärelektronenausbeute gemessen (Kurve 1 in Fig. 2). Wie Kurve 2 erkennen läßt, lag die Ausbeute nach dem Erwärmen auf 293° abs. wesentlich niedriger, bei 100 Volt um 101%; bei 800 Volt um 41%.

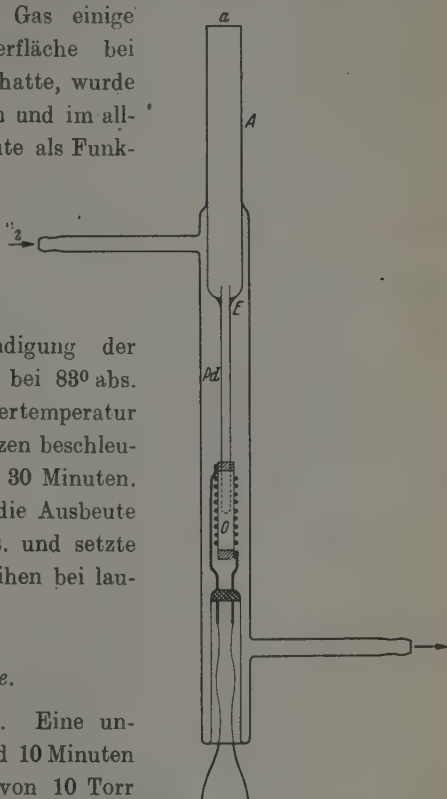


Fig. 1. Vorrichtung zum Einleiten reinsten Wasserstoffs durch ein Palladiumröhrchen.

¹⁾ Beschrieben bei R. Suhrmann u. A. Mittmann, ZS. f. Phys. 111, 18, 1938; Fußnote auf S. 21. In das Rohr A, das bei a an die Apparatur angeschmolzen wird, ist das Palladiumröhrchen Pd bei E eingeschmolzen. Das untere verschlossene Ende von Pd wird durch ein elektrisches Öfchen O, das aus einem mit Wolframdraht umwickelten Porzellanröhrchen besteht, geheizt. Der das Palladiumröhrchen umpülende Wasserstoff kühlt gleichzeitig die Einschmelzstelle E.

Da zwischen der Beendigung der Messung von Kurve 1 und dem Beginn von Kurve 2 etwa 30 Minuten verstrichen waren, können die Kurven 1 und 2 weniger gut miteinander verglichen werden als die Kurven 2 und 3, denn Kurve 3 erhielten wir wegen der geringen Einkühlzeit unmittelbar nach Kurve 2. Beim Vergleich der Kurven 2 und 3 sieht man, daß die Abkühlung

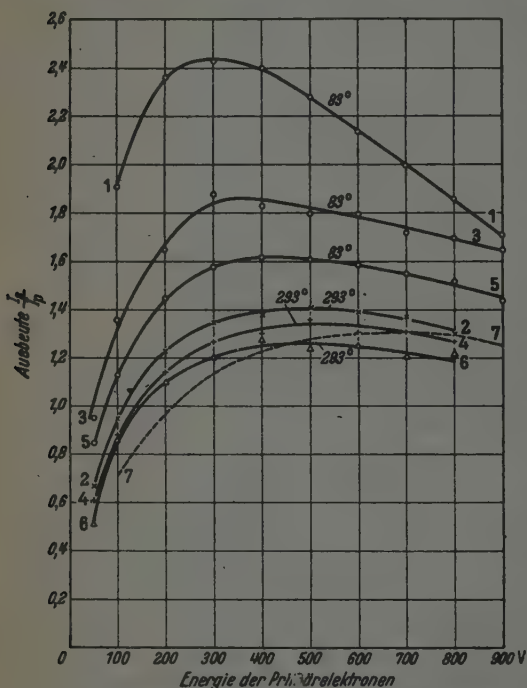


Fig. 2. Sekundärelektronenausbeute einer Cu-Schicht nach dem Einwirken von O_2 bei 293° abs. und nachfolgendem Evakuieren. Kurve 1 bei 83° abs.; anschließend Kurve 2 bei 293° abs.; Kurve 3 bei 83° abs.; Kurve 4 bei 293° abs.; Kurve 5 bei 83° abs.; Kurve 6 bei 293° abs. Zum Vergleich: Reine aufgedampfte Cu-Schicht (Kurve 7).

vorliegenden Versuche nachprüften, ist bei reinen Metalloberflächen ein Temperatureinfluß auf die Sekundäremission zwischen 293° und 83° abs. nicht zu bemerken. Die gefundene Erhöhung der Ausbeute bei Abkühlung, wenn eine O_2 -Adsorption vorangegangen ist, kann also nur auf die letztere zurückgeführt werden.

Die O_2 -Adsorption an der Cu-Oberfläche verändert auch bei Zimmertemperatur die Gestalt der Ausbeutekurve. Wie der Vergleich der Kurven 2, 4 und 6 mit Kurve 7 erkennen läßt, wird das Ausbeutemaximum durch

der Pallelektrode wieder einen beträchtlichen Anstieg der Ausbeute von 39% bei 100 Volt und 29% bei 800 Volt hervorruft, obwohl der McLeod nach der O_2 -Beladung seit über einer Stunde Klebvakuum anzeigte. Die abermalige Erwärmung auf 293° abs. ergab wieder eine Abnahme (Kurve 4) und die unmittelbar anschließende Abkühlung auf 83° abs. wieder eine Zunahme (Kurve 5) um 29% bei 100 Volt und 19% bei 800 Volt. Nach der Erwärmung auf 293° abs. war die Sekundäremission wieder auf Kurve 6 gesunken.

Wie wir in der vorangehenden Arbeit bestätigten und gelegentlich der

die O_2 -Adsorption von 700 Volt nach etwa 500 Volt verschoben. Die stärkste Verschiebung zeigt die zu Anfang bei 83° abs. aufgenommene Kurve 1; hier liegt das Maximum bei 300 Volt und rückt mit zunehmender Versuchsdauer zu höheren Potentialen.

b) *Silber mit Sauerstoff und Wasserstoff.* Eine undurchsichtige Silberschicht zeigte bei 83° abs. ohne O_2 -Beladung die in Fig. 3 wiedergegebene Ausbeutekurve 1. Nachdem die Schicht bei Zimmertemperatur 5 Minuten lang unter O_2 von Atmosphärendruck gestanden hatte, war die bei Klebvakuum und 293° abs. gemessene Ausbeute (Kurve 2) im ganzen Spannungsbereich der Primärelektronen ein wenig gesunken, bei 200 Volt um 4,0%, bei 800 Volt um 10,6%. Gleichzeitig hat sich das Ausbeutemaximum zu kleineren Spannungswerten von 800 bis etwa 600 Volt verschoben.

Die Schicht wurde nun auf 83° abs. abgekühlt und sofort die Ausbeutekurve 3 ermittelt. Sie zeigt einen beträchtlichen Temperatureffekt: Die Ausbeute nimmt durch die Abkühlung bei 100 Volt um 59,5%, bei 800 Volt um 54% zu.

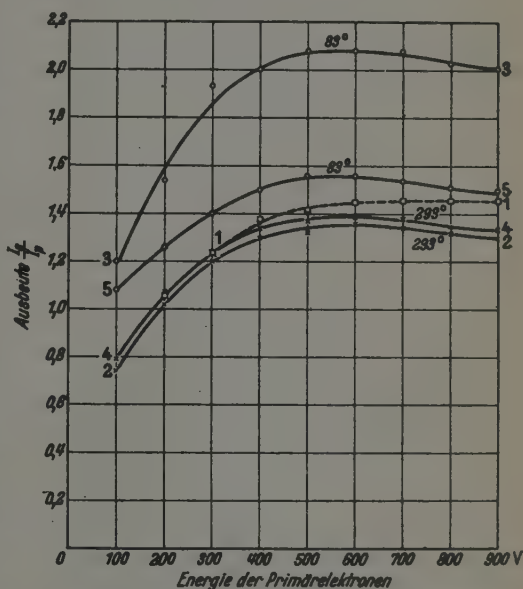


Fig. 3. Sekundärelektronenausbeute einer Ag-Schicht. Kurve 1 vor dem Einwirken des O_2 , gemessen bei 83° abs.; Kurve 2 nach dem Einwirken von O_2 bei 293° abs. und nachfolgendem Evakuieren, gemessen bei 293° abs.; Kurve 3 bei 83° abs.; Kurve 4 bei 293° abs.; Kurve 5 bei 83° abs.

Nachdem die Schicht bei Zimmertemperatur 11 Stunden lang unter Klebvakuum gestanden hatte, wurde Kurve 4 bei 293° abs. gemessen. Die Ausbeute ist etwas angewachsen; sie nähert sich mehr der Ausgangskurve 1 der reinen Ag-Oberfläche. Wie Kurve 5, die wir unmittelbar nach Kurve 4, aber bei 83° abs., erhielten, erkennen läßt, ist der Temperatureinfluß jedoch noch vorhanden. Die Erhöhung der Ausbeute bei Abkühlung beträgt 36% bei 100 Volt und 12% bei 800 Volt. Das Ausbeutemaximum

ist wie im Falle des Kupfers bei 83° abs. immer etwas zu kleineren Spannungswerten verschoben gegenüber seiner Lage bei 293° abs.

Fig. 4 zeigt den Temperatureinfluß bei vorangehender Einwirkung von Wasserstoff auf eine reine Ag-Oberfläche. Die Ausbeutekurve der reinen undurchsichtigen Ag-Schicht bei 83° abs. stellt Kurve 1 dar. Nachdem die Schicht eine Stunde lang unter H_2 von 0,1 Torr gestanden hatte, er-

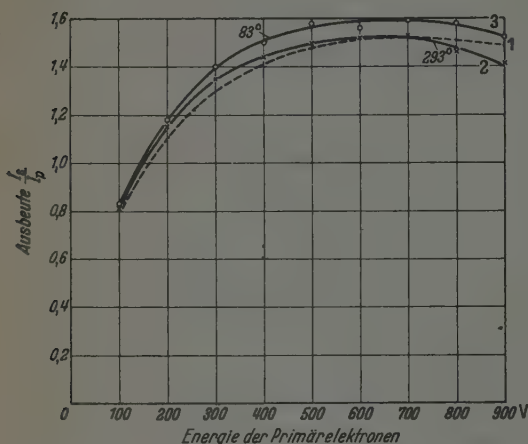


Fig. 4. Sekundärelektronenausbeute einer Ag-Schicht vor (Kurve 1) und nach (Kurve 2) dem Einwirken von H_2 und nachfolgendem Evakuieren; Kurve 1 gemessen bei 83° abs.; Kurve 2 bei 293° abs.; Kurve 3 nach dem Einkühlen auf 83° abs.

hielten wir nach dem Evakuieren Kurve 2 bei 293° abs. Kurve 2 weicht nur wenig von Kurve 1 ab. Das Ausbeutemaximum ist ein wenig nach kleineren Spannungswerten verschoben. Unmittelbar nach Kurve 2 kühlen wir ein und ermittelten Kurve 3, die einen geringfügigen Temperatureinfluß bei Wasserstoffbeladung erkennen läßt:

Bei 100 Volt nimmt die Ausbeute um 2,6%, bei 800 Volt um 6,4% bei Abkühlung zu. Der Temperatureffekt des mit H_2 beladenen Silbers ist also um eine Zehnerpotenz kleiner als bei O_2 -Einwirkung; mit zunehmender Energie der Primärelektronen wächst er etwas an.

c) *Gold mit Sauerstoff und Wasserstoff.* Fig. 5 zeigt die bei 83° abs. gemessene Ausbeutekurve 1 einer Goldschicht vor der Beladung mit O_2 . Diese Schicht setzten wir eine Stunde lang bei 293° abs. der Einwirkung eines Sauerstoffdruckes von 20 Torr aus, evakuierten bis Klebvakuum und kühlten sie auf 83° abs. Die bei dieser Temperatur gemessene Ausbeutekurve 2 in Fig. 5 liegt wesentlich höher als Kurve 1; die Ausbeute hat bei 200 Volt um 96%, bei 800 Volt um 42% zugenommen. Diese starke Zunahme ist jedoch nur bei 83° abs. vorhanden. Erwärmt man die Schicht auf 293° abs., so sinkt die Ausbeute auf Kurve 3 herab. Da die Sekundäremission der reinen Au-Oberfläche (Kurve 1) nicht von der Temperatur abhängt und Kurve 1 also auch die Ausbeute bei 293° abs. wiedergibt, ruft die O_2 -Beladung der Au-Schicht (Kurve 3) bei 293° abs. nur eine gering-

fürige Erhöhung der Ausbeute um 11% bei 200 Volt und 8% bei 800 Volt hervor. Dagegen weist die mit O_2 beladene Schicht wie bei Ag und Cu einen großen negativen Temperaturkoeffizienten zwischen 83 und 293° abs. auf: Von Kurven 2 bis 3 sinkt die Ausbeute bei 100 Volt um 105%, bei 800 Volt um 32%.

Während zwischen den Kurven 2 und 3 wegen der Erwärmung auf Zimmertemperatur längere Zeit verstrich, sind die Kurven 3 und 4 wieder unmittelbar hintereinander gemessen und geben daher den wahren Temperatureinfluß wieder: Durch die Abkühlung auf 83° abs. steigt die Ausbeute bei 100 Volt um 82%, bei 800 Volt um 18%. An Kurve 4 anschließend wurde die Schicht wieder auf 293° abs. erwärmt und Kurve 5 gemessen, und unmittelbar nach dieser bei 83° abs. Kurve 6. Der Anstieg der Aus-

beute bei Abkühlung auf 83° abs. beträgt jetzt 69% bei 100 Volt und 14% bei 800 Volt. Die an Kurve 6 anschließend nach dem Erwärmen auf Zimmertemperatur erhaltene Kurve 7 liegt wieder etwas tiefer als Kurve 5; mit fortschreitender Zeit seit dem Einwirken des O_2 (Kurven 3, 5, 7) nähert sich die bei 209° abs. gemessene Ausbeute der vor der O_2 -Einwirkung gefundenen. Gleichzeitig rückt das Ausbeutemaximum zu höheren Spannungen, wie man besonders gut an den bei 83° abs. ermittelten Kurven 2, 4 und 6 erkennt, bei denen es sich von 400 bis 550 Volt verlagert, während es sich bei den bei 293° abs. gemessenen Kurven 3, 5 und 7 von 650 bis 700 Volt verschiebt.

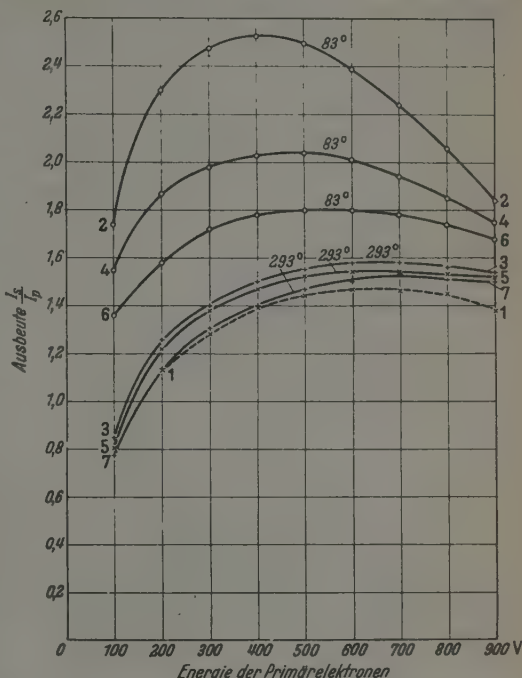


Fig. 5. Sekundärelektronenausbeute einer Goldschicht. Kurve 1 vor dem Einwirken von O_2 , gemessen bei 83° abs.; Kurve 2 nach dem Einwirken des O_2 bei 293° abs. und anschließendem Evakuieren und Abkühlen auf 83° abs.; gemessen bei 83° abs.; Kurve 3 bei 293° abs.; Kurve 4 bei 83° abs.; Kurve 5 bei 293° abs.; Kurve 6 bei 83° abs.; Kurve 7 bei 293° abs.

Der Einfluß der Temperatur auf eine mit Wasserstoff beladene Au-Schicht ist aus Fig. 6 zu ersehen. Die Schicht stand 2 Stunden lang unter H_2 von 150 Torr. Dann wurde evakuiert und Kurve 1 bei 293° abs. gemessen. Die Abkühlung ergab die Werte 2, die bei hohen Spannungen ein wenig über denen von Kurve 1 liegen. Der Temperatureffekt ist bei H_2 -

Beladung der Au-Schicht verschwindend klein. ■

Zum Vergleich ist die an einer reinen Goldoberfläche bei 83° abs. ermittelte Kurve 3 (identisch mit Kurve 1 in Fig. 5) eingetragen. Die Beladung mit H_2 läßt offenbar die Ausbeute etwas ansteigen.

d) *Kadmium und Beryllium mit Sauerstoff.* Da der Temperatureffekt bei sauerstoffbeladenem Gold, also dem edelsten der drei untersuchten Metalle, besonders hohe Anfangswerte aufwies,

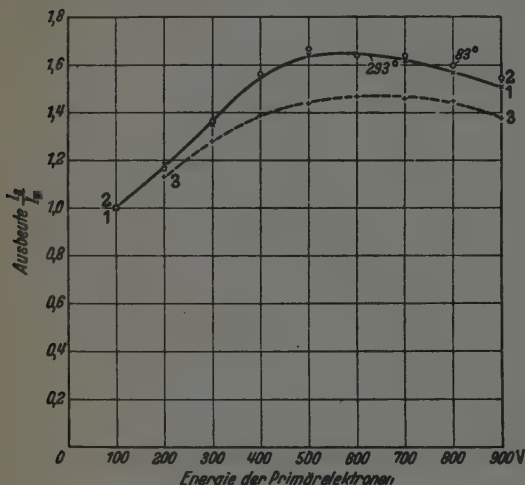


Fig. 6. Sekundärelektronenausbeute einer Au-Schicht nach dem Einwirken von H_2 bei 293° abs. und nachfolgendem Evakuieren (Kurve 1); Werte 2 bei 83° abs. Zum Vergleich: Reine aufgedampfte Au-Schicht (Kurve 3).

nahmen wir an, daß der Effekt bei stärkerer chemischer Bindung des Sauerstoffs, d. h. bei weniger edlen Metallen, kleiner ausfallen würde. Wir untersuchten daher auch den Temperatureinfluß auf die Sekundäremission von Cd und Be, nachdem diese Metalle vorher dem Einfluß von O_2 bei Zimmertemperatur ausgesetzt waren.

Wir heizten zunächst die Zelle, die Cd in der Aufdampfwendel enthielt, 6 Stunden bei $250^\circ C$ aus¹⁾ und kondensierten dann das aus der Wendel verdampfte Cd auf dem Ende des mit flüssiger Luft gekühlten Glasrohres innerhalb der Zelle. Wir erhielten so einen sehr guten zusammenhängenden Cd-Spiegel, den wir anschließend auf Zimmertemperatur erwärmten. Diese reine Cd-Oberfläche ergab die in Fig. 7 dargestellte Ausbeutekurve 1, die ein Maximum bei 450 Volt mit $I_s/I_p = 1,13$ besaß.

Nun stellten wir bei Zimmertemperatur einen O_2 -Druck von 10 Torr her, evakuierten nach 15 Minuten und ermittelten bei 293° abs. die Aus-

¹⁾ Eine höhere Ausheiztemperatur war in diesem Falle nicht zweckmäßig, da das Cd sonst vorzeitig verdampft wäre.

beutekurve 2 in Fig. 7. Das Ausbeutemaximum hat sich von 450 nach 350 Volt verlagert, und die Ausbeute bei dieser Spannung ist von 1,13 auf den Wert 2,01 angewachsen. Die Zunahme der bei Zimmertemperatur gemessenen Sekundäremission durch die Einwirkung des O_2 beträgt bei 100 Volt 111%, bei 200 Volt 123% und bei 800 Volt 54%, ist also wesentlich größer als bei den edlen Metallen, bei denen sie im Höchsfalle (Au) nur wenige Prozent betrug.

Dagegen ist der Einfluß der Abkühlung auf die Sekundäremission des Cd nach O_2 -Beladung um eine Größenordnung kleiner als bei den edleren Metallen Cu, Ag und Au, wie man an Kurve 3

ersieht, die unmittelbar nach Kurve 2, nachdem man die Schicht auf 83° abs. abgekühlt hatte, aufgenommen wurde. Die Zunahme der Ausbeute durch die Abkühlung der mit Sauerstoff beladenen Cd-Schicht beträgt bei 100 Volt 18%, sinkt aber schon bei 200 Volt auf 7% und liegt bei 800 Volt unterhalb von 1%.

Nach der Aufnahme von Kurve 3 erwärmten wir die Schicht wieder auf 293° abs. und erhielten für die Ausbeute bei 300 Volt einen auf Kurve 2 liegenden Wert. Eine Abnahme der Sekundäremission bei 293° abs. konnte auch nach 4 Stunden nicht festgestellt werden.

Fig. 8 zeigt den Einfluß des Sauerstoffs auf die Sekundäremission des Berylliums. Kurve 1 wurde an einer reinen, bei 83° abs. kondensierten und auf 293° abs. erwärmten Be-Schicht erhalten. Am Maximum bei 200 Volt beträgt die Ausbeute 0,63.

Wir setzten nun die Be-Schicht bei 293° abs. einem O_2 -Druck von 50 Torr aus und evakuierten. Nachdem Klebvakuum erreicht war, kühlten wir sie auf 83° abs. und ermittelten Kurve 2. Nach der Erwärmung

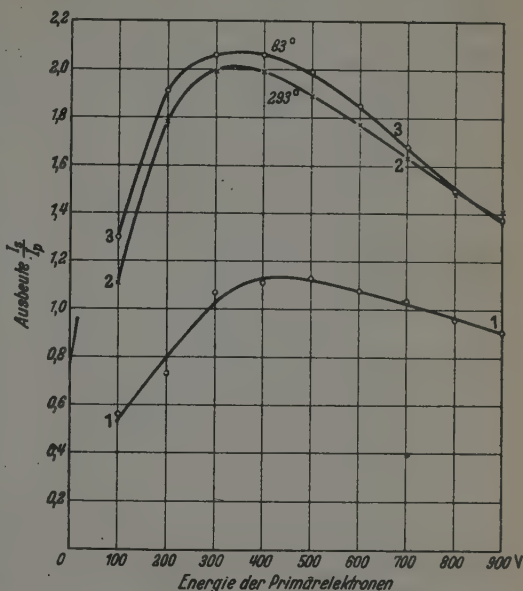


Fig. 7. Sekundärelektronenausbeute einer Cd-Schicht. Kurve 1: Reine Oberfläche. Kurven 2 und 3: Nach dem Einwirken von O_2 bei 293° abs.; Kurve 2 gemessen bei 293° abs.; Kurve 3 gemessen bei 83° abs.

auf Zimmertemperatur erhielten wir Kurve 3. Auch die Be-Schicht hat durch die O_2 -Einwirkung eine starke Zunahme der Sekundäremission er-

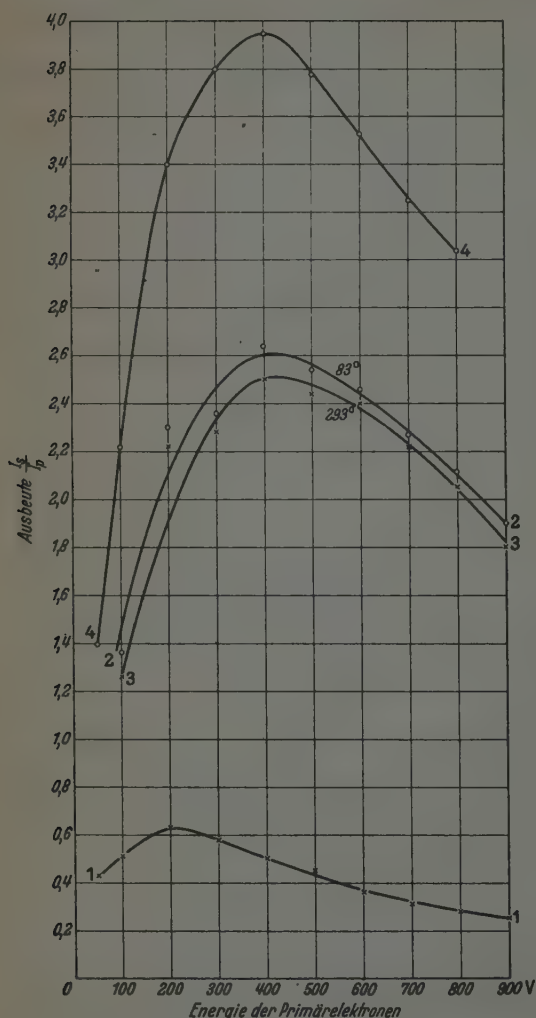


Fig. 8. Sekundärelektronenausbeute einer Be-Schicht. Kurve 1: Reine Oberfläche. Kurven 2 u. 3: Nach dem Einwirken von O_2 bei 293° abs.; Kurve 2 gemessen bei 83° abs.; Kurve 3 gemessen bei 293° abs.; Kurve 4: Nach dem Einwirken von O_2 bei 350° C und anschließendem Ausheizen der Zelle bei Klebvakuum und derselben Temperatur.

fahren, wobei sich das Maximum nicht wie bei Cadmium nach kleineren, sondern nach größeren Spannungen bis 400 Volt verschoben hat. Die Zunahme der Ausbeute beträgt bei 100 Volt 146% und wächst mit zunehmender Spannung an bis 622% bei 800 Volt und 628% bei 900 Volt, während sie bei Cd oberhalb 200 Volt mit zunehmender Spannung abfiel.

Kollath erhielt nach der Oxydierung einer Be-Schicht durch Glimmentladung in O_2 einen maximalen Ausbeutewert von 2,0 bis 2,2. Die starke Aktivierung des Sauerstoffs durch Glimmentladung ist jedoch nicht unbedingt erforderlich; bereits die Gegenwart von O_2 bei Zimmertemperatur erhöht die Ausbeute auf etwa 2,5, wie die vorliegenden Versuche zeigen.

Ein sehr viel stärkeres Anwachsen der Sekundäremission durch die Einwirkung des O_2 ist zu beobachten, wie

Kollath fand, wenn man die Be-Schicht in O_2 auf höhere Temperaturen erwärmt. Die hohe Ausbeute bleibt auch erhalten, wenn die Schicht

nach der Behandlung in O_2 noch im Vakuum ausgeheizt wird. So wurde Kurve 4 in Fig. 8 gemessen, nachdem wir Schicht und Zelle nach der O_2 -Behandlung bei $350^\circ C$ noch 4 Stunden im Vakuum ausgeheizt hatten.

Auch die mit O_2 behandelte Be-Schicht zeigt eine geringe Zunahme der Ausbeute bei Abkühlung auf 83° abs.: Die Zunahme beträgt 15% bei 100 Volt und sinkt mit zunehmender Spannung schnell ab bis 3% bei 800 Volt. Sie liegt in derselben Größenordnung wie bei der Cd-Schicht nach Einwirkung von O_2 .

4. Besprechung der Versuchsergebnisse.

Die Versuche zeigen, daß die Sekundäremission sauerstoffbeladener Metalloberflächen bei Abkühlung von 293° auf 83° abs. zum Teil beträchtlich zunimmt. Bei schwerer oxydierbaren edleren Metallen, wie Cu, Ag und Au, liegt die relative Zunahme für Primärelektronen geringerer Energie kurze Zeit nach der Adsorption des O_2 in der Größenordnung von 100%, bei den leichter oxydierbaren unedleren hingegen, wie Cd und Be, ist sie um eine Größenordnung kleiner.

Bei allen untersuchten Metallen ist die relative Zunahme geringer, wenn die auslösenden Primärelektronen größere Energie besitzen. Besonders deutlich ist dies aus Fig. 9 zu erkennen, in der die relative Zunahme der Ausbeute als Funktion der Primärelektronenenergie eingetragen ist¹⁾. Man sieht, daß der Unterschied für langsame und schnelle Primärelektronen bei Au am größten, bei Cu am kleinsten ist. Auch der Effekt selbst ist bei Au besonders auffallend.

Ferner wurde festgestellt, daß sich das Maximum der Ausbeute bei Abkühlung von sauerstoffbeladenem Cu, Ag und Au nach kleineren Energien

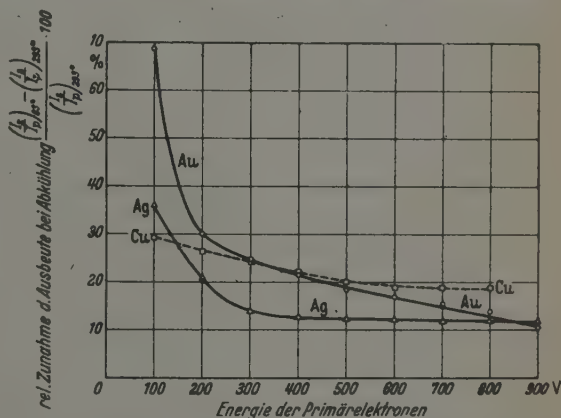


Fig. 9. Relative Zunahme der Sekundärelektronenausbeute bei Abkühlung sauerstoffbeladener Au-, Ag- und Cu-Schichten von 293° auf 83° abs.

¹⁾ Bei Aufnahme der Meßreihen für Cu und Au waren ungefähr gleich lange Zeiten seit Beendigung der Sauerstoffeinwirkung verstrichen. Die Ag-Kurve würde bei gleich langer Zeit etwas höher liegen.

der Primärelektronen verlagert und diese Verschiebung ebenso wie der Temperatureffekt im Laufe der Zeit wieder zurückgeht, wenn die Schicht sich dauernd unter Klebvakuum befindet.

Man könnte die Erhöhung der Ausbeute der gekühlten Schicht zunächst dadurch zu erklären versuchen, daß auch der als Sauganode dienende Metallbelag der kugelförmigen Gefäßwandung, die das gekühlte Rohr umgibt, Sauerstoff aufgenommen hat, der dauernd abgegeben würde und sich auf der gekühlten Prallelektrode kondensierte. Wäre dies die Ursache, so müßte sich die Sekundäremission nach der Einkühlung der Prallelektrode zeitlich ändern, ähnlich wie die Photoelektronenemission einer in Cs-Dampf geringen Druckes befindlichen Elektrode mit zunehmender Kondensation von Cs-Atomen. Das ist aber nicht der Fall: Die Sekundäremission ist auch unmittelbar nach der Abkühlung innerhalb einer Meßreihe zeitlich konstant, gleichgültig, ob der Effekt kurz nach der O_2 -Einwirkung oder mehrere Stunden danach beobachtet wird. Die Erhöhung der Sekundäremission bei Abkühlung des mit adsorbiertem Sauerstoff versehenen Metalls kann daher nur auf eine reversible Veränderung dieses Systems durch die Abkühlung zurückgeführt werden.

Die bei Zimmertemperatur gemessenen Kurven der mit Sauerstoff beladenen Oberflächen in Fig. 2, 3 und 5 weichen auch längere Zeit nach der O_2 -Einwirkung von der gestrichelten Kurve der reinen Oberfläche merklich ab. Besonders deutlich ist der Unterschied bei Cu (Fig. 2). Bei Ag (Fig. 3) und besonders bei Au (Fig. 5) nähern sich die Zimmertemperaturkurven 2 und 4 in Fig. 3 bzw. 3, 5 und 7 in Fig. 5 zunehmend der Kurve der reinen Oberfläche. Da gleichzeitig der Temperatureffekt abnimmt, geht man wohl nicht fehl in der Annahme, daß die zeitliche Verminderung des Effektes zumindest bei Ag und Au auf der teilweisen Abgabe des adsorbierten Sauerstoffs im Hochvakuum beruht. Es wäre allerdings auch möglich, daß der adsorbierte Sauerstoff einer mit der Zeit fortschreitenden Veränderung unterworfen ist, z. B. könnte der in Form von Atomen in das Metall eingedrungene Sauerstoff im Vakuum an die Oberfläche diffundieren und dort nach und nach Moleküle bilden, die von der Oberfläche in das Vakuum abgegeben werden¹⁾.

Bei der Deutung des Temperatureffektes kann man sich insbesondere auf die in Fig. 9 dargestellte Abhängigkeit von der Energie der Primärelektronen stützen. Aus ihr folgt zunächst, daß nicht etwa die Sekundärelektronen eine Ionisation des adsorbierten Sauerstoffs hervorrufen. Wäre

¹⁾ Vgl. J. D. Fast, Philips techn. Rundsch. 6, 369, 1941.

dies der Fall, so könnte der Effekt keine so große Verschiedenheit für langsame und schnelle Primärelektronen aufweisen, wie dies bei Au zu beobachten ist.

Aus dem Auftreten des Effektes auch für schnelle Primärelektronen folgt, daß der von der Temperatur abhängige Zustand des Systems Metall-Sauerstoff noch in Atomlagen, bis zu denen Primärelektronen von 900 e-Volt eindringen können, vorhanden ist. Bei Cu erstreckt er sich also in größere Tiefen als bei Ag und Au (Fig. 9). Offenbar ist also der Sauerstoff bei der Adsorption in Cu tiefer eingedrungen als in Ag und Au, der Konzentrationsunterschied zwischen tieferen und weniger tiefen Atomlagen ist bei Au größer als bei Ag und Cu, denn die Abnahme des Effektes mit zunehmender Energie der Primärelektronen ist bei Au am größten, bei Cu am kleinsten.

Aus diesen Überlegungen geht gleichzeitig hervor, daß eine Temperaturbeeinflussung der *Elektronenaustrittsarbeit* für die Deutung des Effektes *nicht* in Frage kommt. Die im Verhältnis zum Austrittspotential sehr energiereichen Primärelektronen würden hierdurch nicht beeinflusst, sondern nur die Sekundärelektronen, deren Energie nicht wesentlich von der Primärelektronenenergie abhängt. Eine Erniedrigung der Austrittsarbeit durch Abkühlung würde deshalb eine *gleichmäßige* Erhöhung der Sekundärelektronenausbeute unabhängig von der Energie der Primärelektronen hervorrufen, was nicht beobachtet wurde.

Da der Temperatureffekt bei den weniger edlen Metallen Cd und Be um eine Größenordnung kleiner ist als bei Cu, Ag und Au, ist anzunehmen, daß der Bindungszustand des Sauerstoffs innerhalb des Metalls durch die Temperaturerniedrigung eine Änderung erfährt. In den edleren Metallen sind die auf den Sauerstoff ausgeübten Bindungskräfte klein; daher kann sein Bindungszustand durch die Temperaturbewegung beeinflusst werden, um so stärker, je edler das Metall ist (Fig. 9). Bei den unedleren Metallen hingegen ist der Sauerstoff von vornherein wesentlich fester gebunden, so daß der Einfluß durch die Temperaturbewegung nur gering ist.

Bemerkenswert ist die bereits bei Zimmertemperatur zu beobachtende beträchtliche Erhöhung der Sekundäremission des Cd und Be durch die Sauerstoffaufnahme; insbesondere, wie Fig. 10 zeigt, daß diese Zunahme für Be bei kleinen Primärelektronenenergien klein ist und mit zunehmender Energie anwächst, während sie für Cd im selben Sinne verläuft wie der Temperatureffekt für die edleren Metalle Cu, Ag und Au, also bei kleinen Energien groß ist und mit zunehmender Energie der Primärelektronen abfällt. Dies läßt vermuten, daß das Anwachsen der Sekundärelektronenausbeute von Be durch Sauerstoffbehandlung eine andere Ursache hat als

bei Cd, bei dem vielleicht der Bindungszustand des adsorbierten Sauerstoffs bei Zimmertemperatur ähnlich dem im sauerstoffbeladenen Cu, Ag und Au bei tiefen Temperaturen ist. Auf das Vorliegen besonderer Verhältnisse bei sauerstoffbeladenem Be deutet ja auch die von Kollath gefundene und von uns bestätigte weitere beträchtliche Emissionssteigerung von Be hin, das bei höherer Temperatur der Sauerstoffeinwirkung ausgesetzt wurde.

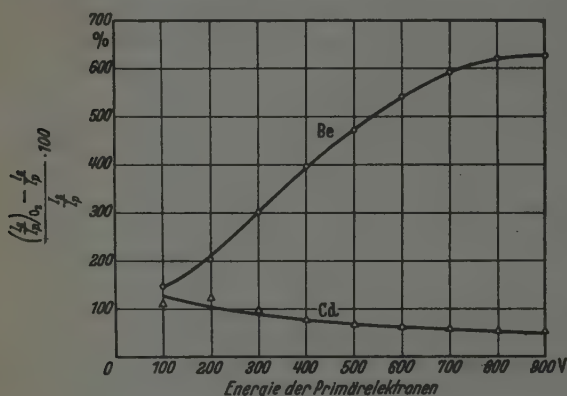


Fig. 10. Relative Zunahme der Sekundärelektronenausbeute I_s/I_p von Cd- und Be-Schichten durch die Einwirkung von Sauerstoff $\left[\left(\frac{I_s}{I_p}\right)_{O_2}\right]$ bei Zimmertemperatur.

0,001% lag. Trotz der geringen Verunreinigung beträgt der O_2 -Partialdruck bei 1 Torr immerhin 10^{-4} bis 10^{-5} Torr, ist also ausreichend, um die Oberfläche in verhältnismäßig kurzer Zeit mit Sauerstoff zu besetzen, zumal die Glimmentladung diesen Vorgang begünstigte²⁾.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft sowie der Firma Telefunken, Laboratorium für Elektronenforschung, sind wir für die materielle Unterstützung dieser Untersuchung zu Dank verpflichtet. Herrn I. N. Stranski (zur Zeit Breslau) dankt der eine von uns (Suhrmann) für wertvolle Diskussionen.

Breslau, Physikalisch-chemisches Institut der Technischen Hochschule und der Universität.

¹⁾ P. Göplich, Phys. ZS. 42, 129, 1941. — ²⁾ Um die Einwirkung ohne den störenden Sauerstoffgehalt untersuchen zu können, dürfte es sich empfehlen, die Edelgase vor dem Einlassen nach der Gehlhoffschen Methode durch eine Glimmentladung mit Alkalielektroden zu reinigen.

Die atomaren Konstanten e , e/m_0 und h *).

Von U. Stille in Braunschweig.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 1. Dezember 1942.)

Entsprechend den in einer früheren Veröffentlichung aufgestellten allgemeinen Gesichtspunkten werden die zur Bestimmung der Atomkonstanten verfügbaren experimentellen Daten neu zusammengestellt und diskutiert. In einem I. Teil sind die hierfür erforderlichen Hilfsgrößen zusammengefaßt. Die Zahlenwerte für die elektrischen Umrechnungsfaktoren werden dabei einer weiteren Veröffentlichung entnommen, die dieses Thema gesondert behandelt. Als zur Zeit experimentell gesicherte Werte sind für die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 , die Induktionskonstante μ_0 , die Influenzkonstante ϵ_0 , die spezifische Molekülzahl N_L und die spezifische Ionenladung F folgende anzunehmen: $c_0 = (2,99777 \pm 0,00020) \cdot 10^8$ m/sec, $\mu_0 = (1,25602 \pm 0,00002) \cdot 10^{-6}$ Volt · sec/Amp · m, $\epsilon_0 = (8,8594 \pm 0,0014) \cdot 10^{-12}$ Amp · sec/Volt · m, $N_L = (6,0243 \pm 0,0048) \cdot 10^{26}$ Kilomol⁻¹ und $F = (9,6520_3 \pm 0,0006) \cdot 10^7$ Amp · sec/Kiloäquivalent, wobei die beiden letzten Zahlenwerte auf die physikalische Atomgewichtsskala bezogen sind. Im Teil II werden auf Grund des vorliegenden experimentellen Materials Zahlenwerte für die drei atomaren Konstanten abgeleitet. Es ergeben sich für die Elementarladung e , die spezifische Elektronenladung e/m_0 und das Plancksche Wirkungsquantum h : $e = (1,6022 \pm 0,0014) \cdot 10^{-19}$ Amp · sec, $e/m_0 = (1,759_3 \pm 0,002) \cdot 10^{11}$ Amp · sec/kg und $h/e = (4,1312 \pm 0,0026) \cdot 10^{-15}$ Volt · sec bzw. hieraus $h = (6,619 \pm 0,010) \cdot 10^{-34}$ Watt · sec². Der aus den Messungen nach der Öltröpfchenmethode folgende e -Wert stimmt mit dem oben angegebenen, aus F und N_L folgenden innerhalb dessen Fehlergrenze überein. Zwischen einem „spektroskopischen“ und einem aus Untersuchungen an „freien“ Elektronen folgenden e/m_0 -Wert kann nicht unterschieden werden. Im III. Teil wird der Zusammenhang zwischen den Atomkonstanten und den experimentell bestimmten Werten für die Rydberg-Konstante R_∞ bzw. die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante α zahlenmäßig untersucht. Als derzeit zu benutzende Werte ergeben sich aus den für diese beiden Konstanten vorliegenden experimentellen Daten: $R_\infty = 10973730,4 \pm 7,8$ m⁻¹ und $1/\alpha = 136,95 \pm 0,13$. Mit diesem Wert für R_∞ , sowie den oben genannten experimentellen Zahlenwerten für e und e/m_0 ergibt sich aus der Rydberg-Formel: $h/e = (4,1333 \pm 0,0043) \cdot 10^{-15}$ Volt · sec, bzw. aus der Beziehung für die Feinstrukturkonstante: $1/\alpha = 137,03 \pm 0,09$. Es zeigt sich also, daß die oben angegebenen Zahlenwerte für e , e/m_0 und h ein zusammenpassendes und mit der Rydberg-Formel bzw. der Beziehung für die Feinstrukturkonstante sehr

*) Gleichzeitig sind zwei weitere Veröffentlichungen unter den Titeln „Wahrscheinlicher Fehler und Fehlergrenze in Anwendung auf das Problem der Atomkonstanten“ bzw. „Die Umrechnungsfaktoren von internationalen auf absolute elektrische Einheiten“ in den vorausgegangenen Heften dieser Zeitschrift (ZS. f. Phys. 120, 703, 1943 bzw. 121, 34, 1943) erschienen.

gut verträgliches System bilden. Demnach liegt auf Grund der experimentellen Ergebnisse über die Bestimmung der Atomkonstanten keinerlei Veranlassung vor, Abänderungen an den grundlegenden theoretischen Gesetzmäßigkeiten vorzunehmen, wie es häufig versucht wurde.

In letzter Zeit ist eine Reihe von Präzisionsbestimmungen für die Atomkonstanten veröffentlicht worden. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen erfordern eine erneute Diskussion über unsere Kenntnis von den Zahlenwerten der atomaren Konstanten e , e/m_0 , h und der wechselseitigen Beziehungen zwischen diesen. In einer vorausgegangenen Mitteilung¹⁾ sind schon die wesentlichen Gesichtspunkte zusammengestellt und eingehend besprochen worden, nach denen die quantitative Behandlung des Atomkonstantenproblems erfolgen sollte. Bei der vorliegenden Durchführung dieser Diskussion kann daher einfach auf diese Veröffentlichung verwiesen werden.

Soweit numerische Rechnungen erforderlich waren, wurden diese mit einer Rechenmaschine, bzw. bei Auftreten von nicht ganzzahligen Exponenten, Winkelfunktionen usw. mit einer siebenstelligen Logarithmentafel²⁾ durchgeführt. Die Endresultate wurden der jeweiligen Fehlergrenze entsprechend abgerundet.

In einem I. Teil werden die für die atomaren Konstanten erforderlichen Umrechnungsfaktoren (p , q , k_A , k_λ) und sonstigen Konstanten (c_0 , μ_0 , ϵ_0 , N_L , F) — hier als „Hilfsgrößen“ bezeichnet — behandelt. Der II. Teil führt zu einer Festlegung der Zahlenwerte für die drei Atomkonstanten (e , e/m_0 , h). Im III. Teil werden die Beziehungen zwischen den atomaren Konstanten diskutiert und Zahlenwerte für einige weitere Größen (R_∞ , α) angegeben.

I. Hilfsgrößen.

1. Die Umrechnungsfaktoren von absoluten (mechanischen) auf internationale elektrische Einheiten.

Diese Umrechnungsfaktoren sind schon an anderer Stelle³⁾ eingehend behandelt worden. Die dort gewonnenen Ergebnisse können hier

¹⁾ U. Stille, ZS. f. Phys. **120**, 703, 1943. — *Anmerkung bei der Korrektur:* Erst während der Drucklegung dieser Veröffentlichung wurde ein neuer Artikel von Birge „The General Physical Constants“, der in dem 1942 erschienenen Bd. VIII (1941) der Reports on Progress in Physics der Physical Society of London auf S. 90—134 enthalten ist, bekannt und zugänglich. Zu den in dieser Arbeit im einzelnen gemachten Ausführungen und zahlenmäßigen Angaben kann im Rahmen einer Korrekturanmerkung nicht mehr Stellung genommen werden. — ²⁾ Vega-Bremiker, Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, 96. Aufl. Berlin, Weidmannsche Verlagsbuchhandlung, 1941. — ³⁾ U. Stille, ZS. f. Phys. **121**, 34, 1943.

ohne weitere Diskussion übernommen werden. Als Zahlenwerte ergaben sich:

$$p = 1,00049 \pm 0,00002, \quad (\text{I, 1a})$$

$$q = 0,9999_0 \pm 0,0001_2, \quad (\text{I, 1b})$$

$$pq = 1,0003_9 \pm 0,0001_4, \quad (\text{I, 1c})$$

$$pq^2 = 1,0002_9 \pm 0,0002_6. \quad (\text{I, 1d})$$

2. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c_0 .

Die für die Vakuumlichtgeschwindigkeit im Laufe der Zeit bestimmten Zahlenwerte sind von verschiedenen Autoren zusammengestellt und diskutiert worden¹⁾. Als Mittelwert aus den neueren optischen Messungen — im wesentlichen nach den Ergebnissen von Mittelstaedt²⁾ und Michelson, Pease und Pearson³⁾ — wird in der Literatur⁴⁾ $2,99776 \cdot 10^8$ m/sec für c_0 angegeben.

Inzwischen hat Anderson⁵⁾ seine mit einer verbesserten Versuchsanordnung gewonnenen Ergebnisse veröffentlicht. Als endgültigen Wert seiner Messungen teilt er mit

$$c_0 = (2,99776 \pm 0,00014) \cdot 10^8 \text{ m/sec.} \quad (\text{I, 2})$$

Dieser Zahlenwert ist aber, wie Anderson selbst betont, nicht ohne weiteres mit den Ergebnissen anderer Autoren zu vergleichen. In den einzelnen Versuchsanordnungen durchlaufen die Lichtstrahlen verschiedene brechende Medien wie Luft, Glas, Nitrobenzol usw. Bei der Umrechnung von den geometrischen auf die optischen Lichtwege, d. h. bei der Berechnung des Vakuumwertes c_0 für die Lichtgeschwindigkeit aus den gemessenen Daten, wird im allgemeinen die Phasengeschwindigkeit zugrunde gelegt, während die Gruppengeschwindigkeit gemessen wurde. Dieses Verfahren ist jedoch streng nur für nicht dispergierende Medien erlaubt. Anderson hat die

¹⁾ Siehe z. B.: R. Ladenburg, Handb. d. Experimentalphys., Bd. XVIII, S. 1 ff., Leipzig, Akadem. Verlagsges., 1928; M. E. J. Gheury de Bray, Nature **120**, 602, 1927; O. Mittelstaedt, Phys. ZS. **30**, 165, 1929; R. T. Birge, Nature **134**, 771, 1934; S. v. Friesen, Proc. Roy. Soc. London (A) **160**, 424, 1937.

— ²⁾ A. Karolus u. O. Mittelstaedt, Phys. ZS. **29**, 698, 1928; O. Mittelstaedt, Dissertation. Leipzig, Bibliographisches Institut, A.-G., 1928; Ann. d. Phys. (V) **2**, 285, 1929. — ³⁾ A. A. Michelson, F. G. Pease u. F. Pearson, Astrophys. Journ. **82**, 26, 1935. — ⁴⁾ Siehe z. B.: R. T. Birge, Nature **134**, 771, 1934; Phys. Rev. **54**, 972, 1938; H. T. Wensel, Bur. of Stand. Journ. of Res. **22**, 375, 1939; F. G. Dunnington, Rev. Mod. Phys. **11**, 65, 1939. — ⁵⁾ W. C. Anderson, Journ. Opt. Soc. Amer. **31**, 187, 1941.

Frage nach Anbringung einer weiteren Korrektur, die wegen der vorhandenen Dispersion der durchstrahlten Medien bei der Umrechnung von der gemessenen Gruppengeschwindigkeit auf die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 erforderlich wäre, erneut geprüft. Er kommt zu dem Ergebnis, daß bei der erreichten Meßgenauigkeit diese Korrektur unbedingt vorgenommen werden müsse. Der von ihm angegebene Zahlenwert ist also bereits bezüglich des Einflusses der Gruppengeschwindigkeit korrigiert.

Um den neuesten Wert für c_0 von Anderson mit den Ergebnissen anderer Autoren vergleichen zu können, muß also an diesen erst, soweit erforderlich, die entsprechende Korrektur angebracht werden. Anderson gibt an, daß diese bei seinen früheren¹⁾ mit ähnlicher Versuchsanordnung gewonnenen Ergebnissen 7 km/sec beträgt, so daß sich der früher angegebene Zahlenwert auf $2,99771 \cdot 10^8$ m/sec erhöht. Weiter hat Anderson an Hand der Mittelstaedtschen Versuchsdaten ausgerechnet, daß die Korrektur bezüglich der Gruppengeschwindigkeit bei einer der fünf von Mittelstaedt mitgeteilten Meßreihen etwa 6 km/sec²⁾ beträgt. Eine analoge Durchrechnung dieser Korrekturen für die übrigen Mittelstaedtschen Meßreihen ergibt, daß unter Benutzung der von Mittelstaedt angewandten Mittelung das Endresultat von Mittelstaedt um 6,4 km/sec zu erhöhen ist.

Während Mittelstaedt und Anderson die Fizeausche Methode mit Kerr-Zelle als Lichtunterbrecher zur Messung der Lichtgeschwindigkeit benutzten, haben Michelson, Pease und Pearson in Weiterentwicklung der Michelsonschen Apparatur sich der Foucaultschen Methode bedient und mit rotierendem Spiegel und einem langen Lichtweg durch ein evakuiertes Rohr gearbeitet. Anderson macht keine zahlenmäßigen Angaben über eine bezüglich der Gruppengeschwindigkeit hier etwa erforderliche Korrektur. Es läßt sich an Hand der Originalarbeit sofort überschlagen, daß eine solche bei der Anordnung von Michelson, Pease und Pearson vernachlässigbar klein ist. Für die Messungen, die für einen Lichtweg von etwa der zehnfachen Rohrlänge durchgeführt wurden, würden sich unter Benutzung der von Anderson angegebenen Daten für die Brechzahlen folgende Korrekturwerte ergeben: Für die zweimalige Durchsetzung der Glasplatte $\approx 4 \cdot 10^{-2}$ km/sec, für den Luftweg außerhalb des Rohres $\approx 5 \cdot 10^{-4}$ km/sec und für den Lichtweg innerhalb des nicht vollkommen luftfreien Rohres

¹⁾ W. C. Anderson, Rev. Scient. Instr. 8, 329, 1937. — ²⁾ Eine Nachrechnung dieses Korrekturwertes unter Benutzung der von Mittelstaedt mitgeteilten Brechzahlen und Weglängen und der von Anderson angegebenen Dispersionen führt für diese Meßreihe zu einer Korrektur von + 7,3 km/sec!

— bei den Messungen schwankte der Druck zwischen 0,5 und 5,5 Torr — bei einem Restdruck von 2,5 Torr $\approx 1 \cdot 10^{-2}$ km/sec.

Außer den Arbeiten von Mittelstaedt und Anderson liegt noch eine Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit nach der Fizeauschen Methode mit Kerr-Zellenanordnung von Hüttel¹⁾ vor. Während Mittelstaedt mit konstantem Lichtweg zwischen zwei mit bezüglich ihrer Feldrichtungen senkrecht zueinander angeordneten Kerr-Zellen und visueller Beobachtung nach einer Kompensationsmethode arbeitete, modulierten Anderson und Hüttel ein Lichtstrahlenbündel mit einer Kerr-Zelle, an der eine konstante Hochfrequenz lag, und variierten den Lichtweg. Im Prinzip teilte Anderson über einen halbdurchlässigen Spiegel das modulierte Licht in zwei Lichtstrahlenbündel auf, die dann nach Durchlaufen verschiedener und meßbar veränderlicher Wege auf der Photokathode eines Elektronenvervielfachers in einem Punkt wieder vereinigt wurden. Die resultierende Photospannung wurde über Verstärker-, Gleichrichter- und Ausgleichsvorrichtungen registriert, wobei mit diesem Registrierverfahren die Variation und Messung der Wegdifferenzen automatisch gekoppelt war. Hüttel ließ den modulierten Lichtstrahl nacheinander zwei verschieden lange Wege durchlaufen und bestimmte die jeweilige Lichtintensität über eine Photozelle mit Verstärker- und Gleichrichteranordnung mit einem Amperemeter. Als endgültiges Ergebnis gibt Hüttel aus seinen Messungen für die Lichtgeschwindigkeit $c_0 = (2,99768 \pm 0,00010) \cdot 10^8$ m/sec an. Es ist wohl anzunehmen, daß dieser Wert auf den luftleeren Raum reduziert ist — allerdings schreibt Hüttel in seiner Veröffentlichung nichts hierüber. Der von Hüttel mitgeteilte Zahlenwert ist nun noch bezüglich des Einflusses der Gruppengeschwindigkeit zu korrigieren; nach den Angaben über die benutzte Versuchsanordnung ergibt sich entsprechend dem hier nur in Frage kommenden Luftweg eine Erhöhung um 3 km/sec.

Zur Festlegung eines Wertes für c_0 sollen hier nur jeweils die neuesten mit den verschiedenen optischen Untersuchungsmethoden gemessenen Werte herangezogen werden. In der Tabelle 1 sind die von den Autoren angegebenen, sowie die nach Anderson korrigierten Zahlenwerte zusammengestellt worden. Bei den Fehlerangaben ist zu beachten, daß Mittelstaedt eine Fehlergrenze, und Michelson, Pease und Pearson, Anderson sowie Hüttel die mittlere Abweichung von dem durch Mittelung gewonnenen Endresultat angeben.

¹⁾ A. Hüttel, Ann. d. Phys. (V) 37, 365, 1940. Den Hinweis auf diese Arbeit verdanke ich Herrn Prof. Dr. Kirchner.

Tabelle 1. Gemessene Werte für die Lichtgeschwindigkeit c_0 .

Autor	Jahr	$c_0 \cdot 10^{-8}$ [m/sec]	c_0 korrr. $\cdot 10^{-8}$ [m/sec]	$\Delta c_0 \cdot 10^{-8}$ [m/sec]	Gewicht
Mittelstaedt	1928	2,99778	2,99784	$\pm 0,00020$	3
Michelson, Pease und Pearson.....	1932	2,99774	2,99774	$\pm 0,00011$	3
Anderson	1940	—	2,99776	$\pm 0,00014$	3
Hüttel.....	1940	2,99768	2,99771	$\pm 0,00010$	3
				($\pm 0,00030$)	

Die amerikanischen Autoren haben die entsprechenden Fehlergrenzen selbst nicht abgeschätzt. Jedoch kann man nach den von ihnen in ihren Fehlerdiskussionen mitgeteilten Einzelheiten und dem über Fehlerabschätzung an anderer Stelle¹⁾ allgemein Gesagten für diese beiden Arbeiten etwa die gleiche Fehlergrenze ansetzen, wie sie von Mittelstaedt für seine Untersuchungen gefunden wurde. Der von Hüttel angegebene Fehler ist offensichtlich nur als statistischer mittlerer Fehler zu verstehen. Nach Hüttels eigenen Angaben beträgt die relative Fehlergrenze bei seinen Messungen im Mittel etwa 0,10/100; die entsprechende absolute Fehlergrenze von $\pm 0,00030 \cdot 10^8$ m/sec ist in der Tabelle 1 in Klammern beigefügt worden.

Ordnet man diesen vier in der Tabelle 1 aufgeführten Meßergebnissen Gewichte umgekehrt proportional ihren Fehlergrenzen zu (letzte Spalte der Tabelle 1), so ergibt sich als derzeitiger Mittelwert für die Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$c_0 = (2,99777 \pm 0,00020) \cdot 10^8 \text{ m/sec.} \quad (\text{I, 3})$$

Dieser Wert zeigt auch eine vorzügliche Übereinstimmung mit den durch elektrische Messungen indirekt bestimmten Zahlenwerten für c_0 . Die genauesten und mit besonderer Sorgfalt durchgeführten Untersuchungen dieser Art sind die Arbeiten von Rosa und Dorsey²⁾ und von Mercier³⁾. Rosa und Dorsey bestimmten die Kapazität von Kondensatoren einmal durch Ausmessung eines Kondensators in absoluten elektrostatischen Einheiten (cm), und zum anderen durch Auf- und Entladungsmessungen an demselben Kondensator in internationalen elektrischen Einheiten (Farad).

¹⁾ U. Stille, ZS. f. Phys. 120, 703, 1943. — ²⁾ E. B. Rosa u. N. E. Dorsey, Bull. Bur. of Stand. 3, 433, 1907. — ³⁾ J. Mercier, Journ. de phys. et le Radium (VI) 5, 168, 1924.

Der Quotient beider Werte liefert c_0^2 in cm/Farad¹⁾. Das Endresultat von Rosa und Dorsey ist also zu schreiben als

$$c_0 = (2,9971 \pm 0,0003) \cdot 10^{4,5} \text{ (m/Farad)}^{1/2}. \quad (\text{I, 4a})$$

Die Umrechnung dieses Zahlenwertes auf die mechanische Einheit m/sec erfolgt über die Beziehung

$$1 \text{ m/Farad} = 10^7 \cdot p \text{ m}^2/\text{sec}^2 \text{ } ^2). \quad (\text{I, 5})$$

Man erhält so unter Benutzung des in Abschnitt I, 1 angegebenen p -Wertes (I, 1a)³⁾

$$c_0 = (2,9978_3 \pm 0,0003_3) \cdot 10^8 \text{ m/sec.} \quad (\text{I, 4b})$$

Mercier hat stehende elektrische Wellen untersucht. Aus der gemessenen Ausbreitungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen entlang leitender Drähte wurde von ihm durch theoretisch⁴⁾ bestimmte Korrekturen die Ausbreitungsgeschwindigkeit im freien Raum berechnet. Als Ergebnis gab Mercier $(2,99700 \pm 0,00030) \cdot 10^8 \text{ m/sec}$ an. Dorsey⁵⁾ wies später darauf hin, daß der von Mercier veröffentlichte Wert die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen in Luft sei. Zum Vergleich mit anderen Bestimmungen von c_0 reduzierte er Merciers Zahlenwert auf das Vakuum. Hierdurch ergab sich als endgültiger Wert aus Merciers Untersuchungen

$$c_0 = (2,99782 \pm 0,00030) \cdot 10^8 \text{ m/sec } ^6). \quad (\text{I, 4'})$$

¹⁾ Siehe z. B.: F. Henning u. W. Jäger, Handb. d. Phys. Bd. II, S. 507 ff., Berlin, Springer, 1926. Unter den in der vorliegenden Veröffentlichung benutzten Einheitenabkürzungen Volt, Amp, Ohm, Farad usw. sind stets die *internationalen* elektrischen Einheiten zu verstehen. Falls gelegentlich die Einführung der absoluten elektrischen Einheiten erforderlich ist, wird dieses ausdrücklich betont und entsprechend gekennzeichnet. — ²⁾ Auf diese und weitere Beziehungen zwischen den verschiedenen Einheiten wird an anderer Stelle im Zusammenhang mit Umrechnungstabellen für die einzelnen elektrischen Maßsysteme eingegangen werden. — ³⁾ Hierbei ist zunächst vorausgesetzt, daß die Daten der seinerzeit bei den Messungen benutzten Widerstände und Batterien hinreichend genau in internationalen elektrischen Einheiten bekannt waren. Eventuellen Ungenauigkeiten dieser Zahlenwerte bzw. der Normale, an die dieselben angeschlossen sind, wird aber durch die angegebenen Fehlergrenzen Rechnung getragen. — ⁴⁾ J. Mercier, Ann. de Phys. (IX) 19, 248, 1923; 20, 5, 1923. — ⁵⁾ N. E. Dorsey, Congrès International d'Électricité (Paris 1932) 3, 202, 1932. — ⁶⁾ Falls man die beiden von Rosa und Dorsey bzw. Mercier mit elektrischen Methoden bestimmten c_0 -Werte bei der Mittelwertbildung für den Zahlenwert der Vakuumlichtgeschwindigkeit mit einbeziehen will, wäre diesen beiden Meßergebnissen entsprechend ihren Fehlergrenzen das Gewicht 2 zuzuordnen (siehe Tabelle 1, letzte Spalte!); als Mittelwert aus diesen beiden elektrisch gewonnenen und den vier in der Tabelle 1 aufgeführten optisch bestimmten c_0 -Werten ergibt sich dann: $c_0 = (2,99778 \pm 0,00020) \cdot 10^8 \text{ m/sec}$.

Die Unzulänglichkeit von Hypothesen¹⁾, nach denen die Lichtgeschwindigkeit c_0 eine zeitliche Abnahme bzw. eine zeitlich lang- oder kurzperiodische Änderung nach einer Sinusfunktion zeigen soll, ist schon verschiedentlich²⁾ betont worden. Unter Berücksichtigung der den einzelnen Messungen anhaftenden Ungenauigkeiten ergibt sich jedenfalls keine experimentell gesicherte Unterlage für die Annahme einer zeitlichen Variation der Lichtgeschwindigkeit. Auf diesen Tatbestand weist auch Anderson auf Grund seiner langjährigen Messungen noch einmal in seiner letzten Veröffentlichung ausdrücklich hin.

3. Die Induktionskonstante μ_0 und die Influenzkonstante ε_0 .

Die Induktionskonstante oder absolute Permeabilität des Vakuums μ_0 hängt als Proportionalitätsfaktor zwischen Induktion und magnetischer Feldstärke im Vakuum in einfacher Weise mit dem Umrechnungsfaktor p zusammen; ihr Zahlenwert ergibt sich aus der Beziehung

$$\mu_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{p} \text{ s).} \quad (\text{I, 6})$$

Unter Benutzung des p -Wertes (I, 1a) erhält man also

$$\mu_0 = (1,25602 \pm 0,00002) \cdot 10^{-6} \text{ Volt} \cdot \text{sec/Amp} \cdot \text{m.} \quad (\text{I, 7})$$

Die Influenzkonstante oder absolute Dielektrizitätskonstante des Vakuums ε_0 ergibt sich als Proportionalitätsfaktor zwischen der dielektrischen Verschiebungsdichte und der elektrischen Feldstärke im Vakuum aus der Beziehung

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 \cdot c_0^2} = \frac{p \cdot 10^7}{4\pi \cdot c_0^2} \text{ s).} \quad (\text{I, 8})$$

¹⁾ Siehe z. B.: M. E. J. Gheury de Bray, *Nature* **127**, 522, 1931; **133**, 464, 948, 1934; **144**, 285, 1939; F. K. Edmondson, ebenda **133**, 759, 1934. —

²⁾ Siehe z. B.: O. C. Wilson, *Nature* **130**, 25, 1932; R. J. Kennedy, ebenda **130**, 277, 1932; R. T. Birge, ebenda **134**, 771, 1934; S. v. Friesen, *Proc. Roy. Soc. London (A)* **160**, 424, 1937; W. C. Anderson, *Rev. Scient. Instr.* **8**, 239, 1937; Kitchener, *Nature* **144**, 945, 1939. — ³⁾ Siehe Fußnote 2 auf S. 139. Die Beziehungen (I, 6) und (I, 8) sind als *Zahlenwertgleichungen* zu verstehen!

Man erhält somit aus p (I, 1a) bzw. μ_0 (I, 7) und c_0 (I, 3)

$$\varepsilon_0 = (8,8594 \pm 0,0014) \cdot 10^{-12} \text{ Amp} \cdot \text{sec/Volt} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (\text{I, 9})$$

4. Die spezifische Molekühlzahl (Loschmidtsche Zahl) N_L .

In der Literatur werden Namen wie Loschmidtsche Zahl, Loschmidtsche Konstante und Avogadrosche Zahl für Größen benutzt, denen allen derselbe Zahlenwert zugeordnet wird, die sich aber in ihrer begrifflichen Definition und den ihnen entsprechend zuzuschreibenden Dimensionen unterscheiden. Einem Vorschlag von Pohl²⁾ folgend, der die Beziehungen zwischen diesen verschiedenen Bezeichnungen und Größen klargestellt hat, soll hier der allgemeine Begriff der spezifischen Molekühlzahl N_L zugrunde gelegt werden. Diese ist definiert durch das Verhältnis der Zahl n der Moleküle, die in einem Körper der Masse M enthalten sind, zu seiner Masse M

$$N_L = \frac{n}{M}. \quad (\text{I, 10})$$

N_L hat also die Dimension einer reziproken Masse. Die Beziehung (I, 10) ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß die Masse m eines dieser n Moleküle gleich dem reziproken Wert der spezifischen Molekühlzahl ist:

$$m = \frac{1}{N_L}. \quad (\text{I, 11})$$

Mißt man die Masse M des Körpers in der für jede chemisch einheitliche Substanz individuellen Masseneinheit Kilomol, so hat die spezifische Molekühlzahl N_L für alle Substanzen den gleichen Zahlenwert — von der Größenordnung $6 \cdot 10^{26}$ —

$$N_L = \frac{1}{m} \approx 6 \cdot 10^{26} \text{ Kilomol}^{-1}. \quad (\text{I, 12})$$

Dabei ist der Umrechnungsfaktor von dieser individuellen Masseneinheit Kilomol auf die in der Physik übliche und von der Art der Substanz un-

¹⁾ Mie (Handb. d. Experimentalphys. Bd XI, 1. Teil, S. 443 f., Leipzig, Akad. Verlagsges., 1932) hat schon darauf hingewiesen, daß die im vorigen Abschnitt genannten Kapazitätsmessungen von Rosa und Dorsey (l. c.) zur indirekten Festlegung von c_0 eine direkte ε_0 -Bestimmung darstellen. Der über das Kapazitätsverhältnis gemessene c_0^2 -Wert ist gerade $(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$. Das von Rosa und Dorsey angegebene Endresultat läßt sich dann schreiben als $\varepsilon_0 = 1/4\pi (2,9971 \cdot 10^{10})^2$ und ergibt $\varepsilon_0 = (8,8591 \pm 0,0018) \cdot 10^{-12} \text{ Amp} \cdot \text{sec/Volt} \cdot \text{m}$. Dieser Wert stimmt selbstverständlich wieder mit dem oben angegebenen innerhalb der Fehlergrenze bestens überein. — ²⁾ R. W. Pohl, Phys ZS. **43**, 125, 1942.

abhängige Masseneinheit kg durch das Molekulargewicht (M) bzw. das Atomgewicht (A) der betreffenden Substanz gegeben, entsprechend den Beziehungen

$$1 \text{ Kilomol} = (M) \text{ kg} \quad (\text{I, 13a})$$

bzw.

$$1 \text{ Kilomol} = (A) \text{ kg}^1). \quad (\text{I, 13b})$$

Die Molekular- bzw. Atomgewichte sind als dimensionslose Zahlen aufzufassen, welche angeben, um wieviel mal größer die Masse eines beliebigen Moleküls oder Atoms ist als die Masse eines bestimmten Atoms, auf das die Skala der Atomgewichte bezogen ist. Dieses Atom vom Atomgewicht 1 ist allerdings hypothetischer Natur. Die heute benutzten Atomgewichtsskalen beruhen auf der Festlegung des Zahlenwertes 16 für das Atomgewicht des Sauerstoffs.

Dabei ist noch zu unterscheiden zwischen der „physikalischen“ und der „chemischen“ Atomgewichtsskala. Die physikalische Skala leitet sich von der Festsetzung her, daß das Atomgewicht des Sauerstoffisotops der Massenzahl 16 gleich 16,0000 ist. Bei der chemischen Skala ist dagegen das Atomgewicht des in der Natur vorkommenden Gemisches der Sauerstoffisotopen mit den Massenzahlen 16, 17 und 18 gleich 16,0000 gesetzt. Aus den experimentellen Bestimmungen des Verhältnisses, in dem die einzelnen Sauerstoffisotope in der Natur vorkommen, kann der Umrechnungsfaktor k_A zwischen beiden Skalen angegeben werden²⁾:

$$k_A = \frac{(A)_{\text{Phys. Sk.}}}{(A)_{\text{Chem. Sk.}}} = 1,000\,275 \pm 0,000\,01. \quad (\text{I, 14})$$

Damit erhält man z. B. für das Atomgewicht des Sauerstoffisotopen gemisches, welches in der chemischen Skala $\equiv 16,0000$ gesetzt ist, in der physikalischen Skala den Wert 16,0044. Im folgenden soll nur die physikalische Skala benutzt werden.

Die genauesten Bestimmungen der spezifischen Molekülzahl N_L in Kilomol⁻¹ beruhen auf der Absolutbestimmung von Kristallgitterabständen. Die Masse der in einem bestimmten Kristallvolumen (z. B. einer „Elementär-

¹⁾ Für die individuelle Masseneinheit einer atomaren Substanz ist auch die Bezeichnung „Kiloatom“ üblich. — ²⁾ Siehe z. B.: J. Mattauch und S. Flügge, Kernphysikalische Tabellen. Berlin, Springer, 1942, S. 15; Umphrey (Phys. Rev. 59, 320, 1941) folgert aus seinen letzten Messungen $k_A = 1,000\,275 \pm 0,000\,009$.

zelle“) eines Kristalls befindlichen Moleküle kann durch das Produkt aus makroskopischer Dichte ρ (z. B. gemessen in kg/m^3) und Volumen des Kristallbereichs V (gemessen in m^3) ausgedrückt werden. Für den rhomboedrischen Kalkspatkristall, über den die Präzisionsbestimmungen zur Berechnung von N_L durchgeführt sind, ergibt sich so

$$m = 2 \rho \cdot d_{\text{CaCO}_3}^3 \cdot \Phi. \quad (\text{I, 15})$$

Dabei ist m (gemessen in kg) die Masse eines Kalkspatmoleküls, d_{CaCO_3} (gemessen in m) die Gitterkonstante¹⁾ des Kalkspats, und Φ eine geometrische Funktion, die der Abweichung des Rhomboedervolumens vom Würfel Rechnung trägt und nur vom Rhomboederwinkel β abhängt. Mißt man in Beziehung (I, 15) die Massen in Kilomol, so ist für m gemäß Beziehung (I, 11) N_L^{-1} und für ρ gemäß Beziehung (I, 13a) $\rho/(M)$ einzusetzen. Man erhält so für die spezifische Molekülzahl

$$N_L = \frac{(M)}{2 \rho d_{\text{CaCO}_3}^3 \cdot \Phi}. \quad (\text{I, 16})$$

Zur Berechnung von N_L ist also erforderlich: die Kenntnis des Molekulargewichtes (M), der Dichte ρ , des Rhomboederwinkels β (zur Berechnung von Φ) und der Gitterkonstanten d_{CaCO_3} des Kalkspates. Die heute hierfür

¹⁾ Da von den einzelnen Autoren in der Kristallographie und in der Physik oft verschiedene Größen als „Gitterkonstante“ eines Kristalls definiert worden sind, muß jeweils genau angegeben werden, welcher Kristallgitterabstand als Gitterkonstante benutzt wird. Für den Steinsalzkrystall wird in der Kristallographie der Abstand d_{100} zweier Netzebenen mit gleichen Atomanordnungen (z. B. Na^+) Gitterkonstante a genannt, während in der Physik der Abstand zweier benachbarter Netzebenen ohne Rücksicht auf die Atomanordnungen in ihnen als Gitterkonstante d_{NaCl} bezeichnet wird. In diesem Fall ist $d_{\text{NaCl}} = \frac{1}{2} \cdot d_{100} = 2814,00$ Siegbahnsche X.-E. (I, 17a). Das Volumen d_{100}^3 ist die kristallographische „Elementarzelle“ des Steinsalzkrystalls und enthält 4 Moleküle NaCl , entsprechend das Kristallvolumen d_{NaCl}^3 nur $\frac{1}{2}$ Molekül. Im Falle des Kalkspats liegen die Verhältnisse nicht so einfach. Als Gitterkonstante d_{CaCO_3} soll, wie in der Physik allgemein üblich, auch hier der Netzebenenabstand d_{100} im Spaltrhomboeder des Kalkspatkristalls definiert werden; zahlenmäßig haben die neuesten Messungen ergeben: $d_{\text{CaCO}_3} = 3,0356_8 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ (I, 19a, b). Dieses Spaltrhomboeder ist jedoch nicht zur Definition einer Elementarzelle im kristallographischen Sinn geeignet; die CO_3^{--} -Gruppen sind im Kristall nicht alle gleich orientiert, sondern nehmen gegenseitig gespiegelte Lagen im Kristallgitter ein, was sich im Auftreten einer Gleitspiegelebene äußert. Infolgedessen wird als Elementarzelle des Calcits ein anderes Kristallvolumen angesehen (siehe z. B.: R. W. G. Wyckhoff, Amer. Journ. Science 50, 317, 1920). In dieser Elementarzelle befinden sich 2 Moleküle CaCO_3 , während das Spaltrhomboeder $d_{\text{CaCO}_3}^3 \cdot \Phi$ nur $\frac{1}{2}$ Molekül enthält.

verfügbaren Daten sind kürzlich von Bearden¹⁾ zusammengestellt und diskutiert worden. Besonders eingehend ist hierbei die Gitterkonstante des Kalkspats behandelt worden.

Diese ist in der Siegbahnschen Skala — bezogen auf die Gitterkonstante des Steinsalzes

$$d_{\text{NaCl}} \equiv 2814,00 \text{ Siegbahnsche X.-E.} \quad (\text{I, 17a})$$

— gemessen²⁾ worden; für ihren Zahlenwert ergibt sich nach Korrektur der bei der Bragg'schen Reflexion am Kristall auftretenden Brechung

$$d_{\text{CaCO}_3 (180)} = 3029,45 \text{ Siegbahnsche X.-E.} \quad (\text{I, 17b})$$

Um den Zahlenwert dieser Gitterkonstanten in der „absoluten“ Längenskala — z. B. in m — zu erhalten, muß der Umrechnungsfaktor k_λ von der Siegbahnschen auf diese Skala bekannt sein. Dieser Faktor wird unter Benutzung von Strichgittern bestimmt durch „Absolutmessungen“ von Röntgenwellenlängen, deren Zahlenwert gleichfalls in der Siegbahnschen Skala gemessen ist. Aus den vorliegenden Arbeiten folgert Bearden für k_λ als derzeitigen Zahlenwert $(1,00203 \pm 0,00001) \cdot 10^{-13}$ ³⁾. Der von Bearden mit $1 \cdot 10^{-5}$ angegebene relative Fehler ist als wahrscheinlicher Fehler zu verstehen; als entsprechende relative Fehlergrenze ist nach den weiter unten erwähnten Abschätzungen von Haglund $3,3 \cdot 10^{-5}$ anzusetzen. Somit ist für den Umrechnungsfaktor k_λ zu schreiben

$$k_\lambda = \frac{1 \text{ Siegb. X.-E.}}{1 \text{ m}} = (1,00203 \pm 0,00003) \cdot 10^{-13}. \quad (\text{I, 18})$$

¹⁾ J. A. Bearden, Journ. appl. Phys. **12**, 395, 1941. Bezüglich aller Einzelheiten sei auf diese Veröffentlichung oder auf die zusammenfassenden Artikel von Kirchner (Erg. exakt. Naturwiss. **18**, 26, 1939) und Du Mond (Phys. Rev. **56**, 153, 1939) verwiesen. — ²⁾ M. Siegbahn, Phil. Mag. (VI) **37**, 601, 1919; Ann. d. Phys. (IV) **59**, 56, 1919. — ³⁾ Bei der Festlegung dieses Wertes sind die neueren Messungen an dem Al-K α -Dublett von Tyrén (ZS. f. Phys. **109**, 722, 1938) nicht berücksichtigt worden. Sein Ergebnis ($k_\lambda = 1,00202 \cdot 10^{-13}$) ändert jedoch nichts an der von Bearden durchgeführten Mittelung, zumal die schon älteren Messungen von Wennerlöf [Ark. Mat., Astron. och Fys. (A) **22**, Nr. 8, 1930] am Cu-K α -Dublett, die zu einem höheren Wert für k_λ führen, von Bearden auch nicht zur Mittelung herangezogen wurden. Bearden benutzte bei dieser Mittelung zur Bestimmung der jeweiligen k_λ -Werte bei den von Bäcklin (ZS. f. Phys. **93**, 450, 1935) und Söderman (Nature **135**, 67, 1935) angegebenen Absolutwellenlängen des Al-K α -Dubletts den entsprechenden Wert in Siegbahnschen X.-E. nach Larsson (Dissertation, Uppsala, Univ. Arsskr., 1929), jedoch entsprechend den Untersuchungen von Haglund (ZS. f. Phys. **94**, 369, 1935) ohne Korrektur bezüglich anomaler Dispersion.

Zum Einsetzen in die Beziehung (I, 15) schlägt Bearden folgende auf 20°C umgerechnete Werte für den Kalkspat vor:

$$\left. \begin{aligned} (M) &= 100,119 \pm 0,0005^1), \\ d_{\text{CaCO}_3(20^\circ)} &= (3,03566 \pm 0,00003) \cdot 10^{-10} \text{ m}, \\ \varrho_{(20^\circ)} &= (2,71030 \pm 0,00003) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3{}^2), \\ \Phi_{(20^\circ)} &= 1,09594 \pm 0,00001^3). \end{aligned} \right\} \quad (\text{I, 19a})$$

Diese von Bearden in Vorschlag gebrachten Zahlenwerte für die vier zur Berechnung von N_L erforderlichen Größen sollen auch hier mit Ausnahme des letzten zugrunde gelegt werden. Für Φ wird der Mittelwert aus den

¹) Aus den Internationalen Atomgewichtstabellen für 1941 (siehe z. B.: Journ. Chem. Soc. London 1941, Part I, S. 146ff.) würde sich für (M_{CaCO_3}) in der physikalischen Atomgewichtsskala 100,118 ergeben. Diese Differenz von $1 \cdot 10^{-5}$, die für die Berechnung von N_L innerhalb der Fehlergrenzen keine Rolle spielt, rührt von dem von Bearden benutzten Zahlenwert 12,0148 für das mittlere Atomgewicht des \bar{C} her, der auf Grund kernphysikalischer Messungen berechnet ist und auch von Birge (Phys. Rev. **54**, 972, 1938) benutzt wird. Nach den Tabellen von Mattauch und Flügge (l. c.) würde sich für das mittlere Atomgewicht des \bar{C} , berechnet aus der mittleren Massenzahl, 12,0153 ergeben, während die Benutzung der Internationalen Atomgewichtstabellen für 1941 zu dem Zahlenwert 12,0133 in der physikalischen Skala führt. Zur Berechnung von N_L in der physikalischen Atomgewichtsskala soll hier auch der Wert 100,119 verwandt werden. — ²) Dieser Zahlenwert ist von Bearden (Phys. Rev. **38**, 2089, 1931) auf Grund eigener Messungen und der Ergebnisse anderer Autoren bestimmt worden und in Übereinstimmung mit dem von Tyrén (l. c.) für ϱ unter Berücksichtigung verschiedener Messungen angegebenen Wert. Als Ergebnis von Messungen des Bureau of Standards teilt Bearden (Phys. Rev. **54**, 701, 1938) $\varrho_{20^\circ} = 2,71029 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ mit. — ³) Dieser Zahlenwert ist berechnet aus dem von Bearden (Phys. Rev. **38**, 2089, 1931) nach verschiedenen Methoden zu $101^\circ 54' 4''$ am Makrokristall gemessenen Rhomboederwinkel β . Du Mond und Bollman (Phys. Rev. **50**, 524, 1936) haben für β an den Mikrokristallen des von ihnen verwandten gepulverten Kalkspats (Teilchengröße etwa 10^{-4} cm und kleiner) den Wert $101^\circ 54' 18''$ bestimmt, der für Φ den Zahlenwert 1,09602 ergibt. Tyrén (l. c.) benutzt für Φ aus diesen verschiedenen Messungen den Wert 1,0960 — offensichtlich den auf 5 Ziffern abgerundeten Mittelwert aus den Ergebnissen von Bearden und Du Mond und Bollman. Während letztere den wahrscheinlichen Fehler für den von ihnen gemessenen Rhomboederwinkel β angeben, teilt Bearden nur den mit den Methoden der kleinsten Quadrate ermittelten wahrscheinlichen Fehler für die aus dem gemessenen Rhomboederwinkel β berechnete geometrische Funktion Φ mit. Danach scheinen die Messungen von Bearden genauer zu sein. Mit Rücksicht auf die unbestimmten Fehlerangaben und die Benutzung von Kalkspat verschiedener Herkunft soll hier einfach der ungewichtete arithmetische Mittelwert aus den Ergebnissen von Bearden und Du Mond und Bollman für Φ benutzt werden.

Messungen von Bearden am Makrokristall bzw. von Du Mond und Bollman am mikrokristallinen Kalkspatpulver benutzt ¹⁾).

Sämtliche Fehlerangaben sind von Bearden als wahrscheinliche Fehler gemacht worden. Mit Rücksicht auf das in einer früheren Veröffentlichung ²⁾ über Fehlerabschätzung allgemein Gesagte sollen hier Fehlergrenzen angegeben werden. Für die Festlegung dieser Fehlergrenzen kann hierbei die Fehlerdiskussion von Haglund ³⁾ zugrunde gelegt werden. Haglund gelangt zu folgenden relativen Unsicherheiten: Im Molekulargewicht: $\frac{\Delta(M)}{(M)} = 5 \cdot 10^{-5}$, in der Gitterkonstanten: $\frac{\Delta d}{d} = 3,3 \cdot 10^{-5}$ ⁴⁾, in der Dichte: $\frac{\Delta \rho}{\rho} = 15 \cdot 10^{-5}$, und in dem geometrischen Kristallfaktor: $\frac{\Delta \Phi}{\Phi} = 50 \cdot 10^{-5}$ ⁵⁾.

Gegen die hier besprochene Bestimmung der spezifischen Moleküllzahl N_L sind im wesentlichen zwei Bedenken geäußert worden. Einmal wird wegen des hohen Absorptionsvermögens der Kristalle für Röntgenstrahlen (Halbwertseindringtiefe $\approx 10^{-5}$ bis 10^{-4} cm) nur die Gitterkonstante in den äußersten Atomschichten gemessen, die mit der des Kristallinnern nicht übereinzustimmen brauche. Zum anderen könnten eine mehr oder minder ausgeprägte Überstruktur, statistisch verteilte Löcher oder sonstige Unvollkommenheiten (Mosaikstruktur) im Kristallgitter zwar die röntgenographisch bestimmte Gitterkonstante nicht beeinflussen, würden jedoch zur Messung einer makroskopischen Dichte führen, die von der dem „Idealkristall“ entsprechenden abweicht.

Auf diese beiden Einwände ist schon Kirchner ⁶⁾ in seinem Artikel über die Atomkonstanten im einzelnen eingegangen. Die Untersuchungen von Allison und Armstrong ⁷⁾, welche die Reflexion von Röntgenstrahlen an Kalkspat bis zur fünften Ordnung — d. h. bei wesentlich größeren Eindringtiefen — messend verfolgt haben, sowie die Arbeiten von Du Mond

¹⁾ Siehe Fußnote 2 auf S. 145. — ²⁾ U. Stille, ZS. f. Phys. **120**, 703, 1943. — ³⁾ Ph. Haglund, ebenda **94**, 369, 1935. — ⁴⁾ Dieselbe relative Unsicherheit ist auch für den Umrechnungsfaktor k_2 anzusetzen (siehe weiter oben!). Die entsprechende Fehlergrenze beträgt dann das Doppelte des von Bearden (Phys. Rev. **47**, 883, 1935; **48**, 385, 1935) 1935 für d_{CaCO_3} angegebenen wahrscheinlichen Fehlers. — ⁵⁾ Diesem Zahlenwert für $\Delta \Phi / \Phi$ entspricht eine Unsicherheit im Rhomboederwinkel β von $\pm 1,5'$, also etwa dem doppelten Wert des von Du Mond und Bollman (l. c.) angegebenen wahrscheinlichen Fehlers. — ⁶⁾ F. Kirchner, Erg. exakt. Naturwiss. **18**, 36ff., 1939. — ⁷⁾ S. K. Allison u. A. H. Armstrong, Phys. Rev. **26**, 701, 1925; S. K. Allison, ebenda **44**, 63, 1933.

und Bollman¹⁾, welche makroskopisch die Dichte und röntgenographisch die Gitterkonstante von gepulvertem Kalkspat (Teilchengrößen: 10^{-4} cm und kleiner) maßen und die Braggsche Reflexion im Kristallinnern untersuchten, lassen das erste Bedenken gegen diese N_L -Bestimmung innerhalb der Meßfehler als gegenstandslos erscheinen.

Gleichzeitig sprach ein Teil dieser Ergebnisse, zusammen mit den Untersuchungen von Jay²⁾, der an Silber, Quarz und Wismuth die thermische Gitterdehnung und makroskopische Ausdehnung gemessen hat, auch gegen eine merkliche Bedeutung des zweiten Einwandes. Die Messungen von Tu³⁾ an Kalkspat, Steinsalz, Kaliumchlorid und Diamant haben durch eine Arbeit von Bearden⁴⁾ in diesem Zusammenhang an Beweiskraft verloren. Miller und Du Mond⁵⁾ haben inzwischen dieses Problem nochmals experimentell angegriffen; sie maßen makroskopisch die Dichte und röntgenographisch die Gitterkonstante von gepulvertem Quarz — als Beispiel eines „vollkommenen“ Einkristalls — bzw. von Aluminium und Silber — als Vertreter von Metallen mit polykristallinem Aufbau — mit und ohne mechanische Verformung. Miller und Du Mond glauben, aus ihren Ergebnissen auf einen kleinen Einfluß der Mosaik- oder Überstruktur auf die N_L -Bestimmungen schließen zu können, und geben für die aus diesen Effekten resultierende mögliche Unsicherheit einen Wert von $0,40/_{00}$ an⁶⁾. Die Autoren weisen aber auch darauf hin, daß diese Zahlenangabe durch Fehlerrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate gewonnen wurde, welche möglicherweise zu Irrtümern führen könne⁷⁾.

¹⁾ J. W. M. Du Mond u. V. L. Bollman, Phys. Rev. **50**, 524, 1936; **54**, 1005, 1938. — ²⁾ A. H. Jay, ZS. f. Krist. (A) **89**, 282, 1934. — ³⁾ Y. C. Tu, Phys. Rev. **40**, 662, 1932. — ⁴⁾ J. A. Bearden, ebenda **54**, 698, 1938. — ⁵⁾ P. H. Miller, Jr. u. J. W. M. Du Mond, ebenda **57**, 198, 1940. — ⁶⁾ Kirchner (l. c.) folgerte aus den älteren Untersuchungen von Du Mond und Bollman (l. c.), daß man bei Einbeziehung solcher eventueller Abweichungen vom idealen Kristallgitteraufbau in die Fehlerdiskussion ungünstigstenfalls eine relative Unsicherheit von etwa $1 \cdot 10^{-3}$ zur Gesamtfehlergrenze hinzufügen müsse. — ⁷⁾ Eine neuere Veröffentlichung von Gott [Ann. d. Phys. (V) **41**, 520, 1942] behandelt Beobachtungen an Alkalihalogenidschmelzflußkristallen. Die hier bei höheren Temperaturen gefundenen Abweichungen der thermischen Gitterdehnung von der makroskopischen Ausdehnung werden dem Einfluß einer Fehlordnung im Schottkyschen Sinne zugeschrieben. Messungen an Kristallen, die aus der Lösung gewachsen sind bzw. Frenkelsche Fehlordnung zeigen, sind in Aussicht gestellt worden und sollen die physikalischen Verhältnisse weiter klären. Jedenfalls besteht nach den bisher vorliegenden Ergebnissen kein Anlaß, diese auf den natürlich gewachsenen Kalkspat, an dem die Messungen zur N_L -Bestimmung vorgenommen wurden und für den Schottkysche Fehlordnung sehr unwahrscheinlich ist, zu übertragen.

Die spezifische Molekülzahl ist also aus folgenden Daten zu errechnen:

$$\left. \begin{aligned} (M) &= 100,119 \pm 0,005, \\ d_{\text{CaCO}_3(20^\circ)} &= (8,0356_6 \pm 0,0001) \cdot 10^{-10} \text{ m}, \\ \varrho_{(20^\circ)} &= (2,7103_0 \pm 0,0004) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \\ \Phi_{(20^\circ)} &= 1,0959_8 \pm 0,0005. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I, 19b})$$

Somit ergibt sich gemäß Beziehung (I, 16)

$$N_L = (6,0243_1 \pm 0,0048) \cdot 10^{26} \text{ Kilomol}^{-1} \text{ } ^1). \quad (\text{I, 20})$$

Die Fehlergrenze entspricht der Summe der im einzelnen oben angegebenen relativen Ungenauigkeiten:

$$\frac{\Delta(M)}{(M)} + 3 \cdot \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta \varrho}{\varrho} + \frac{\Delta \Phi}{\Phi} = 8 \cdot 10^{-4}.$$

Berücksichtigt man bei der Fehlerangabe die von Miller und Du Mond ²⁾ zu 0,4⁰/₀₀ abgeschätzte Unsicherheit für eventuelle Unvollkommenheiten im Kristallaufbau, so wäre für die spezifische Molekülzahl zu schreiben

$$N_L = (6,0243_1 \pm 0,0072) \cdot 10^{26} \text{ Kilomol}^{-1}. \quad (\text{I, 20'})$$

Entsprechend müßte man bei der Fehlerdiskussion für die Zahlenwerte von Größen, zu deren Festlegung die spezifische Molekülzahl benutzt wird — z. B. bei der Bestimmung der Elementarladung e aus N_L und F —, diese Fehlergrenze von 0,4⁰/₀₀ hinzufügen.

5. Die spezifische Ionenladung (Faradaysche Konstante) F .

Die spezifische Ionenladung F — auch Faradaysche Konstante oder Faradaysche Zahl genannt — gibt das Verhältnis der Ladung Q eines Ions zu seiner Masse m an

$$F = \frac{Q}{m}. \quad (\text{I, 21})$$

Dabei ist die Ladung Q als ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung e aufzufassen:

$$Q = z \cdot e. \quad (\text{I, 22})$$

Mißt man die Masse des Ions in der für jede Ionensorte individuellen elektrochemischen Masseneinheit Kiloäquivalent, so hat die spezifische Ionen-

¹⁾ In einer späteren Veröffentlichung [Nova Acta Upsal. (IV) 12, Nr. 1., 1940] gibt Tyrén auf Grund eigener Messungen denselben Wert für N_L an.
— ²⁾ P. H. Miller, Jr. u. J. W. M. Du Mond, l. c.

ladung F für alle Ionensorten den gleichen Zahlenwert — von der Größenordnung $9,65 \cdot 10^7$ —

$$F = \frac{ze}{m} \approx 9,65 \cdot 10^7 \text{ Amp} \cdot \text{sec/Kiloäquivalent.} \quad (\text{I, 23})$$

Die individuelle elektrochemische Masseneinheit Kiloäquivalent unterscheidet sich von der individuellen chemischen Masseneinheit Kilomol um den Faktor der „Wertigkeit“ z der betreffenden Ionensorte:

$$1 \text{ Kiloäquivalent} = \frac{1}{z} \text{ Kilomol.} \quad (\text{I, 24})$$

Es ergibt sich also für die Umrechnung von Kiloäquivalent auf kg gemäß Beziehung (I, 18) und (I, 24):

$$\text{bei Molekulationen} \dots\dots\dots 1 \text{ Kiloäquivalent} = \frac{(M)}{z} \text{ kg} \quad (\text{I, 24a})$$

$$\text{bzw. bei Atomionen} \dots\dots\dots 1 \text{ Kiloäquivalent} = \frac{(A)}{z} \text{ kg.} \quad (\text{I, 24b})$$

Ein genauer Zahlenwert für die spezifische Ionenladung F ist zunächst durch die Definition des int. Amp. festzulegen, wenn man F in internationalen Einheiten mißt. Da ein Strom von 1 int. Amp. definitionsgemäß in der Sekunde aus einer wässrigen Silbernitratlösung $1,11800 \cdot 10^{-6}$ kg Silber an der Kathode abscheidet, entspricht einem Ladungstransport von 1 Amp · sec ein Massentransport von $1,11800 \cdot 10^{-6}$ kg einwertigen Silberionen. Es ergibt sich also für die spezifische Ionenladung aus Beziehung (I, 21) und (I, 24b)

$$F = \frac{Q}{m} = \frac{1}{1 \cdot 1,11800 \cdot 10^{-6} / (A_{\text{Ag}})} = \frac{(A_{\text{Ag}})}{1,11800} \cdot 10^6 \frac{\text{Amp} \cdot \text{sec}}{\text{Kiloäquivalent}}. \quad (\text{I, 25})$$

Der derzeitige Wert für das Atomgewicht des Silbers beträgt in der chemischen Atomgewichtsskala

$$(A_{\text{Ag}})_{\text{Chem. Sk.}} = 107,880 \pm 0,001^1) \quad (\text{I, 26a})$$

und unter Benutzung des Umrechnungsfaktors $k_A = 1,000275 \pm 0,00001^2)$ in der physikalischen Skala

$$(A_{\text{Ag}})_{\text{Phys. Sk.}} = 107,9097 \pm 0,002. \quad (\text{I, 26b})$$

Hieraus ergibt sich für die spezifische Ionenladung in der physikalischen Atomgewichtsskala der Zahlenwert

$$F = 9,65208 \cdot 10^7 \text{ Amp} \cdot \text{sec/Kiloäquivalent.} \quad (\text{I, 27})$$

¹⁾ Siehe z. B.: Internationale Atomgewichtstabellen für 1941, Journ. Chem. Soc. London 1941, Part I, S. 146. Die angegebene Fehlergrenze verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn Prof. Dr. Hönigschmid. — ²⁾ Siehe Abschnitt II, 4 und Fußnote 2 auf S. 142.

In dieser Berechnung stecken zwei wesentliche Voraussetzungen:

1. Die in der Silbernitratlösung befindlichen Silberionen sind einwertig.

2. Die mit einer bestimmten Ladungsmenge *im Elektrolyt verknüpfte Silberionenmenge* ist zahlenmäßig gleich der nach Durchgang dieser Ladungsmenge an der Kathode *abgeschiedenen und gewogenen Silbermenge*.

Die erste Voraussetzung ist nach unserer heutigen Kenntnis zu mindesten innerhalb der Meßfehlergrenzen sicher erfüllt.

Zu der zweiten Voraussetzung lassen sich eindeutige Angaben nicht ohne weiteres machen. Es kann immer nur die *abgeschiedene Silbermenge* bestimmt werden — auf dieser beruht daher auch die Definition des int. Amp.

Die Untersuchungen von Vinal und Bates¹⁾ mit hintereinandergeschaltetem Silber- und Jodvoltameter ergaben als Verhältnis der vom gleichen Strom abgeschiedenen Silber- und Jodmasse

$$\frac{M_{\text{Ag}}}{M_{\text{J}}} = 0,850\,17. \quad (\text{I}, 28\text{a})$$

Nach der Faradayschen Beziehung (I, 23) sollte dieser Wert mit dem Verhältnis der entsprechenden Atomgewichte übereinstimmen, wenn beide Ionensorten als einwertig angenommen werden dürfen. Dieses Verhältnis beträgt aber nach den Atomgewichtstabellen für 1941

$$\frac{(A_{\text{Ag}})}{(A_{\text{J}})} = \frac{107,880}{126,92} = \frac{107,909_7}{126,95_6} = 0,849\,98. \quad (\text{I}, 28\text{b})$$

Diese beiden Zahlen zeigen, daß entweder im Silbervoltameter mehr oder im Jodvoltameter weniger Substanz abgeschieden wurde, als mit der entsprechenden transportierten Ladung im Elektrolyt verknüpft war, bzw. daß beide Effekte gleichzeitig auftraten. Die relative Differenz der abgeschiedenen gegenüber der die Ladung transportierenden Masse betrug $22 \cdot 10^{-5}$, jedenfalls wesentlich mehr, als durch die Unsicherheiten in der Kenntnis der Atomgewichte oder die Meßungenauigkeit der Voltameter zu erklären wäre²⁾.

Aus den Jodvoltametermessungen würde sich also für das Atomgewicht des Silbers in der physikalischen Atomgewichtsskala entsprechend Beziehung (I, 28a) ergeben

$$(A_{\text{Ag}})' = (A_{\text{J}}) \cdot \frac{M_{\text{Ag}}}{M_{\text{J}}} = 126\,95_5 \cdot 0,850\,17 = 107,93_3. \quad (\text{I}, 28\text{c})$$

¹⁾ G. W. Vinal u. S. J. Bates, Bull. Bur. of Stand. **10**, 425, 1914. —

²⁾ Siehe z. B.: U. Stille, ZS. f. Phys. **121**, 34, 1943.

Somit folgt analog Beziehung (I, 25) bei Einsetzen des Wertes (I, 28c) für das Atomgewicht des Silbers als jodvoltametrischer Wert für die spezifische Ionenladung

$$F = \frac{(A_{Ag})'}{1,11800 \cdot 10^{-6}} = 9,65414 \cdot 10^7 \text{ Amp} \cdot \text{sec/Kiloäquivalent.} \quad (\text{I, 29})$$

Eine Entscheidung über die Richtigkeit des einen oder anderen Wertes läßt sich auf Grund der bisher vorliegenden experimentellen Untersuchungen nicht eindeutig treffen. Messungen von Rosa, Vinal und Mc Daniel¹⁾ ergaben, daß möglicherweise im gewogenen Silberniederschlag bis zu 0,005 % Fremdeinschlüsse bei der normalen Benutzung des Silbervoltameters enthalten waren. Umgekehrt können durch sekundäre Effekte Teile des abgeschiedenen Silbers wieder in Lösung gehen, so daß möglicherweise auch noch Differenzen zwischen den *abgeschiedenen* und den *gewogenen* Silbermengen auftreten. Auf der anderen Seite kann durch Sauerstoffbildung an der Anode oder durch Sekundärreaktionen von Verunreinigungen mit der arsenigen Säure die gemessene Jodmenge gefälscht werden.

Unter diesen Umständen bleiben zwei Möglichkeiten zur Festlegung eines Zahlenwertes für die spezifische Ionenladung offen.

Einmal kann man die Ergebnisse beider Voltameterbestimmungen benutzen. Dann sollte aus diesen beiden Zahlenwerten (I, 27) und (I, 29) das arithmetische Mittel gebildet werden, da beiden Bestimmungen nicht restlos geklärte, systematische Fehler anhaften können. Die Fehlergrenze für diesen Mittelwert \bar{F} wäre dann entsprechend so zu wählen, daß die beiden einzelnen Werte in diese hineinfallen. Somit ist für diesen Mittelwert \bar{F} der spezifischen Ionenladung aus silber- und jodvoltametrischer Bestimmung zu schreiben

$$\bar{F} = (9,6530_8 \pm 0,0011) \cdot 10^7 \text{ Amp} \cdot \text{sec/Kiloäquivalent.} \quad (\text{I, 30})$$

In dieser Art sind im wesentlichen Wensel²⁾ und Kirchner³⁾ vorgegangen.

Oder man stellt sich mit Rücksicht auf die Definition des int. Amp. auf den Standpunkt, daß die silbervoltametrische Bestimmung allein einen Zahlenwert für die spezifische Ionenladung liefern müßte. Dann ist F aus der Beziehung (I, 25) zu berechnen. Dabei gehen in die Fehlergrenze die relativen Unsicherheiten im Atomgewicht des Silbers in der chemischen Atomgewichtsskala ($1 \cdot 10^{-5}$) und im Umrechnungsfaktor k_A auf die physi-

¹⁾ E. B. Rosa, G. W. Vinal u. A. S. Mc Daniel, Bull. Bur. of Stand. **10**, 475, 1914; siehe auch W. Laird u. G. A. Hulett, Trans. Amer. Electrochem. Soc. **22**, 345, 1912. — ²⁾ H. T. Wensel, l. c. — ³⁾ F. Kirchner, l. c.

kalische Atomgewichtsskala ($1 \cdot 10^{-5}$) ein; der Nenner in Beziehung (I, 25) ist definitionsgemäß fehlerfrei. Weiter muß aber der möglichen Unsicherheit in der Gültigkeit der oben besprochenen Voraussetzung 2 Rechnung getragen werden. Da die beiden beim Silbervoltameter eventuell störenden Effekte gegenläufig sind, erscheint es angebracht, als mögliche relative Unsicherheit hier $4 \cdot 10^{-5}$ ¹⁾ anzusetzen, einen Wert, der nach den neueren Bestimmungen ²⁾ der oberen Grenze der durch Fremdeinschlüsse bedingten Fehlermöglichkeit entspricht. Man erhält so für die spezifische Ionenladung den Zahlenwert

$$F = (9,65203 \pm 0,00059) \cdot 10^7 \text{ Amp} \cdot \text{sec/Kiloäquivalent.} \quad (\text{I, } 27')$$

Auf diese Weise ist der Zahlenwert für die spezifische Ionenladung von Vinal und Bovard ²⁾ und von Birge ³⁾ bestimmt worden.

Dagegen erscheint das Verfahren ⁴⁾, aus dem silbervoltametrisch und dem jodvoltametrisch bestimmten Wert durch Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate einen „wahrscheinlichen Mittelwert“ zu bilden, nicht berechtigt; denn hierbei wird auf die bei den beiden Methoden möglicherweise auftretenden systematischen Fehlerquellen nicht in angemessener Weise Rücksicht genommen ⁵⁾.

Es wird im folgenden der Zahlenwert (I, 27') für die spezifische Ionenladung benutzt werden.

II. Die atomaren Konstanten e , e/m_0 , h .

1. Die elektrische Elementarladung e .

Zu einem Zahlenwert für die Elementarladung e gelangt man auf zwei grundsätzlich verschiedenen Wegen: einmal durch die direkte Bestimmung von e mit der Öltröpfchenmethode und zum anderen durch Berechnung von e aus der spezifischen Ionenladung F und der spezifischen Moleküllzahl N_L .

a) *Öltröpfchenmethode.* Die Öltröpfchenmethode ist von Millikan zu einer Präzisionsbestimmung der Elementarladung entwickelt worden. Millikan selbst hat über eine Reihe von Jahren die Versuchsanordnung

¹⁾ Durch diese Fehlerangabe zu Voraussetzung 2 soll auch der sehr geringfügige Massenunterschied ($\approx 0,0051 \text{ ‰}$) zwischen im Elektrolyt transportierter Silberionenmenge und an der Kathode abgeschiedener Silberatommenge berücksichtigt werden. — ²⁾ G. W. Vinal u. W. M. Bovard, Bull. Bur. of Stand. 13, 147, 1916. In dieser Arbeit wurden die Fremdeinschlüsse im Silberniederschlag zu 0,004% gemessen. — ³⁾ R. T. Birge, Rev. Mod. Phys. 1, 1, 1929. — ⁴⁾ F. G. Dunnington, l. c. — ⁵⁾ Siehe hierzu die allgemeinen Überlegungen bei U. Stille, ZS. f. Phys. 120, 703, 1943.

vervollkommenet und ihre Ergebnisse und Fehlerquellen eingehend diskutiert¹⁾. Weitere Messungen der Elementarladung mit der Öltröpfchenmethode sind von Mattauch²⁾, Bäcklin und Flemberg³⁾, Ishida, Fukushima und Suetsugu⁴⁾ sowie Laby und Hopper⁵⁾ mit unterschiedlicher Genauigkeit durchgeführt worden. Die aus den Absolutmessungen von Röntgenwellenlängen — d. h. durch Berechnung aus N_L und F — folgenden Ergebnisse für die Elementarladung ließen eine Überprüfung der Millikanschen Präzisionsmessungen wünschenswert erscheinen und gaben den Anlaß zu den drei letztgenannten Untersuchungen.

Von diesen entsprechen allerdings wohl nur die Arbeiten von Laby und Hopper den Millikanschen an Sorgfalt und Ausführlichkeit. Die von Laby und Hopper benutzte Versuchsanordnung weicht in einigen Punkten von der Millikanschen Apparatur ab. Einmal haben Laby und Hopper mit horizontalem elektrischen Feld gearbeitet. Weiter benutzten sie Ölsorten, die praktisch keine Verdampfung zeigten und gleichmäßige, große Tröpfchen (Radius $a \approx 8 \div 10 \mu$) mit relativ hoher Ladung ($n \approx 50 \div 300$) in ihrer Anordnung lieferten. Auf diese Weise wurden kurze Beobachtungszeiten erzwungen. Dabei sind Tröpfchengröße und -ladung so gewählt, daß die möglichen Unsicherheiten, die bei der zeitlichen Bahnbestimmung des Tröpfchens, durch Brownsche Bewegung und Abweichungen vom Stokesschen Gesetz auftreten können, insgesamt möglichst gering bleiben. Ferner weisen Laby und Hopper darauf hin, daß die systematischen Fehler einer subjektiven Zeitbestimmung mit Chronographen bei den früheren Untersuchungen erheblich ins Gewicht fallen. Laby und Hopper verwandten deshalb zur Bestimmung der Tröpfchengeschwindigkeiten eine photographische Methode — durch 25 Belichtungen pro sec von je $1/1500$ sec Dauer wurden die einzelnen Bahnspuren punktweise festgelegt. Bezüglich aller experimentellen Einzelheiten muß auf die Originalarbeiten verwiesen werden.

Die größte Unsicherheit in den e -Bestimmungen nach der Öltröpfchenmethode liegt in der ungenauen Kenntnis des Zahlenwertes für die innere Reibung der Luft η , welche mit der $3/2$ -ten Potenz in die Rechnung eingeht und ursprünglich von Millikan offensichtlich zu klein angenommen wurde.

¹⁾ Siehe z. B.: R. A. Millikan, Phys. Rev. 2, 109, 1913; Phil. Mag. (VI) 34, 1, 1917; Proc. Nat. Acad. Amer. 3, 231, 1917; Phys. Rev. 35, 1231, 1930; Ann. d. Phys. (V) 32, 34, 1938. — ²⁾ J. Mattauch, ZS. f. Phys. 32, 439, 1926. — ³⁾ E. Bäcklin u. H. Flemberg, Nature 137, 655, 1936. — ⁴⁾ Y. Ishida, J. Fukushima u. T. Suetsugu, Scient. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. Tokyo 32, 57, 1937. — ⁵⁾ T. H. Laby u. V. D. Hopper, Nature 143, 157, 1939; 145, 932, 1940; 150, 648, 1942. Proc. Roy. Soc. London (A) 178, 243, 1941.

Shiba¹⁾ gab 1938 als wahrscheinlichsten Wert $\eta_{230} = (1,8917 \pm 0,0010) \cdot 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{sec}$ an, dem sich auch Kirchner²⁾ anschloß. Laby und Hopper haben erneut das für den Zahlenwert von η vorliegende experimentelle Material zusammengestellt und eingehend diskutiert. Dabei gelangen sie zunächst zu einer zahlenmäßig etwas anderen Beziehung für die Temperaturabhängigkeit von η auf Grund der Sutherlandschen Relation und der für diese bestimmten Konstanten. Nach Anbringen einer entsprechenden Korrektur an den von verschiedenen Autoren für η gemessenen Werten und nach kritischem Abwägen der verschiedenen Ergebnisse geben Laby und Hopper als zuverlässigsten Zahlenwert an

$$\eta_{230} = (1,82006 \pm 0,0025) \cdot 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{sec}. \quad (\text{II}, 1)$$

Der Fehler von etwa $1,40/_{00}$ stimmt mit der von Millikan³⁾ in einer späteren Veröffentlichung für η abgeschätzten Fehlergrenze überein.

Gemessen wird mit der Anordnung von Laby und Hopper die Ladungsmenge eines Tröpfchens

$$n \cdot e_1 = \frac{9 \pi \sqrt{2} \cdot \eta^{3/2} \cdot v_g^{1/2} \cdot v_E}{(e - \sigma)^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot E} \quad 4) \quad (\text{II}, 2)$$

in $\text{m}^2 \cdot \text{kg/Volt} \cdot \text{sec}^2$.

In üblicher Weise wird hieraus e_1 und nach Anbringung der Korrektur für die Abweichungen vom Stokeschen Gesetz entsprechend der hierfür von Millikan aufgestellten Beziehung mit den Methoden der kleinsten Quadrate die elektrische Elementarladung e bestimmt.

Laby und Hopper haben ihr elektrisch in internationalen Einheiten gemessenes Endresultat auf das absolute CGS-System umgerechnet und geben den von ihnen bestimmten e -Wert in elektrostatischen Einheiten an. Die hierbei benutzten Zahlenwerte für die notwendigen Umrechnungsfaktoren sind in der Originalarbeit mitgeteilt worden, so daß ohne weiteres auf das ursprünglich gemessene Endergebnis zurückgerechnet werden kann. Dieses ist dann zu schreiben als

$$e = 1,6024_1 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2 \cdot \text{kg/Volt} \cdot \text{sec}^2. \quad (\text{II}, 3a)$$

¹⁾ K. Shiba, Scient. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. Tokyo **34**, 1308, 1938.

— ²⁾ F. Kirchner, l. c. — ³⁾ R. A. Millikan, Ann. d. Phys. (V) **32**, 34, 1938.

— ⁴⁾ In gewohnter Schreibweise bedeuten: η die innere Reibung der Luft (gemessen in $\text{kg/m} \cdot \text{sec}$), ρ bzw. σ die Dichte der Tröpfchen bzw. der Luft (gemessen in kg/m^3), g die Erdbeschleunigung (gemessen in m/sec^2), E den Betrag der elektrischen Feldstärke im Kondensator (gemessen in Volt/m), v_g bzw. v_E die Fallgeschwindigkeit der Tröpfchen im feldfreien Kondensator bzw. die Geschwindigkeitskomponente in Richtung des elektrischen Feldes (gemessen in m/sec).

Laby und Hopper haben für ihren endgültigen e -Wert den wahrscheinlichen Fehler angegeben und hierbei nicht die durch die ungenaue Kenntnis des η -Wertes bedingte Unsicherheit berücksichtigt. In der Originalarbeit sind die Ungenauigkeiten in den zur Bestimmung der Elementarladung nach Gleichung (II, 2) eingehenden, gemessenen Größen diskutiert, allerdings z. T. als Fehlergrenzen und z. T. als mittlere Fehler angegeben worden. Die Durchsicht dieser Fehlerdiskussion führt zu dem Ergebnis, daß als dem angegebenen wahrscheinlichen Fehler entsprechende Fehlergrenze etwa 1 0 / $_{00}$ des Endresultates — d. h. also $\pm 0,0016 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2 \cdot \text{kg/Volt} \cdot \text{sec}^2$ — anzusetzen ist, wozu noch 2 0 / $_{00}$ wegen der Unsicherheit des η -Wertes zu addieren sind. Das Gesamtergebnis von Laby und Hopper ist also zu schreiben als

$$e = (1,6024_1 \pm 0,0048) \cdot 10^{-19} \text{ m}^2 \cdot \text{kg/Volt} \cdot \text{sec}^2. \quad (\text{II, 3b})$$

Laby und Hopper haben in ihrer Arbeit die Resultate der Messungen von Millikan, Bäcklin und Flemberg, sowie Ishida und Mitarbeitern mit ihren eigenen zusammengestellt. Dabei haben sie die in den jeweiligen Originalarbeiten angegebenen Ergebnisse einheitlich auf den von ihnen benutzten η -Wert und absolute elektrostatische Einheiten umgerechnet. Diese Zahlen sind mit den von Laby und Hopper mitgeteilten Umrechnungsfaktoren auf internationale Einheiten zurückgerechnet und in der Tabelle 2 mit dem entsprechenden Wert nach der Veröffentlichung von Mattauch zusammengestellt worden. Die von Laby und Hopper in ihrer Arbeit angegebenen Fehler sind wieder als wahrscheinliche Fehler zu verstehen und nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet; sie enthalten nicht die Unsicherheit im η -Wert. In der Tabelle 2 sind statt dessen die entsprechenden Fehlergrenzen unter Einschluß des durch die innere Reibung der Luft eingehenden Fehlers angegeben worden.

Tabelle 2. Nach der Öltröpfchenmethode bestimmte e -Werte.

Lfd. Nr.	Autor	Jahr	$e \cdot 10^{19}$ [$\text{m}^2 \cdot \text{kg/Volt} \cdot \text{sec}^2$]	$e \cdot 10^{19}$ [Amp. sec]
1	Millikan	1917	$1,6014_7 \pm 0,0048$	$1,6010_1 \pm 0,0052$
2	Mattauch	1925	$1,597 \pm 0,019$	$1,597 \pm 0,020$
3	Bäcklin-Flemberg ...	1936	$1,5954_3 \pm 0,0096$	$1,5949_7 \pm 0,0100$
4	Ishida u. Mitarbeiter .	1937	$1,6134_2 \pm 0,0064$	$1,6129_5 \pm 0,0068$
5	Laby-Hopper	1940	$1,6024_1 \pm 0,0048$	$1,6019_4 \pm 0,0052$
Mittel aus 1 und 5			$1,6019_4 \pm 0,0048$	$1,6014_8 \pm 0,0052$

Millikan hat für sein Ergebnis die Fehlergrenze selbst angegeben, welche daher übernommen wurde. Mattauch glaubt, keine sichere Fehler-

grenze abschätzen zu können und gibt als mittlere Abweichung etwa $\pm 1\%$ an. Bäcklin und Flemberg geben in ihrer sehr knappen Veröffentlichung etwa $1,70/_{00}$ als mittlere Abweichung vom Mittelwert an — offensichtlich ohne Berücksichtigung der inneren Reibung; es erscheint als entsprechende Fehlergrenze $40/_{00}$ — etwa der 2,5fache Betrag — zuzüglich $20/_{00}$ für $\eta^{3/2}$ angebracht. Ishida und Mitarbeiter geben als wahrscheinlichen Fehler ungefähr $0,60/_{00}$ an; eine eindeutige Fehlerdiskussion wird von ihnen nicht veröffentlicht; es erscheint etwa der vierfache Wert als Fehlergrenze angemessen, die somit als $20/_{00}$ zuzüglich $20/_{00}$ für $\eta^{3/2}$ zu schreiben ist.

Weiter sind in die Tabelle 2 in einer weiteren Spalte die Zahlenwerte für e ; gemessen in $\text{Amp} \cdot \text{sec}$, eingetragen worden. Man erhält diese aus den in $\text{m}^2 \cdot \text{kg}/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2$ angegebenen Werten unter Berücksichtigung der Umrechnungsbeziehung

$$1 \text{ Amp} \cdot \text{sec} = pq^2 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2 \quad 1). \quad (\text{II}, 4)$$

Zur Umrechnung wurde der in Abschnitt I, 1 angegebene pq^2 -Wert (I, 1 d) benutzt und dessen Fehlergrenze beachtet.

Die Untersuchungen von Mattauch sind in erster Linie zur Klärung der erforderlichen Korrekturen für das Stokessche Fallgesetz an Öl- und Quecksilbertröpfchen durchgeführt worden und lieferten nebenbei den in der Tabelle 2 unter Nr. 2 angeführten e -Wert. Bäcklin und Flemberg geben in ihrer Arbeit nur eine kurze Mitteilung vorläufiger Meßresultate. Ishida und Mitarbeiter haben mit verdampfenden Öltröpfchen, die auch eine zeitliche Dichteänderung zeigen sollen, gearbeitet; diese Öltröpfchen waren außerdem kleiner und erforderten längere Beobachtungszeiten, als sie Laby und Hopper benötigten, wodurch sich der besonders hoch liegende e -Wert von Ishida und Mitarbeitern erklären dürfte. Auf diese Verhältnisse weisen auch Laby und Hopper hin.

Daher können nur die Ergebnisse von Millikan und Laby und Hopper zu einer Mittelwertbildung herangezogen werden, falls man eine solche überhaupt vornehmen will. Da beide Untersuchungen etwa gleiche Fehlergrenzen aufweisen, ergibt sich als direkter arithmetischer Mittelwert:

$$e = (1,6019_4 \pm 0,0048) \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{kg}/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2 \quad 2) \quad (\text{II}, 5a)$$

bzw.

$$e = (1,6014_8 \pm 0,0052) \cdot 10^{-10} \text{ Amp} \cdot \text{sec} \quad (\text{II}, 5b)$$

1) Siehe Fußnote 2 auf S. 139. — 2) Der ungewichtete arithmetische Mittelwert aus allen fünf in der Tabelle 2 angegebenen Resultaten hat übrigens denselben Zahlenwert.

b) *Berechnung aus F und N_L .* Bei Kenntnis des Zahlenwertes für die spezifische Ionenladung läßt sich die elektrische Elementarladung auch aus den Absolutmessungen der Röntgenwellenlängen bestimmen — d. h. aus N_L und F berechnen. Aus den Beziehungen (I, 11) und (I, 23) ergibt sich für die Ladung e der „einwertigen“ Elektronen die Relation

$$e = \frac{F}{N_L} \quad (\text{II, 6})$$

Einsetzen der für F und N_L angegebenen Zahlenwerte (I, 27') und (I, 20) liefert

$$e = (1,6021_8 \pm 0,0014) \cdot 10^{-19} \text{ Amp} \cdot \text{sec}^{-1}). \quad (\text{II, 7})$$

Die Fehlergrenze entspricht der Summe der relativen Unsicherheiten

$$\frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta N_L}{N_L} = 8,6 \cdot 10^{-4}.$$

Die Ergebnisse der Absolutmessung von Röntgenwellenlängen gestatten also eine wesentlich genauere Bestimmung der elektrischen Elementarladung als die mit der Öltröpfchenmethode gewonnenen Resultate.

Im ganzen zeigt sich eine vorzügliche Übereinstimmung zwischen den nach diesen beiden Methoden erhaltenen Zahlenwerten für e . Die Differenz der beiden e -Werte beträgt $7 \cdot 10^{-23} \text{ Amp} \cdot \text{sec}$ — also nur die Hälfte der Fehlergrenze des wesentlich genauer bekannten e -Wertes aus F und N_L ²⁾. Eine Unterscheidung zwischen zwei verschiedenen e -Werten, wie sie gelegentlich gefordert wurde³⁾, entbehrt daher jetzt jeder experimentellen Grundlage.

2. Die spezifische Ladung des Elektrons e/m_0 .

Über die Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons — d. h. des Verhältnisses seiner Ladung e zu seiner Ruhmasse m_0 — liegen zahlreiche Untersuchungen vor, die nach den verschiedensten Methoden durchgeführt wurden. Bezüglich der experimentellen Einzelheiten muß auf die Originalarbeiten bzw. die in einer früheren Veröffentlichung³⁾ zitierten

¹⁾ Setzt man in die obige Beziehung (II, 6) den Mittelwert \bar{F} (I, 30) aus der Silber- und Jodvoltametrischen Bestimmung für die spezifische Ionenladung ein, so ergibt sich $e = (1,6023_5 \pm 0,0015) \cdot 10^{-19} \text{ Amp} \cdot \text{sec}$. Mit dem Wert (I, 20') für N_L ist unter Berücksichtigung der wegen eventueller Unvollkommenheiten im Kristallgitteraufbau vergrößerten Fehlergrenze für die Elementarladung zu schreiben: $e = (1,6021_8 \pm 0,0020) \cdot 10^{-19} \text{ Amp} \cdot \text{sec}$ bzw. $(1,6023_5 \pm 0,0021) \cdot 10^{-19} \text{ Amp} \cdot \text{sec}$. — ²⁾ Die e -Bestimmung von Schopper (ZS. f. Phys. **93**, 1, 1935) nach der Geiger-Regenerschen α -Teilchen-Methode kann leider nicht in die Diskussion einbezogen werden, da das Ergebnis der (ZS. f. Phys. **94**, 649, 1935) angekündigten Nachprüfung und Wiederholung der Messungen noch aussteht. — ³⁾ Siehe hierzu: U. Stille, ZS. f. Phys. **120**, 703, 1943.

zusammenfassenden Berichte verwiesen werden. Es sollen hier nur die Ergebnisse der neueren Arbeiten zusammengestellt und besprochen werden.

Im allgemeinen ist es üblich, die verschiedenen Untersuchungsmethoden in zwei Gruppen zusammenzufassen — nämlich in die e/m_0 -Bestimmungen an freien und an gebundenen Elektronen. Eine Reihe von Autoren glaubte, für diese beiden Gruppen unterschiedliche e/m_0 -Werte festlegen zu können. Wenn auch nach dem heutigen Stande keine derartige Unterscheidung zwischen zwei Zahlenwerten für die spezifische Elektronenladung notwendig oder möglich erscheint, sollen trotzdem hier die e/m_0 -Bestimmungen beider Gruppen getrennt nacheinander behandelt werden.

a) *e/m_0 -Bestimmungen an freien Elektronen.* Zunächst sind hier die neueren Ergebnisse zu nennen, die in technischer Weiterentwicklung der ursprünglich von Des Coudres¹⁾ angegebenen und von Wiechert²⁾ zuerst angewandten Methode gewonnen wurden. In diesen Anordnungen durchlaufen Elektronen eine bekannte Potentialdifferenz U . Die hierbei von den Elektronen erreichte Geschwindigkeit v wird direkt aus der Laufzeit für eine bestimmte Wegstrecke s durch Vergleich mit der Schwingungsdauer elektrischer Schwingungen der Frequenz f gemessen. Für die spezifische Ladung ergibt sich dann eine Beziehung der Form

$$e/m = \frac{v^3}{2U} = \frac{2s^3 f^2}{U}, \quad (\text{II}, 8)$$

d. h. man mißt mit dieser Methode e/m in $\text{m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2$. Dieses e/m ist noch eine Funktion der Elektronengeschwindigkeit v und wird in üblicher Weise durch die relativistische Korrektur auf die Geschwindigkeit $v = 0$ reduziert, wodurch sich der entsprechende e/m_0 -Wert ergibt³⁾.

Die Ergebnisse aus den Untersuchungen nach dieser Methode sind allerdings von den Autoren nicht, wie gemessen, in $\text{m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2$, sondern umgerechnet in absoluten elektromagnetischen Einheiten angegeben worden. Die in den Originalarbeiten mitgeteilten Endresultate sind also auf den ursprünglich gemessenen e/m_0 -Wert zurückzurechnen durch Multiplikation mit dem Umrechnungsfaktor $pq \cdot 10^4$. Dabei ist für pq der jeweils vom einzelnen Autor seinerzeit benutzte Wert einzusetzen.

¹⁾ Th. Des Coudres, Verh. d. D. Phys. Ges. 14, 85, 1895. — ²⁾ E. Wiechert, Schriften d. Königsb. Ges. 38, [12]ff., 1897; Wied. Ann. 69, 739, 1899. — ³⁾ Strenggenommen müßte bei dieser Korrektur für c_0 der in Abschnitt I, 2 angegebene Zahlenwert (I, 3) eingesetzt werden. Da der durch Einsetzen etwas verschiedener c_0 -Werte in die Korrekturformel hereinkommende Fehler gegenüber dem Gesamtfehler in e/m_0 vernachlässigbar klein ist, wurde im allgemeinen von einer solchen Umrechnung hier abgesehen.

Die Ergebnisse der Messungen von Perry und Chaffee¹⁾ und der Untersuchungen von Kirchner²⁾ sind dann zu schreiben

$$e/m_0 = (1,7618_1 \pm 0,0040) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2 \quad (\text{Perry-Chaffee}) \quad (\text{II}, 9)$$

und

$$\begin{aligned} e/m_0 &= (1,7593_6 \pm 0,0012) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2 \quad (\text{Kirchner 1931}) \quad (\text{II}, 10) \\ &= (1,7598_6 \pm 0,0015) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2 \quad (\text{Kirchner 1932}). \quad (\text{II}, 11) \end{aligned}$$

Erteilt man den beiden Kirchnerschen Werten Gewichte umgekehrt proportional ihren Fehlergrenzen, so kann man als Mittelwert dieser beiden Meßreihen schreiben

$$e/m_0 = (1,7595_9 \pm 0,0015) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2. \quad (\text{II}, 12)$$

Die hier angegebenen Fehlergrenzen konnten bei den Zahlenwerten für die beiden Meßreihen von Kirchner direkt übernommen werden, da Kirchner eine ausführliche Fehlerdiskussion und die resultierenden Fehlergrenzen für das Endergebnis mitgeteilt hat. Aus der Veröffentlichung von Perry und Chaffee sind allerdings die Fehlergrenzen für die einzelnen gemessenen Größen nicht einwandfrei zu ersehen. Diese Autoren verwandten eine magnetische Elektronenstrahlkonzentrierung. Auf die hierdurch möglicherweise mehr oder minder beeinträchtigte Meßgenauigkeit ist schon von v. Friesen³⁾ hingewiesen worden. Perry und Chaffee geben nur einen wahrscheinlichen relativen Fehler von etwa $5,7 \cdot 10^{-4}$ für ihr Endresultat an. Mangels näherer Unterlagen ist hier der vierfache Wert als entsprechende Fehlergrenze angenommen worden⁴⁾.

Entsprechend der zwischen den mechanischen und internationalen elektrischen Einheiten bestehenden Umrechnungsrelation

$$1 \text{ kg} = (pq^2)^{-1} \text{ Volt} \cdot \text{Amp} \cdot \text{sec}^3/\text{m}^2 \quad (\text{II}, 4)$$

ergibt sich unter Benutzung des in Abschnitt I, 1 angegebenen pq^2 -Wertes und Beachtung seiner Fehlergrenze

$$e/m_0 = (1,7613_0 \pm 0,0045) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec}/\text{kg} \quad (\text{Perry-Chaffee}) \quad (\text{II}, 9a)$$

und

$$\begin{aligned} e/m_0 &= (1,7588_5 \pm 0,0017) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec}/\text{kg} \quad (\text{Kirchner 1931}) \quad (\text{II}, 10a) \\ &= (1,7593_5 \pm 0,0020) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec}/\text{kg} \quad (\text{Kirchner 1932}). \quad (\text{II}, 11a) \end{aligned}$$

¹⁾ Ch. T. Perry u. E. L. Chaffee, *Phys. Rev.* **36**, 904, 1930. — ²⁾ F. Kirchner, *Ann. d. Phys.* (V) **8**, 975, 1931; **12**, 503, 1932. — ³⁾ S. v. Friesen, *Proc. Roy. Soc. London* (A) **160**, 424, 1937. — ⁴⁾ Da in dem von Perry und Chaffee angegebenen wahrscheinlichen Fehler für das Endergebnis offensichtlich schon ein gewisser Sicherheitszuschlag enthalten ist, erscheint der Faktor 4, mit dem sonst die wahrscheinlichen Fehler für jede einzelne gemessene Größe multipliziert werden, hier für den aus diesen nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelten wahrscheinlichen Fehler für das *Endresultat* ausreichend.

Als Mittelwert analog (II, 12) folgt dann für die Kirchnerschen Meßreihen

$$e/m_0 = (1,7590_8 \pm 0,0020) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg.} \quad (\text{II, 12a})$$

Nach einer von Lawrence vorgeschlagenen Methode hat Dunnington¹⁾ e/m_0 -Bestimmungen durchgeführt. In einem elektrischen Feld beschleunigte Elektronen werden durch ein Magnetfeld der Induktion \mathfrak{B} zum Durchlaufen einer durch enge Spalte definierten Kreisbahn gezwungen. Die Geschwindigkeitsmessung erfolgt durch Vergleich der Laufzeit längs eines bestimmten Kreisbogenstückes Θ (in Bogenmaß) mit der Schwingungsdauer elektrischer Schwingungen der Frequenz f . Für diese Anordnung ergibt sich folgende grundsätzliche Beziehung

$$e/m = \frac{\Theta \cdot f}{B}. \quad (\text{II, 13})$$

Experimentell bestimmt werden Θ , f und die magnetische Feldstärke \mathfrak{H} , deren Betrag (in Amp/m) sich aus der Spulenkonstanten C (in m^{-1}) und dem Spulenstrom J (in Amp) nach der allgemeinen Relation ergibt zu

$$H = \frac{B}{\mu_0} = C \cdot J. \quad (\text{II, 14})$$

Folglich liefert diese Methode einen Zahlenwert für die Größe

$$\mu_0 \cdot e/m = \frac{\Theta \cdot f}{C \cdot J} \text{ in sec}^{-1}/\text{m}^{-1} \cdot \text{Amp} = \text{m/Amp} \cdot \text{sec.} \quad (\text{II, 15})$$

Anwendung der relativistischen Korrektur ergibt $\mu_0 \cdot e/m_0$.

Dunnington hat sein Endresultat wieder auf absolute elektromagnetische Einheiten umgerechnet als e/m_0 -Wert angegeben. Es ist also zunächst die Zurückrechnung auf die ursprünglich gemessene Größe $\mu_0 \cdot e/m_0$ in $\text{m/Amp} \cdot \text{sec}$ erforderlich, was am einfachsten auf folgende Weise durchzuführen ist:

Der Zahlenwert der Spulenkonstanten C ist für eine „ideale“ Spule der Länge l (gemessen in m) mit n Windungen gegeben durch den Quotienten n/l , falls J in Amp und H in Amp/m gemessen wird. Mißt man dagegen H in Oersted, J in Einheiten von 10 abs. Amp. und l in cm — d. h. e/m_0 in elektromagnetischen Einheiten —, so ist $4\pi \cdot n/l$ für C einzusetzen. Es ergibt sich also zwischen beiden Maßsystemen zunächst für C ein Umrechnungsfaktor von $4\pi \cdot 10^{-3}$; dieser behält selbstverständlich für jede beliebige Spulenordnung den gleichen Wert. Ferner wäre noch mit dem von Dunnington für q benutzten Zahlenwert von abs. auf int. Amp. zurückzurechnen; diese Umrechnung ist jedoch nicht erforderlich, da

¹⁾ F. G. Dunnington, Phys. Rev. 43, 404, 1933; 52, 475, 1937.

Dunnington auf S. 497 seiner zweiten Veröffentlichung als endgültigen e/m_0 -Wert, bezogen auf int. Amp. angibt

$$1,759602 \cdot 10^7 \cdot [1 - (0,6 + 1,3) \cdot 10^{-5}].$$

Durch Multiplikation dieses Zahlenwertes mit $4\pi \cdot 10^{-3}$ erhält man also die mit der Dunnington'schen Anordnung bestimmte Größe

$$\mu_0 \cdot e/m_0 = (2,21114 \pm 0,0027) \cdot 10^5 \text{ m/Amp} \cdot \text{sec.} \quad (\text{II, 16})$$

Dunnington hat für sein Endergebnis einen wahrscheinlichen Fehler mitgeteilt. Seine sorgfältig durchgeführte Fehlerdiskussion gestattet aber gleichfalls die Angabe der entsprechenden Fehlergrenze, die schon von Kirchner¹⁾ zu 1,20/00 abgeschätzt wurde.

Unter Benutzung der Werte (I, 7) und (I, 1 d) für μ_0 bzw. $p q^2$ erhält man

$$e/m_0 = (1,76043 \pm 0,0021) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2 \quad (\text{II, 17})$$

bzw.

$$e/m_0 = (1,75992 \pm 0,0026) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg.} \quad (\text{II, 17a})$$

Eine weitere Methode, nach der verschiedene e/m_0 -Bestimmungen durchgeführt worden sind, hat Busch²⁾ angegeben. Hierbei werden Elektronenstrahlen, welche eine Potentialdifferenz U durchlaufen haben und eine Lochblende divergent unter einem Öffnungswinkel α durchsetzen, durch ein longitudinales Magnetfeld der Induktion \mathfrak{B} in einem Punkt — z. B. auf einem Leuchtschirm oder einer photographischen Platte — vereinigt, dessen Abstand l vom Diaphragma durch die Beziehung

$$l = \frac{2\pi v \cdot \cos \alpha}{(e/m) \cdot B} \quad (\text{II, 18})$$

definiert ist. Es ergibt sich demnach bei einer solchen Anordnung die grundsätzliche Gleichung

$$e/m = \frac{8\pi^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot U}{l^2 \cdot B^2} \quad (\text{II, 19})$$

Gemessen wird also nach dieser Methode die Größe

$$\mu_0^2 \cdot e/m = \frac{8\pi^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot U}{l^2 \cdot C^2 \cdot J^2} \text{ in Volt/Amp}^2, \quad (\text{II, 20})$$

wobei C wieder die Spulenkonstante der Magnetspule bedeutet. Durch Reduktion mit der relativistischen Korrektur erhält man $\mu_0^2 \cdot e/m_0$.

Die genauesten Messungen nach der Busch'schen Methode hat Goedicke³⁾ durchgeführt. Das Endresultat ist wieder auf elektromagnetische

¹⁾ F. Kirchner, *Ergebn. exakt. Naturwiss.* **18**, 50, 1939. — ²⁾ H. Busch, *Phys. ZS.* **23**, 438, 1922. — ³⁾ E. Goedicke, *Ann. d. Phys. (V)* **36**, 47, 1939.

Einheiten umgerechnet und als e/m_0 -Wert veröffentlicht worden. Leider ist in der Originalarbeit der Zahlenwert für die benutzte Spannung U nur in abs. Volt ohne Angabe des zur Umrechnung benutzten Zahlenwertes für pq mitgeteilt worden, während der zur Berechnung des Endergebnisses in Beziehung (II, 20) einzusetzende Zahlenwert für J in abs. und int. Amp. angeführt worden ist.

Aus den von Goedicke im einzelnen angegebenen Zahlenwerten für die in diese Beziehung eingehenden Größen kann der für $\mu_0^2 \cdot e/m_0$ in Volt/Amp² gemessene Zahlenwert berechnet werden. Dabei ist entsprechend den obigen Ausführungen für C das $(10^3/4\pi)$ -fache des Zahlenwertes der von Goedicke mit K' bezeichneten Konstanten einzusetzen, für l (gemessen in m) der 10^{-2} -fache Betrag des von Goedicke mitgeteilten Zahlenwertes (gemessen in cm!), für J der in int. Amp. von Goedicke angegebene Zahlenwert und für U das pq -fache des von Goedicke veröffentlichten E -Wertes. pq ist hier zu 1,00041 angenommen worden, entsprechend den von Birge ¹⁾ veröffentlichten und seinerzeit meist benutzten Zahlenwerten für p und q . Das Endergebnis von Goedicke ist somit zu schreiben

$$\mu_0^2 \cdot e/m_0 = 0,27658_6 \pm 0,00086 \text{ Volt/Amp}^2. \quad (\text{II, 21})$$

Die Fehlergrenze ist vom Autor selbst zu $1,30/_{00}$ bestimmt worden. Unter Benutzung der Zahlenwerte (I, 7) und (I, 1d) für μ_0 bzw. pq^2 erhält man

$$e/m_0 = (1,7594_0 \pm 0,0024) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2 \quad (\text{II, 22})$$

bzw.

$$e/m_0 = (1,7588_9 \pm 0,0028) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg}. \quad (\text{II, 22a})$$

Eine weitere von Shaw ²⁾ zur e/m_0 -Bestimmung angewandte Methode benutzt die fokussierende Wirkung gekreuzter elektrischer und magnetischer Felder auf bewegte Elektronen. In dieser Anordnung werden Elektronen innerhalb eines Zylinderkondensators (Radius der Kondensatorplatten: r_1 und r_2 ; Potentialdifferenz zwischen den Platten: U) durch ein axiales Magnetfeld der Induktion \mathfrak{B} auf eine Kreisbahn vom Radius R gezwungen, welche durch Blenden fest definiert ist.

Es ergibt sich dann die Beziehung

$$e/m = \frac{4U}{R^2 \cdot B^2 \cdot \ln(r_2/r_1)} = \frac{4U}{\mu_0^2 \cdot R^2 \cdot C^2 \cdot J^2 \cdot \ln(r_2/r_1)}. \quad (\text{II, 23})$$

Shaw hat also mit seiner Anordnung die Größe

$$\mu_0^2 \cdot e/m = \frac{4U}{R^2 \cdot C^2 \cdot J^2 \cdot \ln(r_2/r_1)} \text{ in Volt/Amp}^2. \quad (\text{II, 24})$$

¹⁾ R. T. Birge, Phys. Rev. 54, 972, 1938. — ²⁾ A. E. Shaw, ebenda 54, 193, 1938.

gemessen, wobei wieder mit C die Spulenkonstante der Magnetspule bezeichnet worden ist. Durch relativistische Korrektur erhält man $\mu_0^2 \cdot e/m_0$. Das von Shaw mitgeteilte Endergebnis ist nach seinen Angaben als in absoluten elektromagnetischen Einheiten für e/m_0 gemessener Zahlenwert aufzufassen; die zur Umrechnung auf diese Einheiten von ihm benutzten Werte für p und q gibt er allerdings nicht an. Tatsächlich hat Shaw an seinem in internationalen elektrischen Einheiten gemessenen Wert nur die Umrechnung vom ursprünglich-technischen auf das absolute elektromagnetische Maßsystem vorgenommen, dagegen den zum Übergang von den internationalen elektrischen Einheiten auf die des ursprünglich-technischen Maßsystems — abs. Volt und abs. Amp. — erforderlichen Umrechnungsfaktor p/q nicht berücksichtigt¹⁾.

Man erhält also den von Shaw für die Größe $\mu_0^2 \cdot e/m_0$ in Volt/Amp² gemessenen Zahlenwert einfach durch Multiplikation des von ihm angegebenen Endergebnisses mit dem Faktor $16 \pi^2 \cdot 10^{-10} = (0,4 \pi)^2$ für die Rückrechnung von $(R \cdot C)^2$ und 10^{-8} für die Rückrechnung von U .

Das Endresultat von Shaw ist also zu schreiben

$$\mu_0^2 \cdot e/m_0 = 0,27747_0 \pm 0,00083 \text{ Volt/Amp}^2. \quad (\text{II, 25})$$

Shaw hat nur einen wahrscheinlichen Fehler für seinen e/m_0 -Wert mit etwa 0,75⁰/₀₀ angegeben, den er mit den Methoden der kleinsten Quadrate berechnet hat. Die Fehlergrenzen für die einzelnen von Shaw gemessenen Größen sind der Originalarbeit nicht eindeutig zu entnehmen. Es erscheint angemessen, den vierfachen Betrag des wahrscheinlichen Fehlers — d. h. 3⁰/₀₀ — als Fehlergrenze für das Endergebnis anzusetzen.

Unter Benutzung der Zahlenwerte (I, 7) und (I, 1d) für μ_0 bzw. pq^2 erhält man wieder

$$e/m_0 = (1,7588_3 \pm 0,0053) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2 \quad (\text{II, 26})$$

bzw.

$$e/m_0 = (1,7588_2 \pm 0,0058) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec}/\text{kg}. \quad (\text{II, 26 a})$$

Schließlich hat Bearden²⁾ Messungen durchgeführt, die seiner Ansicht³⁾ nach gleichfalls unter die Gruppe der e/m_0 -Bestimmungen an freien Elektronen zu rechnen sind. Bei diesen Untersuchungen wird aus der

¹⁾ Die Kenntnis dieses Sachverhaltes verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn Prof. Dr. Kirchner, der seinerzeit mit Shaw über diese Frage diskutiert hat. — ²⁾ J. A. Bearden u. C. H. Shaw, Phys. Rev. **46**, 759, 1934; J. A. Bearden, ebenda **54**, 698, 1938. — ³⁾ J. A. Bearden, ebenda **55**, 584, 1939.

Brechung von Röntgenstrahlen an definierten Kristallen die Brechzahl n dieser Kristalle für die benutzten Röntgenwellenlängen bestimmt.

Die Dispersionstheorie ergibt für $\delta = 1 - n$ die Beziehung

$$\delta = \frac{\mu_0}{8\pi^2} \cdot (e/m_0) \lambda^3 \cdot N \cdot e \sum_1^s N_s (A + 1). \quad (\text{II, 27})$$

Dabei ist mit λ die benutzte Röntgenwellenlänge, mit N die Zahl der Kristallatome pro m^3 , mit N_s die Zahl der Elektronen der Frequenz ν_s pro Atom und mit A ein Korrektionsfaktor bezeichnet, der der Elektronenbindung und der Absorption der Röntgenstrahlen im Kristall Rechnung trägt. Unter Einführung der Dichte ρ (gemessen in kg/m^3) und der Masse m (gemessen in kg) eines Atoms kann man schreiben

$$N = \frac{\rho}{m}. \quad (\text{II, 28a})$$

Benutzt man hierbei als Masseneinheit statt des kg das Kilomol, so kann unter Beachtung der Beziehungen (I, 11) und (I, 13b) hierfür gesetzt werden

$$N = \frac{e \cdot N_L}{(A)}. \quad (\text{II, 28b})$$

Bei den „einwertigen“ Elektronen kann weiter gemäß Beziehung (I, 23) und (I, 11) $N_L \cdot e$ durch F ersetzt werden. Mit diesen Umschreibungen ergibt sich aus Beziehung (II, 27) die mit der Beardenschen Anordnung bestimmte Größe

$$\mu_0 \cdot F \cdot (e/m_0) = \frac{8\pi^2 \cdot (A) \cdot \delta}{e \cdot \lambda^3 \cdot \sum_1^s N_s (A + 1)}, \quad (\text{II, 29})$$

gemessen in $\text{m}/\text{Kilomol}$ (bzw. $\text{m}/\text{Kiloäquivalent}$).

Die genauesten Messungen sind von Bearden an einem für diese Untersuchungen besonders geeigneten Diamantkristall durchgeführt worden. Dabei wurden δ und ρ experimentell und die Effektivzahl der streuenden Elektronen pro Atom $\sum_1^s N_s (A + 1)$ theoretisch bestimmt. Das Ergebnis der Beardenschen Untersuchungen ist dann zu schreiben

$$\mu_0 \cdot F \cdot (e/m_0) = (2,1947_0 \pm 0,0028) \cdot 10^{13} \text{ m}/\text{Kilomol}. \quad (\text{II, 30})$$

Bearden hat in seiner Originalarbeit lediglich wahrscheinliche Fehler angegeben, ohne die zu einer direkten Abschätzung der entsprechenden Fehlergrenzen erforderlichen näheren Einzelheiten. Die hier für das Endresultat angeführte Fehlergrenze von etwa 1,3‰ ergibt sich ganz analog

dem Vorgehen zur Abschätzung der Fehlergrenze bei der e/m_0 -Bestimmung von Dunnington — Multiplikation der für die einzelnen, in Beziehung (II, 29) eingehenden Größen angegebenen wahrscheinlichen Fehler mit dem Faktor 4 und Addition dieser Werte entsprechend den Potenzen, mit denen die einzelnen Größen in der Beziehung (II, 29) auftreten.

Unter Berücksichtigung der Zahlenwerte (I, 7), (I, 27') und (I, 1d) für μ_0 , F und $p q^2$ folgt dann

$$e/m_0 = (1,7608_5 \pm 0,0024) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2 \quad (\text{II, 31})$$

bzw.

$$e/m_0 = (1,7603_4 \pm 0,0029) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec}/\text{kg}. \quad (\text{II, 31 a})$$

b) e/m_0 -Bestimmungen an gebundenen Elektronen. Bei den e/m_0 -Bestimmungen an im Atom gebundenen Elektronen handelt es sich im wesentlichen um zwei verschiedene, spektroskopische Methoden: e/m_0 -Bestimmungen aus dem normalen Zeeman-Effekt und e/m_0 -Bestimmungen aus dem Unterschied der Rydberg-Zahlen bzw. der Wellenzahlen entsprechender Atomlinien an leichten Elementen gleicher Elektronenzahl (H, D, He^+).

Die Theorie des Zeeman-Effektes ergibt für die normale longitudinale Dublettaufspaltung einer Atomlinie $\Delta\nu$ im Frequenzmaß (sec^{-1}) in einem magnetischen Felde der Induktion \mathfrak{B}

$$\Delta\nu = \frac{\bar{a}}{4\pi} \cdot (e/m_0) \cdot B = \frac{\mu_0 \bar{a}}{4\pi} \cdot (e/m_0) \cdot H. \quad (\text{II, 32})$$

Dabei ist \bar{a} ein Korrektionsfaktor nahezu gleich 1, der den Einfluß nahe benachbarter Niveaus auf die Aufspaltung der Atomlinien — Verschiebung der Linienschwerpunkte des aufgespaltenen Dubletts — berücksichtigt und theoretisch zu bestimmen ist.

Die magnetische Feldstärke H kann wieder gemäß Beziehung (II, 14) durch das Produkt aus Spulenkonstante C und Strom J in der Magnetspule ersetzt werden. Mißt man — wie es meist üblich ist — $\Delta\nu$ im Wellenzahlenmaß (m^{-1}), so ist für die beim Zeeman-Effekt zur e/m_0 -Bestimmung gemessene Größe zu schreiben :

$$\frac{\mu_0}{c_0} \cdot (e/m_0) = \frac{4\pi \cdot \Delta \tilde{\nu}}{\bar{a} \cdot C \cdot J} = \frac{2 \Delta \tilde{\nu}}{\bar{a} \cdot C} \cdot \frac{2\pi}{J}, \quad (\text{II, 33})$$

gemessen in Amp^{-1} .

Houston und Mitarbeiter haben in einer Reihe von Arbeiten¹⁾ ihre Ergebnisse für die Zeeman-Effektmessungen an Atomlinien des Cd, Zn,

¹⁾ J. S. Campbell u. W. V. Houston, Phys. Rev. **39**, 601, 1932; L. E. Kinsler u. W. V. Houston, ebenda **45**, 104, 134, 1934; **46**, 533, 1934.

Ne und He als e/m_0 -Werte, umgerechnet auf absolute elektromagnetische Einheiten, veröffentlicht. Dabei wurde der Umrechnungsfaktor q von int. auf abs. Amp. in die von den Autoren mit K bezeichnete Spulenkonstante hineingezogen¹⁾. Die angegebenen Endergebnisse müssen also zunächst auf die eigentlich gemessene Größe $(\mu_0/c_0) \cdot (e/m_0)$ in m/Amp zurückgerechnet werden, was auf Grund der in den Originalarbeiten angegebenen Daten nach Beziehung (II, 33) einfach durchzuführen ist. Es muß dabei für $2 \Delta \tilde{\nu}/\bar{\alpha} \cdot J$ (in m^{-1}/Amp) der 10²-fache Betrag der von Kinsler und Houston jeweils in $\text{cm}^{-1}/\text{Amp}$ ²⁾ mitgeteilten Werte und für C entsprechend den schon weiter oben gemachten Ausführungen das $(10^3/4 \pi)$ -fache³⁾ des von den Autoren für K angegebenen Zahlenwertes eingesetzt werden. Die Ergebnisse von Kinsler und Houston sind dann zu schreiben

$$\frac{\mu_0}{c_0} \cdot e/m_0 = (7,364_3 \pm 0,012) \cdot 10^{-4} \text{ Amp}^{-1} \quad (\text{Cd}) \quad (\text{II, 34})$$

bzw.

$$\frac{\mu_0}{c_0} \cdot e/m_0 = (7,364_1 \pm 0,013) \cdot 10^{-4} \text{ Amp}^{-1} \quad (\text{Zn}). \quad (\text{II, 35})$$

¹⁾ Kinsler und Houston bemerken auf S. 107 ihrer Veröffentlichung zu dem von ihnen benutzten K -Wert (36,835), daß dieser aus dem in der Tabelle III für $J = 190$ Amp eingetragenen Wert (36,846) durch eine Temperaturkorrektur und eine Korrektur von 0,005% zur Umrechnung von internationalen auf absolute Amp. — d. h. unter Benutzung von $q = 0,99995$ — entstanden sei. Rechnet man mit diesem Zahlenwert für K und dem nur in der früheren Veröffentlichung von Campbell und Houston mitgeteilten Zahlenwert $2,99796 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$ für c_0 die Größe $2 \pi c_0/K$ aus, so erhält man für diese einen Zahlenwert, der 0,005% kleiner ist als der von Kinsler und Houston in der Tabelle IV auf S. 108 ihrer Arbeit angegebene; daß Kinsler und Houston mit einem um 0,005% größeren Zahlenwert für c_0 — d. h. mit $c_0 = 2,99801 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$ — gerechnet haben, ist nicht anzunehmen. Ferner ist der Wert 36,835 um 0,03% kleiner als 36,846, d. h. gerade um den Betrag, der von Campbell und Houston in der voraufgehenden, mit gleicher Versuchsanordnung durchgeführten Arbeit auf S. 610 für die erforderliche Temperaturkorrektur mitgeteilt wurde. Diese beiden Tatsachen sprechen dafür, daß der von Kinsler und Houston auf S. 106 ihrer Arbeit angegebene Zahlenwert 36,835 für K zwar bezüglich des Temperatureinflusses, aber nicht bezüglich der Umrechnung von int. Amp. auf abs. Amp. korrigiert ist, sondern die Umrechnung auf absolute Einheiten erst bei der Berechnung der Größe $2 \pi c_0/K$ in der Tabelle IV auf S. 108 erfolgte. Demnach ist umgekehrt bei der Zurückrechnung auf die ursprünglich in m/Amp gemessene Größe $(\mu_0/c_0) \cdot (e/m_0)$ gemäß Beziehung (II, 33) für C statt des $(10^3/4 \pi q)$ -fachen der $(10^3/4 \pi)$ -fache Betrag des K -Wertes 36,835 einzusetzen.

— ²⁾ Kinsler und Houston geben ihre Zahlenwerte für $2 \Delta \tilde{\nu}/J \cdot \bar{\alpha}$ in der Tabelle IV auf S. 108 ihrer Veröffentlichung in $10^{-7} \text{ cm}^{-1}/\text{Amp}$ an; siehe hierzu auch die Tabelle VI auf S. 614 der älteren Arbeit von Campbell und Houston. Die Zahlenwerte für $2 \pi c_0/K$ sind in 10^6 sec^{-1} angegeben worden

— ³⁾ Siehe hierzu ¹⁾.

Die hier angegebenen Fehlergrenzen von etwa $1,6^0/_{00}$ bzw. $1,8^0/_{00}$ sind folgendermaßen abgeschätzt worden: Kinsler und Houston geben als mittlere Fehler für $\Delta \tilde{\nu}/J$ bzw. K $0,45^0/_{00}$ bzw. $0,33^0/_{00}$ an; durch Bildung der Wurzel aus ihrer Quadratsumme entsteht ein mittlerer Fehler von $0,56^0/_{00}$, den die Autoren ihrem als Endresultat angegebenen e/m_0 -Wert zuschreiben.

Von den Autoren ist eine vollständige Fehlerdiskussion zur Bestimmung der entsprechenden Fehlergrenzen nicht mitgeteilt worden. Für diese erhält man aber nach den an anderer Stelle¹⁾ gemachten Ausführungen einen angemessenen Wert durch Multiplikation der einzelnen angegebenen mittleren Fehler mit dem Faktor 2,5 und Addition dieser Werte. Es ergibt sich so eine Fehlergrenze von etwa $2^0/_{00}$, die dem von Kinsler und Houston angegebenen mittleren Fehler von $0,56^0/_{00} - \pm 0,0010$ in der zahlenmäßigen Angabe für e/m_0 — entsprechen würde. In einer späteren Veröffentlichung teilen Kinsler und Houston²⁾ dann in den endgültigen Zahlenangaben als mittlere Fehler für die Messungen am Cd $\pm 0,0008$ bzw. für die Messungen am Zn $\pm 0,0009$ mit; entsprechend wurde hier die Fehlergrenze von $2^0/_{00}$ auf $1,6^0/_{00}$ bzw. $1,8^0/_{00}$ herabgesetzt.

Mit den unter (I, 3) und (I, 7) angegebenen Zahlenwerten für c_0 und μ_0 erhält man

$$e/m_0 = (1,7576_5 \pm 0,0030) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2 \text{ (Cd)} \quad (\text{II, 36})$$

$$\text{bzw. } e/m_0 = (1,7576_0 \pm 0,0033) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2 \text{ (Zn)}. \quad (\text{II, 37})$$

Division durch pq^2 (I, 1d) ergibt

$$e/m_0 = (1,7571_4 \pm 0,0034) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec}/\text{kg} \text{ (Cd)} \quad (\text{II, 36 a})$$

$$\text{bzw. } e/m_0 = (1,7570_0 \pm 0,0038) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec}/\text{kg} \text{ (Zn)}. \quad (\text{II, 37 a})$$

Die Messungen an Ne- und He-Linien sind von Kinsler und Houston in sehr knapper Form veröffentlicht worden; es werden im wesentlichen nur die Endergebnisse, umgerechnet auf e/m_0 in absoluten elektromagnetischen Einheiten, und die zugehörigen mittleren Fehler mitgeteilt. Da aber die an verschiedenen Atomlinien gemessenen Größen $(\mu_0/c_0) \cdot (e/m_0)$ in demselben Verhältnis zueinander stehen müssen wie die angegebenen e/m_0 -Werte, ist die Rückrechnung auf die gemessenen Größen und die weitere Angabe der zugehörigen e/m_0 -Werte (gemessen in $\text{m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2$ bzw. $\text{Amp} \cdot \text{sec}/\text{kg}$) ohne weiteres möglich. Das gleiche gilt für den Über-

¹⁾ U. Stille, ZS. f. Phys. 120, 703, 1943. — ²⁾ L. E. Kinsler u. W. V. Houston, Phys. Rev. 46, 533, 1934.

gang vom angegebenen mittleren Fehler zur entsprechenden Fehlergrenze. Kinslers Resultate sind demnach zu schreiben

$$\begin{aligned} e/m_0 &= (1,7586_3 \pm 0,0051) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2 & (\text{Ne}) & \quad (\text{II, 38}) \\ &= (1,7581_2 \pm 0,0055) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec}/\text{kg}, & & \quad (\text{II, 38 a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e/m_0 &= (1,7570_3 \pm 0,0033) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2 & (\text{He}) & \quad (\text{II, 39}) \\ &= (1,7565_2 \pm 0,0038) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec}/\text{kg}. & & \quad (\text{II, 39 a}) \end{aligned}$$

Als Mittelwert aus allen Beobachtungen folgt dann entsprechend Kinsler und Houstons Wertung der einzelnen Ergebnisse

$$\begin{aligned} e/m_0 &= (1,7576_3 \pm 0,0026) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2 & & \quad (\text{II, 40}) \\ &= (1,7571_2 \pm 0,0031) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec}/\text{kg}. & & \quad (\text{II, 40 a}) \end{aligned}$$

Die zweite spektroskopische Methode zur e/m_0 -Bestimmung beruht auf der Abhängigkeit der Rydberg-Zahlen vom Verhältnis Elektronenmasse zu Atomkernmasse, die durch die Mitbewegung des Atomkerns hervorgerufen wird. Gemessen wird dabei die Wellenzahldifferenz entsprechender Atomlinien von leichtem Wasserstoff und einfach ionisiertem Helium bzw. schwerem Wasserstoff; unter Kenntnis der Atomgewichte (A_H), (A_D) bzw. (A_{He}) erhält man dann das Molekulargewicht des Elektrons (M_e). Zur Auswertung der experimentellen Messungen werden folgende Beziehungen benutzt

$$(M_e) = \frac{(R_{He^+} - R_H) \cdot [(A_{He}) - (M_e)] \cdot [(A_H) - (M_e)]}{R_H \cdot [(A_{He}) - (A_H) - (M_e)]} \quad (\text{II, 41})^1$$

bzw.

$$(M_e) = \frac{(R_D - R_H) \cdot (A_D) \cdot [(A_H) - (M_e)]}{R_H \cdot [(A_D) - (A_H)]} \quad (\text{II, 42})^1$$

Dabei bedeuten R_H , R_D und R_{He^+} die aus den gemessenen Atomlinien bestimmten Rydberg-Zahlen für leichten Wasserstoff, schweren Wasserstoff und das einfach ionisierte Helium. Die Beziehung (II, 42) wird zur Auswertung der gemessenen Wellenzahldifferenzen $\tilde{\nu}_D - \tilde{\nu}_H$ entsprechender Atomlinien des schweren und leichten Wasserstoffs meist in folgender Form geschrieben

$$(M_e) = \frac{(M_{D^+}) \cdot (M_{H^+}) \cdot (\tilde{\nu}_D - \tilde{\nu}_H)}{(M_{D^+}) \cdot \tilde{\nu}_H - (M_{H^+}) \cdot \tilde{\nu}_D} \quad (\text{II, 42 a})$$

Dabei sind mit (M_{H^+}) und (M_{D^+}) die Molekulargewichte der Atomkerne des leichten und schweren Wasserstoffs bezeichnet worden.

¹⁾ Das Molekulargewicht des Elektrons (M_e) tritt in der rechten Seite der Beziehungen (II, 41) und (II, 42) nur als Korrektionsglied auf und braucht hierfür nur näherungsweise bekannt zu sein.

Allen folgenden Angaben über die Zahlenwerte für (M_e) liegen einheitlich die von Livingston und Bethe¹⁾ angegebenen Atomgewichte

$$(A_H) = 1,00813 \pm 0,00002,$$

$$(A_D) = 2,01473 \pm 0,00002,$$

$$(A_{He}) = 4,00389 \pm 0,00007$$

zugrunde.

Die spezifische Ladung der „einwertigen“ Elektronen ist gemäß Beziehung (I, 23) zahlenmäßig gleich F , falls die Elektronenmasse in Kilomol gemessen wird. Mißt man dagegen diese in kg, so kann man nach Beziehung (I, 13a) schreiben

$$e/m_0 = \frac{F}{(M_e)} \quad (\text{II, 43})$$

und erhält somit die spezifische Elektronenladung in Amp · sec/kg. Dabei wird für F Zahlenwert und Fehlergrenze nach (I, 27') benutzt. Multiplikation mit pq^2 nach (I, 1d) liefert e/m_0 in $\text{m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2$.

Die ersten Präzisionsbestimmungen dieser Art sind von Houston²⁾ an Atomlinien des leichten Wasserstoffs und des einfach ionisierten Heliums durchgeführt worden. Sein Auswertungsverfahren wurde wegen eines kleinen Irrtums in der von ihm benutzten Formel von Birge³⁾ korrigiert. Das Houstonsche Endergebnis läßt sich dann schreiben

$$(M_e) = (5,4817_5 \pm 0,0066) \cdot 10^{-4}. \quad (\text{II, 44})$$

Diese Zahl führt auch zu dem von Dunnington⁴⁾ in seinem Artikel über die Atomkonstanten für diese Messungen angegebenen e/m_0 -Wert.

Von Williams und Gibbs⁵⁾ wurde darauf hingewiesen, daß an dem von Houston für R_H angegebenen Zahlenwert noch eine Korrektur vorzunehmen sei, da in der Feinstruktur der H_α -Linie zwischen der Lage des Intensitätsmaximums der Linien eines Linienkomplexes und der Lage seines Schwerpunktes unterschieden werden müsse. Die entsprechende Korrektur an den Houstonschen Messungen ergibt nach Williams und Gibbs

$$(M_e) = (5,4832_2 \pm 0,0066) \cdot 10^{-4}. \quad (\text{II, 44'})$$

In einer späteren Arbeit teilt Williams⁶⁾ einen korrigierten e/m_0 -Wert nach den Houstonschen Messungen mit, dem folgender Zahlenwert für (M_e) zugrunde liegen muß:

$$(M_e) = (5,4836_9 \pm 0,0066) \cdot 10^{-4}. \quad (\text{II, 44''})$$

¹⁾ M. S. Livingston u. H. A. Bethe, Rev. Mod. Phys. 9, 373, 1937. —

²⁾ V. W. Houston, Phys. Rev. 30, 608, 1927. — ³⁾ R. T. Birge, Rev. Mod. Phys. 1, 1, 1929. — ⁴⁾ F. G. Dunnington, ebenda 11, 65, 1939. — ⁵⁾ R. C. Williams u. R. C. Gibbs, Phys. Rev. 45, 221, 475, 491, 1934. — ⁶⁾ R. C. Williams, ebenda 54, 568, 1938.

Schließlich hat Birge¹⁾ nochmals die Houstonschen Messungen nachgerechnet, macht allerdings in seiner kurzen Veröffentlichung keine näheren Angaben über die von ihm vorgenommenen Korrekturen. Aus den von Birge für R_H und R_{He+} mitgeteilten Werten folgt

$$(M_e) = (5,4783_2 \pm 0,0066) \cdot 10^{-4}. \quad (\text{II, } 44''')$$

Die Fehlergrenze ist für die Houstonschen Messungen nicht leicht abzuschätzen. Die Fehler, die durch die Atomgewichte in die Fehlergrenze für (M_e) hineinkommen, sind relativ gering und schon oben angegeben worden. Für die spektroskopischen Messungen gibt Houston nur die mittleren Abweichungen auf Grund der statistischen Streuung der Meßwerte an. Weiter teilt er mit, daß seiner Ansicht nach der Fehler für die Zahlenwerte von R_{He+} und R_H vielleicht $\pm 0,05 \text{ cm}^{-1}$ und für ihre Differenz $\pm 0,02 \text{ cm}^{-1}$ betrage. Legt man diesen letzten Wert als mittleren Fehler für $(R_{He+} - R_H)$ zugrunde, so erhält man wieder durch Multiplikation mit dem Faktor 2,5 als Fehlergrenze $0,05 \text{ cm}^{-1}$ bzw. als relative Fehlergrenze für $(R_{He+} - R_H)$ über $1,10/100$. Als Gesamtfehlergrenze für (M_e) folgt dann gemäß Beziehung (II, 41) unter Beachtung der für die Atomgewichte oben angegebenen Fehlergrenzen etwa $1,20/100$.

Als entsprechende Zahlenwerte in $\text{Amp} \cdot \text{sec/kg}$ und $\text{m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2$ ergeben sich für die spezifische Ladung des Elektrons folgende Werte:

$$e/m_0 = (1,7607_6 \pm 0,0022) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg} \quad (\text{II, } 45)$$

$$\text{bzw.} \quad = (1,7612_7 \pm 0,0027) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2, \quad (\text{II, } 45 \text{ a})$$

¹⁾ R. T. Birge, Phys. Rev. 59, 221, 1941. — *Anmerkung bei der Korrektur:* Inzwischen ist hierzu eine ausführliche Veröffentlichung von Birge (Phys. Rev. 60, 706, 1941) erschienen, die aus äußeren Gründen leider erst während der Drucklegung bekannt und zugänglich wurde. Aus den in der kurzen Notiz (ebenda 59, 221, 1941) mitgeteilten Daten für die verschiedenen Rydberg-Zahlen wurden die entsprechenden, dort nicht veröffentlichten (M_e) -Werte unter Benutzung der von Birge seinerzeit (ebenda 54, 972, 1938) veröffentlichten Zahlenwerte für die erforderlichen Hilfsgrößen rückwärts gewonnen; da Birge, wie sich jetzt herausstellt, bei seiner letzten Berechnung andere Zahlenwerte für diese Hilfsgrößen einsetzte, weichen die hier angegebenen (M_e) -Werte (II, 44'''), (II, 46''), (II, 54') von den von Birge berechneten um allerdings geringfügige Beträge ab. Für die in der vorliegenden Veröffentlichung erfolgte Festlegung eines Zahlenwertes für e/m_0 bzw. R_∞ spielen jedoch diese kleinen Differenzen keine Rolle, da sie gegenüber den Fehlergrenzen zu vernachlässigen sind. Auf Einzelheiten in der Neuberechnung, wie sie Birge in seiner letzten Arbeit auf Grund der verschiedenen vorliegenden experimentellen Daten für Wellenzahldifferenzen, Rydberg-Zahlen, e/m_0 -Werte usw. vorgenommen hat, kann im Rahmen dieser Korrekturanmerkung nicht mehr eingegangen werden.

$$\begin{aligned}
 e/m_0 &= (1,7602_8 \pm 0,0022) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg} & (\text{II, } 45') \\
 \text{bzw.} &= (1,7607_9 \pm 0,0027) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2, & (\text{II, } 45' \text{ a}) \\
 e/m_0 &= (1,7601_3 \pm 0,0022) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg} & (\text{II, } 45'') \\
 \text{bzw.} &= (1,7606_4 \pm 0,0027) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2, & (\text{II, } 45'' \text{ a}) \\
 e/m_0 &= (1,7618_6 \pm 0,0022) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg} & (\text{II, } 45''') \\
 \text{bzw.} &= (1,7623_7 \pm 0,0027) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2. & (\text{II, } 45''' \text{ a})
 \end{aligned}$$

Vor einiger Zeit hat Chu ¹⁾ R_{He^+} neu bestimmt. Sein Ergebnis führt mit dem Houstonschen Wert für R_{H} entsprechend (II, 44) für das Molekulargewicht des Elektrons zu der Zahl

$$(M_e) = (5,4850_7 \pm 0,0066) \cdot 10^{-4}. \quad (\text{II, } 46)$$

Benutzt man den von Williams und Gibbs korrigierten Houstonschen Wert für R_{H} entsprechend (II, 44'), so erhält man

$$(M_e) = (5,4865_4 \pm 0,0066) \cdot 10^{-4}. \quad (\text{II, } 46')$$

Schließlich gibt Birge ²⁾ noch ohne nähere Einzelheiten über die Art der Berechnung Zahlenwerte für die von Houston gemessene Rydberg-Zahl R_{H} und das von Chu gemessene R_{He^+} an, aus denen folgt

$$(M_e) = (5,4840_9 \pm 0,0066) \cdot 10^{-4}. \quad (\text{II, } 46'')$$

Hieraus sind als e/m_0 -Werte abzuleiten

$$\begin{aligned}
 e/m_0 &= (1,7596_9 \pm 0,0022) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg} & (\text{II, } 47) \\
 \text{bzw.} &= (1,7602_0 \pm 0,0027) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2, & (\text{II, } 47 \text{ a}) \\
 e/m_0 &= (1,7592_2 \pm 0,0022) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg} & (\text{II, } 47') \\
 \text{bzw.} &= (1,7597_3 \pm 0,0027) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2, & (\text{II, } 47' \text{ a}) \\
 e/m_0 &= (1,7600_1 \pm 0,0022) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg} & (\text{II, } 47'') \\
 \text{bzw.} &= (1,7605_2 \pm 0,0027) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2. & (\text{II, } 47'' \text{ a})
 \end{aligned}$$

Chu teilt als Fehlergrenze für die von ihm bestimmte Rydberg-Zahl $R_{\text{He}^+} \pm 0,04 \text{ cm}^{-1}$ mit; seine Messungen scheinen also etwas genauer als die älteren Houstonschen zu sein. Da aber in die Berechnung von (M_e) auch die von Houston bestimmte (korrigierte oder nicht korrigierte) Rydberg-Zahl R_{H} eingeht, erscheint es angezeigt, auch für (M_e) aus den Chuschen Messungen die Houstonsche Fehlergrenze anzusetzen.

Aus den Wellenzahldifferenzen entsprechender Linien im roten Dublett des leichten und schweren Wasserstoffs ist von einer Reihe von Autoren

¹⁾ Djen-Yuen Chu, Phys. Rev. 55, 175, 1939. — ²⁾ Siehe Fußnote 1 auf S. 170.

das Molekulargewicht des Elektrons und seine spezifische Ladung bestimmt worden. Die Ergebnisse der Messungen von Shane und Spedding¹⁾ sind später von Williams²⁾, Birge³⁾ und Dunnington⁴⁾ noch korrigiert worden, da Shane und Spedding ihre Wellenzahlen nicht auf das Vakuum bezogen hatten. Das Ergebnis der Messungen von Shane und Spedding ist dann zu schreiben

$$(M_e) = (5,4895_6 \pm 0,0047) \cdot 10^{-4}. \quad (\text{II}, 48)$$

Für die spezifische Elektronenladung folgt hieraus

$$e/m_0 = (1,7582_5 \pm 0,0016) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg} \quad (\text{II}, 49)$$

$$\text{bzw.} \quad = (1,7587_6 \pm 0,0021) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2. \quad (\text{II}, 49 \text{ a})$$

Shane und Spedding geben nur einen wahrscheinlichen Fehler ohne eine eingehende Fehlerdiskussion, aus der die Fehlergrenzen für die einzelnen gemessenen Größen zu ersehen wären, an. Nach Ansicht von Birge³⁾ und Dunnington⁴⁾ ist den Messungen von Shane und Spedding dieselbe Genauigkeit zuzuschreiben, wie den analogen Untersuchungen von Williams²⁾, über deren Ergebnisse als nächstes zu berichten ist. Dieser Auffassung folgend ist für das Endergebnis von Shane und Spedding dieselbe Fehlergrenze wie bei dem Resultat von Williams angesetzt worden.

Die Untersuchungen von Williams und Gibbs⁵⁾ ergaben für das Molekulargewicht des Elektrons

$$(M_e) = (5,4901_6 \pm 0,0047) \cdot 10^{-4}. \quad (\text{II}, 50)$$

Hieraus folgt für die spezifische Elektronenladung

$$e/m_0 = (1,7580_6 \pm 0,0016) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg} \quad (\text{II}, 51)$$

$$\text{bzw.} \quad = (1,7585_7 \pm 0,0021) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2. \quad (\text{II}, 51 \text{ a})$$

Williams teilt in seiner Veröffentlichung ohne eine vollständige Fehlerdiskussion nur einen wahrscheinlichen Fehler für seinen auf absolute elektromagnetische Einheiten umgerechneten e/m_0 -Wert mit. Dieser enthält 0,1⁰/₁₀₀ als wahrscheinlichen Fehler für die statistischen Streuungen bei der Festlegung der Wellenzahldifferenz $\tilde{\nu}_D - \nu_H$ und 0,1⁰/₁₀₀ für etwaige systematische Fehler, über die Williams nichts Näheres aussagt. Somit ist zumindestens der vierfache Wert der Summe dieser beiden Beträge, d. h. 0,8⁰/₁₀₀ als Fehler-

¹⁾ F. H. Spedding, C. D. Shane u. N. S. Grace, Phys. Rev. **44**, 58, 1933; C. D. Shane u. F. H. Spedding, ebenda **47**, 33, 1935. — ²⁾ R. C. Williams, ebenda **54**, 568, 1938. — ³⁾ R. T. Birge, ebenda **54**, 972, 1938. — ⁴⁾ F. G. Dunnington, Rev. Mod. Phys. **11**, 65, 1939. — ⁵⁾ R. C. Williams u. R. C. Gibbs, Phys. Rev. **44**, 1029, 1933; R. C. Williams, ebenda **54**, 558, 568, 1938.

grenze für die Wellenzahldifferenz $\tilde{\nu}_D - \tilde{\nu}_H$ ¹⁾ und für (M_e) etwa 0,85⁰/₁₀₀ entsprechend den in Beziehung (II, 42a) eingehenden Größen anzusetzen — nach den schon weiter oben aufgeführten Daten: relative Fehlergrenze für (M_{H+}) : $2 \cdot 10^{-5}$; für (M_{D+}) : $1 \cdot 10^{-5}$; für $\tilde{\nu}_H$: $1,3 \cdot 10^{-6}$ nach Houston ²⁾.

Houston ³⁾ hat später ein neues Verfahren zur Auswertung der Dublett-aufnahmen durch Fourier-Analyse ausgearbeitet; dieses soll die durch die Überlagerung der einzelnen Feinstrukturkomponenten und die Festlegung der „Intensitätsmaxima“ und „Schwerpunkte“ der einzelnen Linienkomplexe bedingten Unsicherheiten vermeiden. Die nach dieser Methode bisher gewonnenen Ergebnisse sind von Houston brieflich an Birge ⁴⁾ und Dunnington ⁵⁾ mitgeteilt bzw. von Robinson ⁶⁾ kurz veröffentlicht worden. Danach wurde das Molekulargewicht des Elektrons zu

$$(M_e) = (5,4861_6 \pm 0,0061) \cdot 10^{-4} \quad (\text{II, 52})$$

bestimmt. Für die spezifische Elektronenladung folgt

$$e/m_0 = (1,7593_4 \pm 0,0021) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg} \quad (\text{II, 53})$$

$$\text{bzw.} \quad = (1,7598_5 \pm 0,0025) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2. \quad (\text{II, 53a})$$

Statt einer Fehlerdiskussion findet man in den knappen Mitteilungen über diese Untersuchungen nur einen wahrscheinlichen Fehler für den auf absolute elektromagnetische Einheiten umgerechneten e/m_0 -Wert, der das 1,25-fache des für die Messungen von Shane und Spedding bzw. Williams angegebenen beträgt und gleichfalls schon den wahrscheinlichen Fehler des für die spezifische Ionenladung benutzten Wertes enthält. Hieraus läßt sich die entsprechende Fehlergrenze für (M_e) zu etwa 1,1⁰/₁₀₀ abschätzen.

Schließlich liegt noch eine erst kürzlich erschienene, sehr ausführliche Untersuchung von Drinkwater, Richardson und Williams ⁷⁾ vor. Diese Autoren arbeiteten mit einem Reflexionsstufengitter von 40 Platten

¹⁾ Lediglich für die Festlegung der Feinstrukturkomponenten „1“, deren Differenz zur Bestimmung von (M_e) gemessen wird, gibt Williams auf S. 565 seiner Veröffentlichung als Fehlergrenzen $\pm 0,005 \text{ cm}^{-1}$ im Falle $\tilde{\nu}_H$ und $\pm 0,003_5 \text{ cm}^{-1}$ im Falle $\tilde{\nu}_D$ an (Fehler infolge ungenauer Kenntnis des Verlaufs der Linienform und des Einflusses der benachbarten Komponente „4“). Für die Festlegung der hier interessierenden Differenz der „1“-Komponenten teilt Williams jedoch keine Fehlergrenzen mit. Der hier abgeschätzten relativen Fehlergrenze von 0,8⁰/₁₀₀ entspricht eine absolute Fehlergrenze von $\pm 0,003_3 \text{ cm}^{-1}$ für die Differenz $\tilde{\nu}_D - \tilde{\nu}_H$, wobei zu beachten ist, daß in diese außer den soeben erwähnten noch andere Fehler eingehen können. — ²⁾ V. W. Houston, Phys. Rev. **30**, 608, 1927. — ³⁾ V. W. Houston, ebenda **51**, 446, 1937. — ⁴⁾ R. T. Birge, ebenda **54**, 972, 1938. — ⁵⁾ F. G. Dunnington, Rev. Mod. Phys. **11**, 65, 1939. — ⁶⁾ C. F. Robinson, Phys. Rev. **55**, 423, 1939. — ⁷⁾ J. W. Drinkwater, Sir O. Richardson u. W. E. Williams, Proc. Roy. Soc. London (A) **174**, 164, 1940; **175**, 345, 1940.

und 2 Bezugsspiegeln zur genauen Ausmessung der Wellenzahlen, einer Anordnung, wie sie speziell für die zu fordernde hohe Präzision von Williams¹⁾ entwickelt worden war. Die Messungen wurden an die rote Kadmiumlinie²⁾ als spektroskopische Standardlinie nach den neuen Untersuchungen von Barrell und Sears³⁾ angeschlossen und im Vakuum durchgeführt, während alle früheren Untersuchungen mit Pérot-Fabry-Etalons in Luft angestellt worden waren. Es wurden also direkt die Vakuumwerte der Wellenzahlen für die beobachteten Komponenten gemessen; hierdurch entfiel die Notwendigkeit einer Reduktion, welche über die verschiedenen hierzu benutzten Formeln erhebliche Ungenauigkeiten in frühere Untersuchungen⁴⁾ hineingetragen hatte.

Mit dieser Apparatur gelang es Drinkwater, Richardson und Williams, die Komponente „3“ im roten Wasserstoffdublett einwandfrei von den übrigen zu trennen und zum ersten Male experimentelle Daten für Lage und Intensität der Komponente „4“ zu gewinnen, ein Fortschritt, der die genaue Festlegung der einzelnen Dublettkomponenten wesentlich erleichterte. Die Wellenzahlen für das rote Dublett des leichten *und* des schweren Wasserstoffs wurden getrennt absolut gemessen und alle Fehlermöglichkeiten mit besonderer Sorgfalt diskutiert.

Der sich ergebende Wert für das Molekulargewicht des Elektrons ist zu schreiben

$$(M_e) = (5,4864_6 \pm 0,0066) \cdot 10^{-4}. \quad (\text{II, 54})$$

Hieraus folgt für die spezifische Elektronenladung

$$e/m_0 = (1,7592_4 \pm 0,0022) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg} \quad (\text{II, 55})$$

$$\text{bzw.} \quad = (1,7597_6 \pm 0,0027) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2. \quad (\text{II, 55a})$$

Drinkwater, Richardson und Williams teilen als mittlere Fehler für die von ihnen gemessenen Werte $\tilde{\nu}_H$ bzw. $\nu_D \pm 0,001_4 \text{ cm}^{-1}$ bzw. $\pm 0,001_3 \text{ cm}^{-1}$ mit. Für die Differenz $\tilde{\nu}_D - \tilde{\nu}_H$ aus diesen beiden Einzelmessungen, die jeweils auf getrennten Platten gewonnen wurden, ergibt sich dann als Wurzel aus der Quadratsumme der Einzelfehler ein absoluter Fehler von $\pm 0,001_9 \text{ cm}^{-1}$, d. h. ein relativer mittlerer Fehler von $0,46^0/_{00}$. Als ent-

¹⁾ W. E. Williams, Proc. Phys. Soc. **45**, 699, 1933. — ²⁾ Houston u. Chu benutzten zum Anschluß ihrer interferometrischen Messungen an die Absolutskala die grüne Heliumlinie bei 5016 \AA als Normal. Shane und Spedding bzw. Williams haben zur Auswertung der von ihnen gemessenen Differenzen $\tilde{\nu}_D - \tilde{\nu}_H$ den von Houston absolut bestimmten Wert für R_H bzw. $\tilde{\nu}_H$ verwandt. — ³⁾ H. Barrell u. J. E. Sears, Phil. Trans. Roy. Soc. London (A) **238**, 1, 1939. — ⁴⁾ Siehe hierzu z. B. die Zusammenstellung in der Tabelle 7 dieser Veröffentlichung.

sprechende Fehlergrenze ist der 2,5-fache Wert, d. h. $1,150/_{00}$ anzusetzen. Hieraus und aus den schon früher für die übrigen in Beziehung (II, 42a) eingehenden Größen angegebenen Fehlergrenzen erhält man für (M_e) eine relative Fehlergrenze von $1,20/_{00}$.

Birge¹⁾ hat auch auf Grund der experimentellen Ergebnisse von Drinkwater, Richardson und Williams eine Neuberechnung der Rydberg-Zahlen R_H und R_D vorgenommen. Die von Birge berechneten Zahlenwerte weichen von den in der Originalarbeit angegebenen nur geringfügig ab. Aus ihnen folgt für das Molekulargewicht des Elektrons

$$(M_e) = (5,4864_9 \pm 0,0066) \cdot 10^{-4}. \quad (\text{II, } 54')$$

Für die spezifische Elektronenladung ergibt sich

$$e/m_0 = (1,7592_4 \pm 0,0022) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg} \quad (\text{II, } 55')$$

$$\text{bzw.} \quad = (1,7597_5 \pm 0,0027) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2. \quad (\text{II, } 55' \text{ a})$$

c) *Zusammenstellung der verschiedenen e/m_0 -Bestimmungen; die Elektronenmasse m_0 .* Die aus den in den beiden vorausgehenden Abschnitten im einzelnen aufgeführten Messungen folgenden e/m_0 -Werte sind noch einmal in der Tabelle 3 zusammengefaßt worden. Die einzelnen Ergebnisse sind laufend durchnummeriert und in $\text{Amp} \cdot \text{sec/kg}$ und $\text{m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2$ angegeben worden. Soweit für eine von einem Autor durchgeführte Untersuchung infolge mehrerer getrennter Meßreihen oder später vorgenommener Korrekturen sich mehrere Werte ergeben haben, ist dieses in der letzten Spalte der Tabelle besonders vermerkt worden. Um einen anschaulichen Überblick über die verschiedenen Messungen zu gewinnen, sind in der Fig. 1 die einzelnen e/m_0 -Werte, gemessen in $\text{Amp} \cdot \text{sec/kg}$, in ein Diagramm eingetragen worden. Die Länge der Balken beiderseits der eingezeichneten e/m_0 -Punkte repräsentiert die jeweilige Fehlergrenze. Sofern für eine dieser 13 verschiedenen Untersuchungen mehrere e/m_0 -Werte angegeben sind, ist der Fehlerbalken des für die betreffende Arbeit als Endresultat erachteten Wertes voll ausgezogen worden, während die übrigen gestrichelt eingezeichnet sind; gleichfalls wurde die zugehörige laufende Nummer in der Fig. 1 und in der Tabelle 3 als Kursivzahl gedruckt.

Es soll nun zunächst ein Zahlenwert für die spezifische Elektronenladung angegeben werden, der auf Grund der vorgelegten experimentellen Daten heute als vertretbar anzunehmen ist. Dabei müssen nach den schon an anderer Stelle²⁾ ausführlich dargelegten Gründen irgendwelche mathe-

¹⁾ Siehe Fußnote 1 auf S. 170. — ²⁾ U. Stille, ZS. f. Phys. 120, 703, 1943.

matische Methoden der Ausgleichsrechnung ausscheiden, zumal die einzelnen Werte mit sehr unterschiedlichen Methoden gewonnen wurden und die Fehlergrenzen teilweise mangels eindeutiger Fehlerdiskussionen nur grob abgeschätzt werden konnten. Eine Betrachtung der Fig. 1 zeigt, daß der

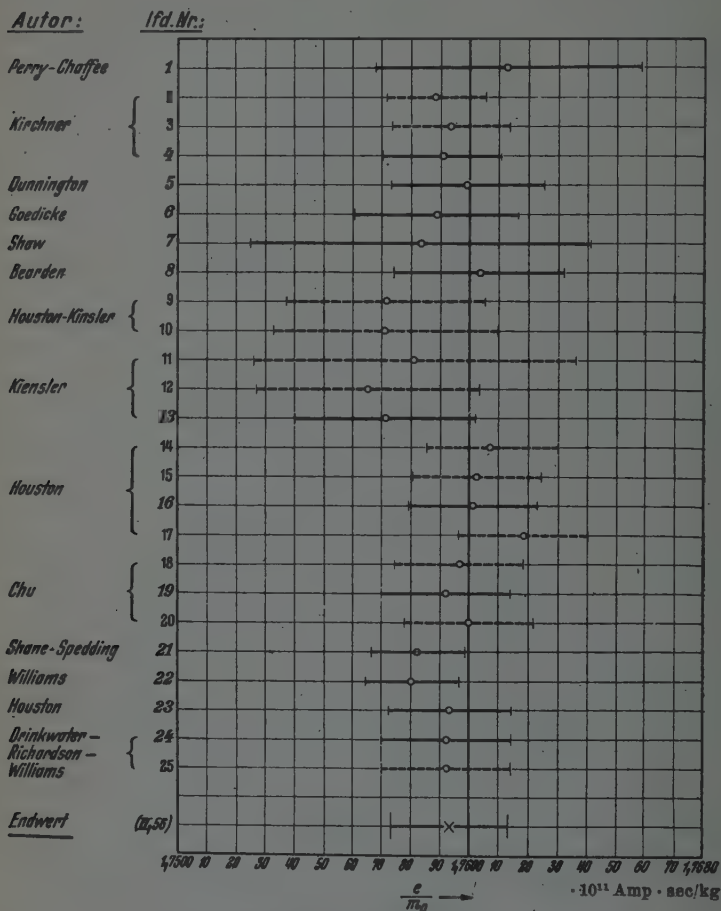


Fig. 1. Zusammenstellung der experimentell bestimmten e/m_0 -Werte.

gesuchte endgültige e/m_0 -Wert in $10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg}$ zwischen $1,759_0$ und $1,759_5$ liegen muß. Die Angabe der letzten Stelle unterliegt dabei einer gewissen Willkür und soll deshalb auch tiefgestellt werden. Eine direkte arithmetische Mittelwertbildung ohne Rücksicht auf die verschiedenen Fehlergrenzen ergibt für die 13 verschiedenen, in der Tabelle 3 aufgeführten

Tabelle 3. Für die spezifische Elektronenladung e/m_0 bestimmte Werte.

Lfd. Nr.	Author	Jahr	$e/m_0 \cdot 10^{-11}$ [Amp. sec/kg]	$e/m_0 \cdot 10^{-11}$ [in ² /Volt · sec ²]	Bemerkungen
1	Perry-Chaffee	1930	$1,7613_0 \pm 0,0045$	$1,7618_0 \pm 0,0040$	Methode nach Des Condres
2	Kirchner	1931	$1,7588_0 \pm 0,0017$	$1,7593_0 \pm 0,0012$	" "
3	"	1932	$1,7593_0 \pm 0,0020$	$1,7598_0 \pm 0,0015$	" "
4	"		$1,7590_0 \pm 0,0020$	$1,7595_0 \pm 0,0015$	" " (Mittelwert aus 2 und 3)
5	Dunnington	1937	$1,7599_2 \pm 0,0026$	$1,7604_0 \pm 0,0021$	" " Lawrence
6	Goedicke	1938	$1,7588_0 \pm 0,0028$	$1,7594_0 \pm 0,0024$	Methode nach Busch
7	Shaw	1938	$1,7583_2 \pm 0,0058$	$1,7588_0 \pm 0,0053$	Gekreuztes elektr. u. magn. Feld
8	Bearden	1938	$1,7603_0 \pm 0,0029$	$1,7608_0 \pm 0,0024$	Brechzahl im Röntgenwellenlängengebiet
9	Houston-Kinsler	1934	$1,7571_4 \pm 0,0034$	$1,7576_0 \pm 0,0030$	Zeeman-Effekt (Cd)
10	"	1934	$1,7570_0 \pm 0,0038$	$1,7576_0 \pm 0,0033$	(Zn)
11	Kinsler	1934	$1,7581_2 \pm 0,0055$	$1,7586_0 \pm 0,0051$	(Ne)
12	Houston-Kinsler	1934	$1,7565_2 \pm 0,0038$	$1,7570_0 \pm 0,0033$	(He)
13	"	1934	$1,7571_2 \pm 0,0031$	$1,7576_0 \pm 0,0026$	(Mittelwert)
14	Houston	1927	$1,7607_0 \pm 0,0022$	$1,7612_0 \pm 0,0027$	$R_{He^+} - R_H$
15	"		$1,7602_0 \pm 0,0022$	$1,7607_0 \pm 0,0027$	(Korr. von Gibbs-Williams, 1934)
16	"		$1,7601_0 \pm 0,0022$	$1,7606_0 \pm 0,0027$	(Korr. von Williams, 1938)
17	"		$1,7618_0 \pm 0,0022$	$1,7623_0 \pm 0,0027$	(Korr. von Birge, 1941)
18	Chu	1939	$1,7596_0 \pm 0,0022$	$1,7602_0 \pm 0,0027$	R_{He^+} (mit R_H von Houston, 1927)
19	"		$1,7592_2 \pm 0,0022$	$1,7597_3 \pm 0,0027$	R_{He^+} (mit R_H von Houston, korr. von Gibbs-Williams, 1934)
20	"		$1,7600_1 \pm 0,0022$	$1,7605_2 \pm 0,0027$	R_{He^+} (mit R_H von Houston, korr. von Birge, 1941)
21	Shane-Spedding	1935	$1,7582_5 \pm 0,0016$	$1,7587_0 \pm 0,0021$	$\tilde{\nu}_D - \tilde{\nu}_H$ (mit $\tilde{\nu}_H$ von Houston, korr. auf Vak. v. Williams, Birge, Dunnington, 1938-39)
22	Williams	1938	$1,7580_0 \pm 0,0016$	$1,7585_0 \pm 0,0021$	$\tilde{\nu}_D - \tilde{\nu}_H$ (mit $\tilde{\nu}_H$ von Houston)
23	Houston	1939	$1,7593_4 \pm 0,0021$	$1,7598_0 \pm 0,0025$	$\tilde{\nu}_D - \tilde{\nu}_H$
24	Drinkwater-Richardson-Williams	1940	$1,7592_4 \pm 0,0022$	$1,7597_0 \pm 0,0027$	$\tilde{\nu}_D$ und $\tilde{\nu}_H$ (Korr. von Birge, 1941)
25	Dieselben		$1,7592_4 \pm 0,0022$	$1,7597_0 \pm 0,0027$	$\tilde{\nu}_D$ und $\tilde{\nu}_H$

e/m_0 -Bestimmungen (lfd. Nr. 1, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 16, 19, 21, 22, 23, 24) den Zahlenwert 1,759₂. Dabei sind jedoch die unter diesem arithmetischen Mittelwert liegenden Ergebnisse gegenüber den höher liegenden sicher etwas überbewertet worden, wie eine Betrachtung der Fehlerbalkenverteilung zeigt. Es erscheint daher als derzeitige Angabe für die spezifische Elektronenladung der Wert angemessen

$$e/m_0 = (1,759_3 \pm 0,002) \cdot 10^{11} \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg} \quad (\text{II}, 56)$$

$$\text{bzw.} \quad = (1,759_8 \pm 0,002) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2. \quad (\text{II}, 56a)$$

Die Fehlergrenze ist auch aus der Fehlerbalkenverteilung der Fig. 1 abgeschätzt worden.

Weiter zeigen die Tabelle 8 und die Fig. 1, daß sowohl die Ergebnisse der e/m_0 -Bestimmungen an freien Elektronen (lfd. Nr. 1 bis 8), wie die an im Atom gebundenen Elektronen gewonnenen Resultate (lfd. Nr. 9 bis 25)¹⁾ ziemlich symmetrisch zu beiden Seiten des oben angegebenen Mittelwertes liegen. Lediglich die Zeeman-Effektmessungen haben zu kleineren e/m_0 -Werten geführt. Jedenfalls geben die vorliegenden experimentiellen Daten keine Veranlassung, zwei außerhalb ihrer Fehlergrenzen verschiedene e/m_0 -Werte anzunehmen, wie es früher auf Grund von Zahlenangaben, die durch die Methoden der kleinsten Quadrate gewonnen wurden, geschehen ist²⁾.

Aus den spektroskopischen e/m_0 -Bestimmungen kann man direkt einen Zahlenwert für das Molekulargewicht des Elektrons angeben. Hierzu sollen nur die jeweils neuesten Messungen herangezogen werden: einmal der Chusche Wert (Nr. 19) aus der Differenz der Rydberg-Zahlen für leichten Wasserstoff und das einfach ionisierte Helium, dann der nach der neuen Houstonschen Auswertungsmethode aus der Wellenzahldifferenz des roten Dubletts für leichten und schweren Wasserstoff gewonnene Wert (Nr. 23), und schließlich das Ergebnis (Nr. 24) von Drinkwater, Richardson und Williams, welches mit der Anordnung und dem neuen Auswertverfahren von Williams erhalten wurde. Da diese drei Messungen etwa gleiche Genauigkeit aufweisen, kann man direkt den arithmetischen Mittelwert als heutigen Endwert für (M_e) ansetzen.

Nach Beziehung (I, 11) und (I, 13a) erhält man für die Elektronenmasse in kg

$$m_0 = \frac{(M_e)}{N_L}. \quad (\text{II}, 57)$$

¹⁾ Hierzu sei noch bemerkt, daß die Beardenschen Messungen (Nr. 8) auch unter diese Gruppe gezählt werden können; siehe z. B.: F. Kirchner, Erg. exakt. Naturwiss. 18, 56, 1939. — ²⁾ Siehe hierzu die voraufgehende Veröffentlichung von U. Stille, ZS. f. Phys. 120, 703, 1943.

Tabelle 4. Elektronenmasse m_0 aus dem gemessenen Molekulargewicht (M_e):

Lfd. Nr.	Autor	$(M_e) \cdot 10^4$	$1/(M_e)$	$m_0 = \frac{(M_e)}{N_L}$ [10^{-31} kg]	$\frac{(M_p)}{(M_e)}$	$\frac{(M_H)}{(M_e)}$
19	Chu (1939)	$5,4865_4$ $\pm 0,0066$	$1822,6_4$ $\pm 2,2$	$9,107_3$ $\pm 0,018^1)$	$1836,4_6$ $\pm 2,2$	$1837,4_6$ $\pm 2,2$
23	Houston (1939)....	$5,4861_6$ $\pm 0,0061$	$1822,7_7$ $\pm 2,0$	$9,106_7$ $\pm 0,017^2)$	$1836,5_9$ $\pm 2,1$	$1837,5_9$ $\pm 2,1$
24	Drinkwater, Richardson u. Williams (1940)	$5,4864_6$ $\pm 0,0066$	$1822,6_7$ $\pm 2,2$	$9,107_9$ $\pm 0,018^1)$	$1836,4_8$ $\pm 2,2$	$1837,5_1$ $\pm 2,2$
	Mittel	$5,486_4$ $\pm 0,006$	$1822,6_9$ $\pm 2,0$	$9,107_1$ $\pm 0,018^1)$	$1836,5_1$ $\pm 2,1$	$1837,5_1$ $\pm 2,1$

Tabelle 5. Elektronenmasse m_0 und Molekulargewicht (M_e) aus e und e/m_0 .

$e \cdot 10^{19}$ [Amp · sec]	$m_0 \cdot 10^{31}$ [kg]	$(M_e) \cdot 10^4$ $= m_0 \cdot N_L \cdot 10^4$	$1/(M_e)$	$\frac{(M_p)}{(M_e)}$	$\frac{(M_H)}{(M_e)}$
Öltröpfchenmethode:					
1,6019 ₄ (Laby-Hopper)	$9,105_6$ $\pm 0,040$	$5,485_5$ $\pm 0,028^3)$	$1823,0_0$ $\pm 9,5^4)$	$1836,8_2$ $\pm 9,6^5)$	$1837,8_3$ $\pm 9,6^5)$
1,6014 ₈ (Mittelwert)	$9,102_9$ $\pm 0,040$	$5,483_9$ $\pm 0,028^3)$	$1823,5_2$ $\pm 9,5^4)$	$1837,3_5$ $\pm 9,6^5)$	$1838,3_5$ $\pm 9,6^5)$
$e = F/N_L$:					
1,6021 ₈	$9,106_9$ $\pm 0,018^6)$	$5,486_3$ $\pm 0,007$ $(= \frac{F}{e/m_0} !)$	$1822,7_3$ $\pm 2,2$	$1836,5_4$ $\pm 2,2$	$1837,5_4$ $\pm 2,2$

¹⁾ Unter zusätzlicher Berücksichtigung der von Miller und Du Mond für eventuelle Unvollkommenheiten im Kristallgitteraufbau bei der N_L -Bestimmung zu 0,4⁰/₁₀₀ abgeschätzten möglichen Unsicherheit (siehe Abschnitt I, 4) wäre hier als Fehlergrenze zu schreiben: $\pm 0,022$.

²⁾ Bei Einbeziehung der in der Fußnote 1 für N_L genannten 0,4⁰/₁₀₀ wäre hier als Fehlergrenze zu schreiben: $\pm 0,021$.

³⁾ Bei Einbeziehung der in der Fußnote 1 für N_L genannten 0,4⁰/₁₀₀ wäre hier als Fehlergrenze zu schreiben: $\pm 0,031$.

⁴⁾ Bei Einbeziehung der in der Fußnote 1 für N_L genannten 0,4⁰/₁₀₀ wäre hier als Fehlergrenze zu schreiben: $\pm 10,2$.

⁵⁾ Bei Einbeziehung der in der Fußnote 1 für N_L genannten 0,4⁰/₁₀₀ wäre hier als Fehlergrenze zu schreiben: $\pm 10,3$.

⁶⁾ Bei Einbeziehung der in der Fußnote 1 für N_L genannten 0,4⁰/₁₀₀ wäre hier als Fehlergrenze zu schreiben: $\pm 0,022$.

Die einzelnen Zahlenwerte sind in der Tabelle 4 zusammengestellt. Diese Tabelle enthält ferner das reziproke Molekulargewicht (in der physikalischen Atomgewichtsskala!) des Elektrons, sowie die Verhältniszahlen des Molekulargewichts des Protons bzw. des Wasserstoffatoms zu dem des Elektrons $(M_p)/(M_e)$ bzw. $(M_H)/(M_e)$; dabei wurden die Werte

$$(M_p) = 1,00758 \pm 0,00002,$$

$$(M_H) = 1,00813 \pm 0,00002$$

benutzt.

Weiter gewinnt man noch Zahlenwerte für die Masse des Elektrons, indem man sich nicht auf die e/m_0 -Bestimmungen, die aus der gemessenen Differenz von Rydberg-Zahlen direkt einen (M_e) -Wert liefern, beschränkt, sondern sämtliche e/m_0 -Bestimmungen heranzieht und diese mit den e -Bestimmungen kombiniert. Es ergibt sich so

$$m_0 = \frac{e}{e/m_0}. \quad (\text{II, 58})$$

Dabei ist in dieser Beziehung für e/m_0 der Endwert (II, 56) einzusetzen. Für e stehen die Werte aus den Öltröpfchenbestimmungen und aus F und N_L zur Verfügung. Die entsprechenden Zahlenwerte sind in Tabelle 5 zusammengefaßt worden.

Die in der letzten Reihe dieser Tabelle eingetragenen Zahlenwerte sind in vorzüglicher Übereinstimmung mit denen der Tabelle 4, wie es auch nach dem oben über die e/m_0 -Bestimmungen an freien und gebundenen Elektronen Gesagten zu erwarten ist. Aber auch die mit den Öltröpfchen- e berechneten Werte sind innerhalb der Fehlergrenzen mit den übrigen gut verträglich. Schließlich sollen in diesem Zusammenhang noch die Zahlenwerte für die Masse des Wasserstoffatoms, sowie die Masse und spezifische Ladung des Protons angegeben werden:

$$m_H = \frac{(M_H)}{N_L} = (1,6734_4 \pm 0,0014) \cdot 10^{-27} \text{ kg } ^1), \quad (\text{II, 59})$$

$$m_p = \frac{(M_p)}{N_L} = (1,6725_3 \pm 0,0014) \cdot 10^{-27} \text{ kg } ^1), \quad (\text{II, 60})$$

$$e/m_p = \frac{F}{(M_p)} = (9,5794_0 \pm 0,0008) \cdot 10^7 \text{ Amp} \cdot \text{sec/kg}. \quad (\text{II, 61})$$

¹⁾ Unter zusätzlicher Berücksichtigung der von Miller und Du Mond für eventuelle Unvollkommenheiten im Kristallgitteraufbau bei der N_L -Bestimmung zu 0,4°/∞ abgeschätzten möglichen Unsicherheit (siehe Abschnitt I, 4) wäre hier als Fehlergrenze zu schreiben: $\pm 0,0020$.

3. Das Plancksche Wirkungsquantum h aus den h/e -Bestimmungen.

Alle Messungen, die zur Bestimmung des Planckschen Wirkungsquantums durchgeführt worden sind, haben eines gemeinsam: sie liefern die Größe h immer nur — direkt oder indirekt — in Verbindung mit der Elementarladung e . Die Potenz α , mit der e in der jeweils gemessenen Größe $C \cdot h \cdot e^\alpha$ auftritt, hängt von der im einzelnen bei der Messung angewandten Methode ab.

Es sind seit der Aufstellung der Quantenhypothese durch Planck zur experimentellen Bestimmung der für die gesamte Atomphysik und Quantenmechanik charakteristischen Naturkonstanten h eine ganze Reihe von Gesetzmäßigkeiten herangezogen worden — die lichtelektrische Gleichung im weitesten Sinne (lichtelektrischer Effekt, Ionisationsgrenzen, Anregungsspannungen im Ultraviolett und Röntgenwellenlängengebiet, kurzwellige Grenze des Röntgenkontinuums), die de Brogliesche Wellenlängenbeziehung, das Stefan-Boltzmannsche Strahlungsgesetz, die Plancksche Strahlungsformel, das Wiensche Verschiebungsgesetz u. a. Diese verschiedenen Untersuchungsmethoden sind schon in einer Reihe von Artikeln und Berichten ¹⁾ zusammenfassend behandelt worden. Hier sollen nur die Ergebnisse der h/e -Bestimmungen aus der kurzwelligen Grenze des Röntgenkontinuums zusammengestellt werden, da diese Methode die zuverlässigsten Resultate für die Festlegung eines Zahlenwertes für das Plancksche Wirkungsquantum liefert. Bezüglich aller Einzelheiten über die verschiedenen benutzten experimentellen Anordnungen und Auswertverfahren sei auf die Originalarbeiten bzw. die schon zitierten zusammenfassenden Darstellungen verwiesen.

Aus der lichtelektrischen Gleichung

$$h \cdot \nu = e \cdot U$$

folgt

$$h/e = \frac{U}{\nu} = \frac{\lambda \cdot U}{c_0}. \quad (\text{II, 62})$$

Eine h/e -Bestimmung aus der kurzwelligen Grenze des kontinuierlichen Röntgenspektrums erfordert also die Messung der Grenzwellenlänge λ , die von einer mit der Spannung U betriebenen Röntgenröhre gerade noch ausgesandt wird, sowie die Kenntnis der Lichtgeschwindigkeit c_0 .

¹⁾ Siehe hierzu die in einer früheren Veröffentlichung (U. Stille, ZS. f. Phys. 120, 703, 1943) zitierten zusammenfassenden Berichte über die Atomkonstanten, sowie R. Ladenburg, Handb. d. Phys., Bd. XXIII, 1. Teil, 2. Aufl. Berlin, Springer, 1933, S. 1ff., und H. T. Wensel, Bur. of Stand. Journ. of Res. 22, 375, 1939.

Nach den schon bei der Besprechung der spezifischen Molekülzahl N_L genannten Untersuchungen sind heute der Umrechnungsfaktor $k_\lambda = 1,00203 \cdot 10^{-13}$ von der Siegbahnschen Röntgenwellenlängenskala (X.-E.) auf die absolute Längenskala (m) und damit die Röntgenwellenlängen in der absoluten Längenskala, sowie die für Messungen im Röntgenwellenlängengebiet wichtige Gitterkonstante des Kalkspats $d_{\text{CaCO}_3} = 9,0356 \cdot 10^{-10}$ m als mit ausreichender Genauigkeit bekannt anzusehen. Somit können die Messungen der kurzwelligen Grenze im Röntgenkontinuum direkt entsprechend Gleichung (II, 62) ausgewertet werden. Je nachdem die einzelnen Autoren die Wellenlängen der in der ersten Ordnung des Kristallspektrometers gemessenen Grenze oder die zugehörigen Braggschen Reflexionswinkel ϑ (im Kalkspatspektrometer) bzw. φ (im Steinsalzspektrometer) angegeben haben, ist für die Berechnung von h/e zu schreiben

$$h/e = \frac{U \cdot \lambda}{c_0} \quad (\text{II, 62a})$$

bzw.

$$= k_\lambda \frac{U \cdot \lambda'}{c_0}, \quad (\text{II, 62'a})$$

$$h/e = \frac{U \cdot 0,999865 \cdot 2 d_{\text{CaCO}_3} \cdot \sin \vartheta}{c_0} \quad (\text{II, 62b})$$

bzw.

$$= k_\lambda \frac{U \cdot 0,999865 \cdot 2 d'_{\text{CaCO}_3} \cdot \sin \vartheta}{c_0}, \quad (\text{II, 62'b})$$

$$h/e = \frac{U \cdot 2 d_{\text{NaCl}} \cdot \sin \varphi}{c_0} \quad (\text{II, 62c})$$

bzw.

$$= k_\lambda \frac{U \cdot 2 d'_{\text{NaCl}} \cdot \sin \varphi}{c_0}. \quad (\text{II, 62'c})$$

Dabei sind die ungestrichenen Größen in der absoluten Längenskala (m), die gestrichenen in der Siegbahnschen Wellenlängenskala (X.-E.) einzusetzen. Der in Beziehung (II, 62b) auftretende Faktor 0,999865¹⁾ berücksichtigt den Unterschied zwischen der „wahren“ Gitterkonstanten d_{CaCO_3} des Kalkspats und der „effektiven“ $d_{\text{CaCO}_3 \text{ eff.}}$, die in die vereinfachte Braggsche Beziehung zum Anschluß an die früher fast ausschließlich benutzte Siegbahnsche Wellenlängenskala einzusetzen ist.

Da der Zusammenhang zwischen Röhrenspannung U und Röntgenwellenlängen λ an der Grenze untersucht werden soll, sind die Messungen

¹⁾ Dieser Korrektionsfaktor rührt von der bei der Reflexion der Röntgenstrahlen am Kristall gleichzeitig auftretenden Brechung her und ergibt sich aus der Brechzahl $n = 1 - \delta$ des Kalkspats für die Röntgenwellenlängen.

grundsätzlich auf zwei verschiedene Weisen durchzuführen: einmal kann man für eine festgehaltene Spannung U die Grenzwellenlänge λ bestimmen, und zum anderen kann für eine bestimmte und im Spektrometer fest eingestellte Wellenlänge die zugehörige Grenzspannung ermittelt werden. Die letztere, als Isochromaten-Methode bezeichnete Art des Messens ist in der Mehrzahl der Fälle angewandt worden. In jedem Falle wird bei den h/e -Bestimmungen aus der kurzwelligen Grenze des Röntgenkontinuums die Größe $U \cdot \sin \vartheta$ bzw. $U \cdot \sin \varphi$ in Volt gemessen¹⁾.

Die einzelnen Autoren haben ihre Meßergebnisse durchweg auf einen h/e -Wert in absoluten elektrostatischen Einheiten umgerechnet und dabei die jeweils gerade üblichen Umrechnungsfaktoren benutzt. Aus den in den Originalarbeiten mitgeteilten Grenzspannungen U und Grenzwellenlängen λ oder Grenzreflexionswinkeln ϑ bzw. φ sind hier nach den Beziehungen (II, 62a bis c) die zugehörigen h/e -Werte berechnet und in der Tabelle 6 zusammengestellt worden. Für die in diese Beziehungen weiter eingehenden Konstanten und Kristallgrößen wurden einheitlich die schon im Teil I genannten Zahlenwerte benutzt:

$$c_0 = (2,99777 \pm 0,00020) \cdot 10^8 \text{ m/sec,} \quad (\text{I, 3})$$

$$k_\lambda = (1,00203 \pm 0,00003) \cdot 10^{-13}, \quad (\text{I, 18})$$

$$d_{\text{CaCO}_3} = (3,03566 \pm 0,00010) \cdot 10^{-10} \text{ m,} \quad (\text{I, 19b})$$

$$d_{\text{NaCl}} = 2,81400 \cdot 10^3 \text{ X.-E.} \quad (\text{I, 17a})$$

In der letzten Spalte der Tabelle 6 sind noch die jeweils entsprechenden Zahlenwerte für $U \cdot \sin \vartheta$ (bezogen auf ein Kalkspatspektrometer!) angegeben worden. Im einzelnen ist zu den in Tabelle 6 aufgeführten Ergebnissen noch folgendes zu bemerken:

Die Messungen von Wagner²⁾ besitzen heute nur noch historisches Interesse. Der unter Nr. 1 angegebene Wert ist nach Beziehung (II, 62'a) berechnet worden; nach Wagners Ansicht ist sein Resultat auf etwa $\pm 2\%$ sicher.

Der Wert 2a entspricht dem von Duane, Palmer und Yeh³⁾ veröffentlichten Ergebnis, während der Wert 2b eine Korrektur von -3 Volt in der gemessenen Röhrenspannung U wegen des Spannungsabfalles über

¹⁾ Dies gilt auch für diejenigen Arbeiten, in denen die Grenzwellenlänge selbst angegeben ist und die entsprechend nach Beziehung (II, 62a) zu einem h/e -Wert führen, da immer das Spektrometer auf die benutzte Grenze im Röntgenkontinuum eingestellt sein muß. Der zugehörige Reflexionswinkel ergibt dann entweder durch direkte Eichung oder über die Gitterkonstante des Spektrometerkristalls die entsprechende Wellenlänge. — ²⁾ E. Wagner, Phys. ZS. **21**, 621, 1920. — ³⁾ W. Duane, H. H. Palmer u. Chi-Sun Yeh, Journ. Opt. Soc. Amer. **5**, 376, 1921.

dem Glühdraht des Röntgenrohres enthält¹⁾. Diese Werte sind mit Beziehung (II, 62b) gewonnen worden. Die Fehlergrenze von $0,55^0_{/00}$ ergibt sich aus der von den Autoren zu $0,45^0_{/00}$ für $U \cdot \sin \vartheta$ mitgeteilten und den oben für d_{CaCO_3} und c_0 angegebenen Fehlergrenzen.

Der Wert Nr. 3 folgt aus den von Feder²⁾ veröffentlichten Daten unter Benutzung von Beziehung (II, 62'c). Die Fehlergrenze von $0,56^0_{/00}$ entsteht aus der von Feder für $U \cdot \sin \varphi$ zu $0,46^0_{/00}$ angegebenen und denen für c_0 und k_1 .

Tabelle 6. Aus der kurzwelligen Grenze des Röntgenkontinuums bestimmte h/e -Werte.

Lfd. Nr.	Autor	Jahr	$h/e \cdot 10^{15}$ [Volt · sec]	$\Delta(h/e) \cdot 10^{15}$ [Volt · sec]	$U \cdot \sin \vartheta$ [Volt]
1	Wagner	1920	4,1138 ₂	$\pm 0,0082$	2031,5 ₁
2a	Duane-Palmer-Yeh	1921	4,1308 ₄	$\pm 0,0023$	2039,9 ₃
2b	„ (Glühdrahtkor.) ...		4,1303 ₄		2039,6 ₇
3	Feder	1929	4,1230 ₃	$\pm 0,0023$	2036,0 ₆
4a	Kirkpatrick-Ross	1934	4,1214 ₉	$\pm 0,0021$	2035,3 ₀
4b	„ (Eintrittsarbeitskor.)		4,1206 ₅		2034,8 ₈
5	Schaitberger	1935	4,1236 ₀	$\pm 0,0017$	2036,3 ₄
6a	Du Mond-Bollman	1937	4,1248 ₅	$\pm 0,0036$	2036,9 ₆
6b	„ (Austrittsarbeitskor.)		4,1239 ₂		2036,5 ₀
7	Ohlin	1940	4,1311 ₆	$\pm 0,0026$	2040,0 ₇
8a	Bearden, kurzw. Grenze-Au	1941	4,1271 ₀	} vorläufige Meß- ergebnisse	2038,0 ₇
8b	„ „ „ Cu	1941	4,1286 ₀		2038,8 ₁
8c	„ „ „ Anregung Ni- $K_{\alpha 1}$	1941	4,1333 ₉		2041,1 ₈
8d	„ „ „ Cu- $K_{\alpha 1}$	1941	4,1321 ₉		2040,5 ₈
8e	„ „ „ W- $L_{\alpha 1}$	1941	4,1274 ₀		2038,2 ₂
8f	„ „ „ Zn- $K_{\alpha 1}$	1941	4,1280 ₀		2038,5 ₁
	„ „ „ Ga- $K_{\alpha 1}$				

Unter Nr. 4 sind wieder zwei Werte eingetragen worden, die nach Beziehung (II, 62b) berechnet wurden: Nr. 4a entspricht den von Kirkpatrick und Ross³⁾ mitgeteilten Daten. Bei dem Wert 4b ist die von diesen Autoren an der gemessenen Spannung U bezüglich der Eintrittsarbeit der Elektronen in die Antikathode vorgenommene Korrektur von +4,5 Volt wieder rückgängig gemacht worden mit Rücksicht auf die Ergebnisse der Untersuchungen von Ohlin⁴⁾. Kirkpatrick und Ross geben einen wahrscheinlichen Fehler für U und $\sin \vartheta$ bzw. für das gemessene Produkt $U \cdot \sin \vartheta$ an. Multipliziert man diesen mit dem Faktor 4 und addiert zu dem so erhaltenen Zahlenwert noch die Fehlergrenzen für d_{CaCO_3} ,

¹⁾ Siehe hierzu P. Kirkpatrick u. P. A. Ross, Phys. Rev. 45, 454, 1934.

— ²⁾ H. Feder, Ann. d. Phys. (V) 1, 497, 1929. — ³⁾ P. Kirkpatrick u. P. A. Ross, l. c. — ⁴⁾ P. Ohlin, Dissertation. Uppsala, Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B., 1941, S. 58ff.

und c_0 , so ergibt sich die zu 0,50⁰/₀₀ abgeschätzte Fehlergrenze für die in der Tabelle 6 angegebenen h/e -Werte.

Schaitbergers ¹⁾ Meßergebnisse führen unter Benutzung der Beziehung (II, 62' a) zu dem unter Nr. 5 aufgeführten h/e -Wert. Die Fehlergrenze von 0,42⁰/₀₀ ergibt sich aus der von Schaitberger für U zu 0,3⁰/₀₀ mitgeteilten, einer für λ zu 0,02⁰/₀₀ angesetzten und den für c_0 und k_λ oben angegebenen Fehlergrenzen.

Der Wert 6 a ist der aus den von Du Mond und Bollman ²⁾ für U und λ veröffentlichten experimentellen Daten nach Beziehung (II, 62 a) sich ergebende h/e -Wert. Nr. 6 b ist genau so berechnet worden, jedoch ohne die von den Autoren bezüglich der Austrittsarbeit der Elektronen aus der Kathode vorgenommenen Spannungskorrektur von + 4,5 Volt, entsprechend der Arbeit von Ohlin ³⁾. Du Mond und Bollman geben als wahrscheinlichen Fehler für ihr Endergebnis 0,22⁰/₀₀ an. Die Fehlergrenzen für die einzelnen gemessenen Größen und das Auswertverfahren für die Isochromaten sind aus der Originalarbeit nicht eindeutig zu ersehen. Es soll hier daher einfach der vierfache Wert des wahrscheinlichen Fehlers als Fehlergrenze angesetzt werden.

Aus der Elementarladung, der spezifischen Ladung des Elektrons und der Rydberg-Konstanten kann, wie im einzelnen im Teil III besprochen werden wird, gleichfalls ein h/e -Wert berechnet werden. Dieser liegt außerhalb der Fehlergrenzen höher als die bisher angeführten Ergebnisse — und zwar um etwa 2⁰/₀₀. Lediglich die schon älteren Untersuchungen von Duane, Palmer und Yeh — unter Nr. 2 in der Tabelle 6 eingetragen — führten zu einem Zahlenwert für h/e , der etwa in der gleichen Höhe liegt wie der mit der Rydberg-Formel gewonnene. Die Gründe für das Auftreten dieses „hohen“ h/e -Wertes werden sich heute im einzelnen nicht mehr feststellen lassen; nach Ansicht von Kirkpatrick und Ross ⁴⁾ sollte sogar das Ergebnis von Duane, Palmer und Yeh noch wegen einiger Unstimmigkeiten bei der Berücksichtigung der endlichen Spaltbreite korrigiert werden, wodurch sich ein um etwa 2,7⁰/₀₀ niedrigerer Wert ergeben würde.

Dagegen haben die ausführlichen experimentellen Untersuchungen von Ohlin ⁵⁾ eine Deutungsmöglichkeit für die in den früheren Arbeiten

¹⁾ G. Schaitberger, Ann. d. Phys. (V) 24, 84, 1935. — ²⁾ J. W. M. Du Mond u. V. L. Bollman, Phys. Rev. 51, 401, 1937. — ³⁾ Siehe Fußnote 4 auf S. 184. — ⁴⁾ P. Kirkpatrick u. P. A. Ross, l. c. — ⁵⁾ P. Ohlin, Nature 145, 223, 1940; Ark. Mat., Astron. och Fys. 27 B, Nr. 10, 1940; Dissertation. Uppsala, Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B., 1941.

gemessenen „tiefen“ h/e -Werte ergeben. Auf die Messungen von Ohlin, die mit dem Ziel einer Klärung zwischen den „hohen“ und „tiefen“ h/e -Werten mit wesentlich verbesserter Experimentiertechnik unter Ausnutzung moderner Apparat- und Schaltmöglichkeiten angestellt wurden und sich über 6 Jahre erstreckten, muß daher hier etwas näher eingegangen werden¹⁾.

Im Gegensatz zu Kirkpatrick und Ross, die ein Doppelkristallspektrometer zur Erzielung höheren Auflösungsvermögens benutzten, hat Ohlin ein Spektrometer mit einem zylindrisch auf einen Krümmungsradius von etwa 1 m gebogenen Kalkspatkristall und optischer Anordnung auf einem Rowland-Kreis entwickelt. Diese Spektrometeranordnung zeichnet sich durch große Intensität aus und vermeidet Schwierigkeiten und Mehrdeutigkeiten der Meßergebnisse, die durch Reflexion und Brechung an zwei Kristallflächen in die Untersuchungsmethode hineingetragen werden. Um ein besonders gutes Vakuum zu erzielen — es wurden im Betrieb Drucke von $3 \cdot 10^{-6}$ Torr erreicht —, wurden Röntgenrohr, Spektrometer und das benutzte Geiger-Müller-Zählrohr gemeinsam in einer zweckentsprechenden Gußeisenkonstruktion untergebracht. Weiter wurde der optische Aufbau so gewählt, daß mit wenigen, von außen während des Betriebes unter Hochvakuum zu bedienenden Justierungsmöglichkeiten in einfacher Weise die erforderliche Präzision der Wellenlängenfestlegung gewährleistet ist. Die benutzte Röntgenröhre wurde eigens für die vorliegenden Zwecke entwickelt. Die Konstanz der Röhrengleichspannung und Unterdrückung etwaiger Wechselstromkomponenten wurde erstmalig durch eine selbststeuernde Röhrenanordnung in besonders hohem Maße sichergestellt und kontrolliert. Der Einfluß der endlichen Spaltbreite ist sorgfältig diskutiert worden; auf diese Ergebnisse ist bei der Konstruktion der Apparatur und ihrer Bedienung beim Messen Rücksicht genommen worden. Die reflektierte Röntgenstrahlung wurde von einem Geiger-Müller-Zählrohr aufgenommen und mit einem Zählwerk registriert, das über drei parallele Thyatron-Penthoden-Kreise mit dem Zählrohrdraht verbunden war; diese Schaltung bewirkte besonders große Ansprechbarkeit und hohes Auflösungsvermögen. Es wurden Messungen nach der Isochromatenmethode bei vier verschiedenen Röntgenwellenlängen ($\text{Ag}-L_{\alpha_1}$, $\text{Ca}-K_{\alpha_1}$, $\text{Ti}-K_{\alpha_1}$, $\text{Va}-K_{\alpha_1}$) durchgeführt. Das Spektrometer wurde jeweils mit optischen und photographischen Methoden auf die entsprechende Wellenlänge einjustiert. Die Spannung wurde mit einem Potentiometer gemessen; auf die Messung der hierbei

¹⁾ Bezüglich aller weiteren Einzelheiten sei auf Ohlins Dissertation (l. c.) verwiesen, in der alle Punkte eingehendst besprochen worden sind.

benutzten Widerstände und Normalelemente, sowie den Anschluß ihrer Werte an die internationalen elektrischen Einheiten und die Kontrolle ihrer Konstanz wurde gleichfalls besondere Sorgfalt verwandt.

Ohlin erhielt mit dieser Anordnung Isochromaten, die im Gegensatz zu den von anderen Autoren gemessenen an der kurzwelligen Grenze einen vollkommen scharfen Knick aufweisen und somit eine direkte und eindeutige Bestimmung der zu der benutzten Wellenlänge λ gehörigen Grenzspannung U gestatteten.

Weiter untersuchte Ohlin Lage und Gestalt der gemessenen Isochromaten in Abhängigkeit vom Druck im Spektrometer und damit im Röntgenrohr. Dabei zeigte sich einmal, daß mit zunehmendem Druck sich die gemessenen Isochromaten in Richtung kleinerer Spannungen U verschieben. So ergaben z. B. die Messungen für die $\text{Ti}-K_{\alpha_1}$ -Linie bei einem Druck von $80 \cdot 10^{-6}$ Torr eine Abnahme der Grenzspannung um $0,80/_{00}$, und bei einem Druck von $250 \cdot 10^{-6}$ Torr eine Abnahme von $1,30/_{00}$ gegenüber der bei einem Druck von $3 \cdot 10^{-6}$ Torr gemessenen Grenzspannung. Zweitens wich die bei $250 \cdot 10^{-6}$ Torr aufgenommene Isochromate stark von der Linearität ab und zeigte statt des scharfen Knickes an der Stelle der Grenzspannung einen allmählich gegen Null abnehmenden Kurvenverlauf, wie er auch früher von anderen Autoren gemessen war. Beide Effekte sind mit abnehmendem und wieder zunehmendem Druck jeweils in dem genannten Druckbereich beliebig oft reproduzierbar.

Diese Ergebnisse legten nun für die von anderen Autoren gemessenen „tiefen“ h/e -Werte eine experimentelle Erklärungsmöglichkeit nahe: Infolge nicht hinreichend guten Vakuums haben Sekundäreffekte eine zu kleine Grenzspannung vorgetäuscht, die zwangsläufig zu einem zu kleinen h/e -Wert führte; dabei scheint dieser Effekt nach den Ohlinschen Messungen auch die richtige Größenordnung zu liefern. Die restlose Aufklärung für die Tatsache, daß bei Drucken, die über etwa 6 bis $8 \cdot 10^{-5}$ Torr liegen, im Röntgenrohr in merklicher Anzahl Elektronen auftreten, deren Geschwindigkeit größer ist, als es der angelegten Röhrenspannung entspricht, behält sich Ohlin bis zum Abschluß spezieller Untersuchungen vor. Ohlin vermutet, daß es sich bei diesen schnellen Elektronen um Sekundärelektronen handelt, die aus der Kathode oder anderen Metallteilen von positiven Ionen ausgelöst werden, welche ihrerseits bei zunehmendem Gasdruck im Röntgenrohr von den primären Elektronen gebildet wurden. Ohlin hat dementsprechend die experimentelle Verfolgung der Sekundärelektronenemission aus Wolfram durch positive Ionen unter den in seinem Röntgenrohr herrschenden Bedingungen in Angriff genommen. Jedenfalls zeigen die

bisherigen Ergebnisse der Ohlinschen Arbeit, daß die Güte des im Röntgenrohr erzielten Vakuums für die h/e -Bestimmungen aus der kurzwelligen Grenze des Röntgenkontinuums von entscheidender Bedeutung ist.

Ohlin hat sein Endergebnis auch wieder in absoluten elektrostatischen Einheiten angegeben. Die für die vier verschiedenen Röntgenwellenlängen gemessenen Grenzspannungen sind in der Tabelle 9¹⁾ seiner Dissertation zusammengefaßt worden, in der auch die für k_2 , c_0 und pq benutzten Zahlenwerte mitgeteilt sind.

Aus diesen Daten und der ausführlichen Fehlerdiskussion ergibt sich für das Produkt aus Grenzspannung und zugehöriger Wellenlänge nach den Ohlinschen Messungen

$$U \cdot \lambda' = (1,23592_4 \pm 0,00064) \cdot 10^7 \text{ Volt} \cdot (\text{X.-E.}). \quad (\text{II}, 63)$$

Mit Benutzung der hier einheitlich verwendeten und oben schon angegebenen Zahlenwerte für k_2 und c_0 und unter Beachtung ihrer Fehlergrenzen folgt nach Beziehung (II, 62' a)

$$h/e = (4,1311_6 \pm 0,0026) \cdot 10^{-15} \text{ Volt} \cdot \text{sec.} \quad (\text{II}, 64)$$

Dieser h/e -Wert ist unter Nr. 7 in die Tabelle 6 aufgenommen worden.

Weiter haben Bearden und Schwarz²⁾ experimentelle Untersuchungen zur h/e -Bestimmung in Angriff genommen. Bisher sind allerdings nur vorläufige Ergebnisse in einer kurzen Veröffentlichung bekannt geworden. Bearden und Schwarz haben einmal die kurzwellige Grenze des Röntgenkontinuums ausgemessen, das von einer Röntgenröhre mit Gold (Nr. 8a in Tabelle 6) und Kupfer (Nr. 8b) als Antikathode ausgesandt wird. Ferner bestimmten sie die Anregungsspannungen für die Ni- K_{α_1} -, Cu- K_{α_1} -, W- L_{α_1} -, Zn- K_{α_1} - und Ga- K_{α_1} -Linie (Nr. 8c bis 8f). Die bisherigen Resultate sind als h/e -Werte in absoluten elektrostatischen Einheiten ohne weitere Einzelheiten über die Experimentiertechnik und das Auswertverfahren mitgeteilt worden. Es ist aber anzunehmen, daß die Autoren der Berechnung ihrer h/e -Werte die von Bearden in einer kürzlich erschienenen anderen Arbeit³⁾ für k_2 , d_{CaCO_3} und c_0 angegebenen und benutzten Zahlenwerte zugrunde legten und für pq den von Wensel⁴⁾ und Birge⁵⁾ auf Grund der Messungen im National Bureau of Standards vor-

¹⁾ Die benutzten Wellenlängen sind in dieser Tabelle in Siegbahnschen X.-E. und die zugehörigen Grenzspannungen in abs. Volt angegeben worden; diese müssen also zunächst durch Division mit dem von Ohlin benutzten pq -Wert auf die in int. Volt gemessenen zurückgerechnet werden. — ²⁾ J. A. Bearden u. G. Schwarz, Phys. Rev. 59, 934, 1941. — ³⁾ J. A. Bearden, Journ. appl. Phys. 12, 395, 1941. — ⁴⁾ H. T. Wensel, l. c. — ⁵⁾ Siehe die „Anmerkung bei der Korrektur“ in der Arbeit von J. W. Drinkwater, Sir O. Richardson u. W. E. Williams, l. c.

geschlagenen und in Amerika zur Zeit meist benutzten Wert 1,00084 angenommen haben.

Unter dieser Voraussetzung sind die von Bearden und Schwarz mitgeteilten h/e -Werte auf $U \cdot \lambda$ in internationalen Einheiten zurückgerechnet worden, woraus sich dann mit dem hier einheitlich benutzten c_0 -Wert (I, 3) die in Tabelle 6 unter Nr. 8 eingetragenen h/e -Werte ergeben.

Über die Genauigkeit der Messungen finden sich in der kurzen Mitteilung nur folgende Angaben: Für die h/e -Werte 8a und 8b wird ein wahrscheinlicher Fehler von etwa $0,20/_{00}$ angesetzt; den Werten 8c bis 8e wird eine größere Sicherheit zugeschrieben, während die Autoren den Wert 8f als weniger zuverlässig erachten. Dagegen glauben sie, die Differenzen zwischen den einzelnen Ergebnissen als reell ansehen zu müssen und halten entsprechende Abänderungen der einfachen Theorie für erforderlich.

Schließlich teilen noch Du Mond und Mitarbeiter¹⁾ in zwei kurzen Veröffentlichungen mit, daß sie gleichfalls neue h/e -Bestimmungen aus der kurzwelligen Grenze des Röntgenkontinuums durchführen, um eine weitere Klärung für das unterschiedliche Auftreten „hoher“ und „tiefer“ h/e -Werte bei diesen Untersuchungen herbeizuführen. Du Mond und Mitarbeiter arbeiten mit einer 30 kW-Watters-Röntgenröhre, deren intensive Strahlung die Benutzung eines Doppelkristallspektrometers von bisher noch nicht erreichtem Auflösungsvermögen gestattet. Ferner sind die Methoden der Spannungskonstanthaltung und -messung weiter entwickelt worden. Zahlenmäßige Resultate wurden bisher nicht angegeben. Die Autoren teilen jedoch als vorläufiges Ergebnis mit, daß ihre Messungen zu „hohen“ h/e -Werten führen, die mit dem Ohlinschen Wert gut übereinstimmen. Die Untersuchungen ergaben beim näheren Studium der experimentellen Anordnung zwei wesentliche Fehlerquellen, die bei den früheren Arbeiten aufgetreten sein können — einmal die Wirkung von Niederschlägen auf der Antikathode der Röntgenröhre, und zum anderen den Einfluß der verwaschenen Kontinuums Grenze. Bezüglich aller näheren Einzelheiten bleibt eine endgültige und ausführliche Veröffentlichung abzuwarten.

Auf Grund der hier besprochenen und in der Tabelle 6 zusammengefaßten Resultate ergibt sich für die Festlegung eines heute anzunehmenden h/e -Wertes folgendes Bild: Nach den neuen Untersuchungen von Ohlin erheben sich gegen die früher von anderen Autoren durchgeführten Messungen Bedenken, ob nicht durch die vorher unbekannte Fehlerquelle des

¹⁾ J. W. M. Du Mond, H. H. Bailey, W. K. H. Panofsky u. A. E. S. Green, Phys. Rev. **59**, 219, 1941; J. W. M. Du Mond, W. K. H. Panofsky u. A. E. S. Green, ebenda **60**, 163, 1941.

Druckeinflusses auf die Geschwindigkeit der die Röntgenstrahlung erzeugenden Elektronen die „tiefen“ h/e -Werte verursacht worden sind. Wenn auch der Mechanismus für das Auftreten von Elektronen mit höheren Geschwindigkeiten, als sie der angelegten Spannung entsprechen, im Röntgenrohr im einzelnen noch nicht völlig geklärt ist, so steht doch die Tatsache fest, daß solche Elektronen schon bei Drucken unter 10^{-4} Torr in merkbar störender Menge im Röntgenrohr vorhanden sein können. Ob bei der Anordnung von Duane, Palmer und Yeh, mit der ein „hoher“ h/e -Wert gewonnen wurde, die Vakuumbedingungen hinreichend erfüllt waren oder ein anderer Grund für diesen Wert verantwortlich zu machen ist, läßt sich heute an Hand der Originalarbeit nicht mehr entscheiden.

Ferner muß noch darauf hingewiesen werden, daß die von Ohlin angewandte Methode zur Konstanthaltung und Glättung der Spannung die in den vorausgegangenen Untersuchungen hierfür benutzten Verfahren an Sicherheit weit übertrifft. Schließlich ergab die gesamte Durchkonstruktion der Ohlinschen Apparatur, besonders hinsichtlich der vakuumtechnischen Seite, Isochromaten mit so scharfen und eindeutigen Knicken an der Stelle der Grenzspannung, daß diese einwandfrei direkt abgelesen werden konnten. Dieser Umstand machte alle graphischen oder analytischen Auswertverfahren, die infolge der bei anderen Untersuchungen im Bereich der Grenzspannung aufgetretenen asymptotischen Kurvenschwänze erforderlich waren, entbehrlich. Auf alle übrigen Einwände, die gegen diese oder jene Einzelheit der Wellenlängen- oder Spannungsbestimmung in den Untersuchungen Nr. 1 bis 6 schon gelegentlich erhoben worden sind, soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Über die von Du Mond und Mitarbeiter, sowie von Bearden und Schwarz in jüngster Zeit in Angriff genommenen h/e -Bestimmungen sind bisher leider keine endgültigen Ergebnisse oder näheren Einzelheiten über die benutzten Anordnungen bekannt geworden. Immerhin zeigen aber die bislang erschienenen kurzen Veröffentlichungen, daß diese neuesten Experimente zu „hohen“ h/e -Werten führen, die sich in guter Übereinstimmung mit dem Ohlinschen h/e -Wert zu befinden scheinen.

Demnach muß jetzt ein „hoher“ h/e -Wert als experimentelles Ergebnis aus der kurzweiligen Grenze des Röntgenkontinuums als der am zuverlässigsten angesehenen Methode der h/e -Bestimmungen angenommen werden. Da hier zur Bildung irgendwelcher Mittelwerte noch nicht genügend experimentelles Material vorliegt, ist im Augenblick das Ohlinsche Ergebnis als h/e -Wert anzusetzen und zu schreiben:

$$h/e = (4,1311_6 \pm 0,0026) \cdot 10^{-15} \text{ Volt} \cdot \text{sec.} \quad (\text{II, 64})$$

Durch Kombination dieses Wertes mit den Ergebnissen der e -Bestimmungen erhält man dann Zahlenwerte für das Plancksche Wirkungsquantum. Hierfür stehen die e -Werte aus den Messungen nach der Öltröpfchenmethode, sowie der e -Wert aus spezifischer Ionenladung und Molekülzahl zur Verfügung.

Benutzt man das Resultat der Untersuchungen von Laby und Hopper — $e = (1,6024_1 \pm 0,0048) \cdot 10^{-19} \text{ m}^2 \cdot \text{kg/Volt} \cdot \text{sec}^2$ (II, 3b) —, so erhält man

$$h = (6,619_8 \pm 0,024) \cdot 10^{-34} \text{ Gro\ss dyn} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}. \quad (\text{II, 65 a})$$

Mit dem Mittelwert — $e = (1,6019_4 \pm 0,0048) \cdot 10^{-19} \text{ m}^2 \cdot \text{kg/Volt} \cdot \text{sec}^2$ (II, 5a) — aus den Ergebnissen von Millikan und Laby und Hopper folgt

$$h = (6,617_9 \pm 0,024) \cdot 10^{-34} \text{ Gro\ss dyn} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}. \quad (\text{II, 65 b})$$

Einsetzen des aus der spezifischen Molekülzahl N_L und der spezifischen Ionenladung F abgeleiteten und als wesentlich sicherer bestimmt anzusehenden Wertes $e = (1,6021_8 \pm 0,0014) \cdot 10^{-19} \text{ Amp} \cdot \text{sec}$ (II, 7) ergibt

$$h = (6,618_9 \pm 0,010) \cdot 10^{-34} \text{ Watt} \cdot \text{sec}^2 \text{ } ^1). \quad (\text{II, 66})$$

Rechnet man diesen in elektrischen Einheiten gemessenen Zahlenwert auf mechanische Einheiten durch Multiplikation mit pq^2 (I, 1d) um, so ist für das Plancksche Wirkungsquantum zu schreiben:

$$h = (6,620_8 \pm 0,012) \cdot 10^{-34} \text{ Gro\ss dyn} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^2 \text{ } ^2). \quad (\text{II, 66 a})$$

III. Die Atomkonstanten im Zusammenhang mit der Rydberg-Formel und der Feinstrukturkonstanten.

Bei der vorausgehenden ³⁾ Zusammenstellung der allgemeinen Gesichtspunkte, nach denen die vorliegende zahlenmäßige Diskussion der Atomkonstanten durchgeführt wurde, ist schon auf die Bedeutung der Rydberg-Formel als Prüfstein für die gegenseitige Konsistenz der für die atomaren Konstanten gemessenen Zahlenwerte hingewiesen worden.

Die früher beobachteten „tiefen“ h/e -Werte erwiesen sich zusammen mit den für e , e/m_0 und R_∞ vorliegenden Zahlenwerten als mit der Rydberg-Formel unverträglich. Der Beurteilung dieses zahlenmäßigen Vergleichs

¹⁾ Unter zusätzlicher Berücksichtigung der von Miller und Du Mond für eventuelle Unvollkommenheiten im Kristallgitteraufbau bei der N_L -Bestimmung zu $0,4\text{‰}$ abgeschätzten möglichen Unsicherheit (siehe Abschnitt I, 4) wäre hier als Fehlergrenze zu schreiben: $\pm 0,012$. — ²⁾ Bei Einbeziehung der in der Fußnote 1 für N_L genannten $0,4\text{‰}$ wäre hier als Fehlergrenze zu schreiben: $\pm 0,014$. — ³⁾ U. Stille, ZS.f. Phys. 120, 703, 1943.

wurden dabei nach rein mathematischen Methoden der Ausgleichsrechnung gewonnene „beste Wert“ und deren „wahrscheinliche Fehler“ zugrunde gelegt. In Überschätzung der „Objektivität“ solcher Zahlenangaben wurden eventuelle experimentelle Fehlerquellen bei der folgenden Diskussion als äußerst unwahrscheinlich außer acht gelassen und zur Behebung der bestehenden Schwierigkeiten allgemeine Schlüsse auf die Nichtgültigkeit grundlegender und bewährter Gesetzmäßigkeiten als einzig möglicher Ausweg angesehen.

Es soll daher in diesem Teil an Hand der in den vorigen Abschnitten besprochenen und zusammengestellten Zahlenwerte für die atomaren Konstanten der zahlenmäßige Vergleich mit der Rydberg-Konstanten und der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten über die Rydberg-Formel durchgeführt werden. Dabei wird sich ergeben, inwieweit die einzelnen Zahlenwerte ein zusammenpassendes System für die Atomkonstanten bilden.

1. Die Rydberg-Konstante R_∞ .

Mit R_∞ sei in üblicher Schreibweise die allgemeine Rydberg-Zahl — reduziert auf unendliche Kernmasse — bezeichnet und kurz Rydberg-Konstante genannt. Sie ergibt sich als oberer Grenzwert der Rydberg-Zahlen für die einzelnen Atome und ist mit der Rydberg-Zahl R_X eines beliebigen Atoms X der Kernmasse m_X durch die Beziehung verknüpft

$$R_\infty = R_X \cdot \left[1 + \frac{m_0}{m_X} \right] = R_X \cdot \left[1 + \frac{(M_e)}{(M_X)} \right], \quad (\text{III, 1})$$

stellt also die Rydberg-Zahl für ein hypothetisches Atom mit unendlicher Kernmasse dar.

Aus den Präzisionsbestimmungen der roten Dubletts des leichten und schweren Wasserstoffs und des einfach ionisierten Heliums und der Messung ihrer Feinstruktur gewinnt man die Rydberg-Zahlen dieser Elemente. Aus diesen ergeben sich dann gemäß Beziehung (III, 1) Zahlenwerte für die Rydberg-Konstante unter Benutzung der mit hinreichender Genauigkeit bekannten Massen bzw. Molekulargewichte des Elektrons und der entsprechenden Atomkerne.

Die in den schon im Teil II besprochenen Arbeiten von Houston, Chu und Drinkwater, Richardson und Williams für R_H , R_D und R_{He^+} bestimmten Werte sind in der Tabelle 7 unter Nr. 1a, 2a und b und 3a zusammengestellt worden. Die Messungen von Houston und Chu sind einheitlich an die grüne Heliumlinie, deren Wellenlänge von beiden Autoren zu 5015,6750 Å angenommen wird, angeschlossen worden, während Drink-

water, Richardson und Williams die wesentlich besser definierte rote Kadmiumlinie mit $6440,2491 \text{ \AA}$ als Wellenlängennormal benutzt und mit einer evakuierten Anordnung gearbeitet haben; Houston und Chu führten ihre Interferenzaufnahmen in Luft durch. In der Art ihrer Reduktion auf die Vakuumwerte unterscheiden sich die beiden von Chu mitgeteilten Zahlen. Um sein Meßergebnis mit den Resultaten von Houston vergleichen zu können, hat er einmal (Nr. 2a) als Dispersionsformel für die Brechzahl der Luft die auch von Houston angewandte Beziehung von Meggers und Peters¹⁾ benutzt, und zum anderen (Nr. 2b) eine neuere, von Bender²⁾ aufgestellte Formel. Die Houstonschen Ergebnisse sind später von Gibbs und Williams³⁾ korrigiert worden, worauf auch schon in Teil II eingegangen wurde; ferner haben Drinkwater, Richardson und Williams mit der von ihnen als zuverlässiger angesehenen Dispersionsformel von Kösters und Lampe⁴⁾ den von Houston gemessenen R_H -Wert neu berechnet.

Weiter hat Birge⁵⁾ mit einigen Korrekturen eine Neuberechnung sämtlicher Werte für die gemessenen Rydberg-Zahlen vorgenommen und die von ihm berechneten einzelnen Zahlenwerte für R_H , R_D und R_{He^+} in einer kurzen Veröffentlichung ohne nähere Angaben über das Rechenverfahren mitgeteilt. Die korrigierten Werte sind unter Nr. 1b bis d, 2c und 3b gleichfalls in die Tabelle 7 aufgenommen worden.

Aus diesen verschiedenen Rydberg-Zahlen ist nach Beziehung (III, 1) jeweils der Zahlenwert für die Rydberg-Konstante R_∞ berechnet und neben der zugehörigen Rydberg-Zahl in die Tabelle 7 eingetragen worden. Für die einzelnen Molekulargewichte wurden die schon weiter oben genannten Zahlen von Livingston und Bethe⁶⁾ sowie der in der Tabelle 4 angegebene Mittelwert für (M_e) zugrunde gelegt:

$$\left. \begin{aligned} (M_e) &= (5,486_4 \pm 0,006) \cdot 10^{-4}, \\ (M_{H^+}) &= 1,00758 \pm 0,00002, \\ (M_{D^+}) &= 2,01418 \pm 0,00002, \\ (M_{He^{++}}) &= 4,00279 \pm 0,00007. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III}, 2)$$

Die aus den Messungen von Drinkwater, Richardson und Williams folgenden Zahlenwerte für die Rydberg-Konstante R_∞ sind aus den schon

¹⁾ W. F. Meggers u. C. G. Peters, Bull. Bur. of Stand. **14**, 697, 1918. — ²⁾ D. Bender, Phys. Rev. **54**, 179, 1938. — ³⁾ R. C. Williams u. R. C. Gibbs, Phys. Rev. **45**, 491, 1934. — ⁴⁾ M. W. Kösters u. W. Lampe, Phys. ZS. **35**, 223, 1934. — ⁵⁾ Siehe Fußnote 1 auf S. 170. — ⁶⁾ M. S. Livingston u. A. H. Bethe, l. c.

Tabelle 7. Für die Rydberg-Konsta

Lfd. Nr.	Autor	Jahr	R_H [m ⁻¹]	R_∞ [m ⁻¹]	
1a	Houston	1927	10967775,9	10973754,7	
1b	„		10967774,7	10973746,8	
1c	„		10967768,8	10973740,9	
1d	„		10967768,0	10973740,1	
2a	Chu	1939	—	—	
2b	„		—	—	
2c	„		—	—	
3a	Drinkwater-Richardson- Williams	1940	10967758,3	10973730,4	1097
3b	Dieselben		10967758,1	10973730,2	1097

im Teil II dargelegten Gründen als die zur Zeit sichersten anzusehen. Für die überlegene Güte der Versuchsanordnung und des Auswertverfahrens dieser Autoren sprechen außerdem die in der Tabelle 7 zusammengefaßten zahlenmäßigen Ergebnisse. Während die aus den verschiedenen von Houston bzw. Chu gemessenen Rydberg-Zahlen R_H und R_{He^+} abgeleiteten Rydbergkonstanten R_∞ nicht unerhebliche Abweichungen in sich und gegeneinander aufweisen, ergibt sich aus den von Drinkwater, Richardson und Williams *getrennt* bestimmten R_H und R_D der gleiche Zahlenwert für R_∞ . Es sind also bei dieser Sachlage wohl nur die Ergebnisse dieser Autoren für die Festlegung eines derzeitigen R_∞ -Wertes heranzuziehen ¹⁾. Für die Rydberg-Konstante ist demnach zu schreiben

$$R_\infty = 10973730,4 \pm 7,8 \text{ m}^{-1} \text{ } ^2) \quad (\text{III, 3})$$

¹⁾ Wenn man etwa die Messungen von Houston und Chu zur Bildung eines Mittelwertes für R_∞ mit heranziehen wollte, so träte die Schwierigkeit auf, den Ergebnissen dieser Autoren gegenüber den Resultaten von Drinkwater, Richardson und Williams angemessene Gewichte zuteilen zu müssen. In jedem Falle würde sich ein derartiger Mittelwert von dem Zahlenwert (III, 3) für R_∞ nur um wenige $10^{-4} \text{ } _{00}$ unterscheiden. Eine solche Differenz ist zumindest für die Berechnung von h/e und $1/\alpha$ aus der Rydberg-Formel und der Sommerfeldschen Beziehung für die Feinstrukturkonstante völlig bedeutungslos. — ²⁾ Diese Fehlergrenze enthält also nicht etwaige Unsicherheiten in der Festlegung der Wellenlängenskala (Å.-E.) gegenüber der absoluten Längenskala (m) über die rote Kadmiumlinie. Der mittlere Fehler in der Festlegung der roten Kadmiumlinie beträgt nach einer Zusammenstellung der entsprechenden Untersuchungen bei Briggs (Rev. Mod. Phys. 11, 113, 1939) $\pm 0,0012 \text{ Å.-E.}$, d. h. der relative mittlere Fehler etwa $1,9 \cdot 10^{-7}$; durch Multiplikation mit dem Faktor 2,5 erhält man als entsprechende relative Fehlergrenze etwa $4,7 \cdot 10^{-7}$. Bei Einbeziehung dieser Fehlermöglichkeit würde sich die Fehlergrenze für R_∞ auf etwa $\pm 13 \text{ m}^{-1}$ erhöhen.

mmte Werte.

R_∞ [m^{-1}]	R_{He^+} [m^{-1}]	R_∞ [m^{-1}]	Bemerkungen
—	10972240,3	10973744,2	Originalarbeit
—	—	—	Korr. von Gibbs-Williams, 1934
—	10972226,4	10973730,3	Korr. von Drinkwater-Richardson-Williams, 1940
—	10972229,6	10973733,5	Korr. von Birge, 1941
—	10972243,0	10973746,9	Originalarbeit
—	10972218,9	10973722,8	„
—	10972234,3	10973738,2	Korr. von Birge, 1941
3730,4	—	—	Originalarbeit
3730,2	10972226,4	10973730,3	Korr. von Birge, 1941

Die hier angegebene relative Fehlergrenze von etwa $0,000710/_{\infty}$ ist der Mittelwert der relativen Fehlergrenzen, die sich für R_∞ nach der Berechnung aus R_{H} und R_{D} gemäß Beziehung (III, 1) ergeben. Die relative Fehlergrenze des Faktors $[1 + (M_e)/(M_x)]$ beträgt nach (III, 2) $6,1 \cdot 10^{-4} /_{\infty}$ für (M_{H^+}) und $8,0 \cdot 10^{-4} /_{\infty}$ für (M_{D^+}) . Für R_{H} und R_{D} geben Drinkwater, Richardson und Williams einen mittleren relativen Fehler von $1 \cdot 10^{-4} /_{\infty}$ an, dem nach dem früher Gesagten eine relative Fehlergrenze von etwa $2,5 \cdot 10^{-4} /_{\infty}$ zuzuordnen ist.

Nunmehr liegen alle erforderlichen Daten vor, um an Hand der Rydberg-Formel zu prüfen, wie weit die im Teil II festgelegten Zahlenwerte für die atomaren Konstanten ein zueinander passendes Wertesystem bilden. Die Rydberg-Formel, welche eine allgemeine Gesetzmäßigkeit für den Zusammenhang zwischen diesen Atomkonstanten e , e/m_0 , h und der Rydberg-Konstanten darstellt, lautet

$$R_\infty = \frac{m_0 \cdot e^4}{8 \varepsilon_0^2 \cdot c_0 \cdot h^3} \quad (\text{III, 4})$$

und ist nach kurzer Umformung zu schreiben :

$$R_\infty = \frac{c_0^3 \cdot \mu_0^3 \cdot m_0 \cdot e^4}{8 h^3} = \frac{c_0^3 \cdot \mu_0^3}{8} \cdot \frac{e^3}{(h/e)^3 \cdot (e/m_0)} \quad (\text{III, 4a})$$

Dabei sind e in [$\text{Amp} \cdot \text{sec}$], e/m_0 in [$\text{m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2$] und h/e in [$\text{Volt} \cdot \text{sec}$] einzusetzen bzw. e in [$\text{m}^2 \cdot \text{kg}/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2$], e/m_0 in [$\text{Amp} \cdot \text{sec}/\text{kg}$] und h/e in [$\text{Großdyn} \cdot \text{m}/\text{Amp}$]. Man kann also unter Vorgabe der Werte für c_0 , μ_0 , e , e/m_0 und R_∞ einen Zahlenwert für h/e gewinnen:

$$h/e = \left\{ \frac{c_0}{2} \cdot \frac{\mu_0^2 \cdot e^3}{(e/m_0) \cdot R_\infty} \right\}^{1/3} \quad (\text{III, 5})$$

Für die einzelnen Konstanten sind die bisher angegebenen Werte einzusetzen, die hier noch einmal zusammengestellt werden sollen:

$$c_0 = (2,99777 \pm 0,00020) \cdot 10^8 \text{ m/sec}, \quad (\text{I, 3})$$

$$\mu_0 = (1,25602 \pm 0,00002) \cdot 10^{-6} \text{ Volt} \cdot \text{sec/Amp} \cdot \text{m}, \quad (\text{I, 7})$$

$$R_\infty = 10973730,4 \pm 7,8 \text{ m}^{-1}, \quad (\text{III, 3})$$

$$e/m_0 = (1,759_8 \pm 0,002) \cdot 10^{11} \text{ m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2, \quad (\text{II, 56a})$$

$$e = (1,6021_8 \pm 0,0014) \cdot 10^{-19} \text{ Amp} \cdot \text{sec}. \quad (\text{II, 7})$$

Mit diesen Zahlen folgt aus (III, 5) für h/e :

$$h/e = (4,133_4 \pm 0,0043) \cdot 10^{-15} \text{ Volt} \cdot \text{sec}^1). \quad (\text{III, 6})$$

Benutzt man für die Elementarladung die nach der Öltröpfchenmethode gemessenen Werte

$$e = (1,6019_4 \pm 0,0052) \cdot 10^{-19} \text{ Amp} \cdot \text{sec} \quad (\text{Tabelle 2, Nr. 5})$$

$$\text{bzw.} \quad = (1,6014_8 \pm 0,0052) \cdot 10^{-19} \text{ Amp} \cdot \text{sec}, \quad (\text{II, 5b})$$

so folgt aus Beziehung (III, 5)

$$h/e = (4,132_9 \pm 0,011) \cdot 10^{-15} \text{ Volt} \cdot \text{sec} \quad (\text{III, 7a})$$

$$\text{bzw.} \quad = (4,132_1 \pm 0,011) \cdot 10^{-15} \text{ Volt} \cdot \text{sec}. \quad (\text{III, 7b})$$

Ein Vergleich des mit der Rydberg-Formel berechneten Zahlenwertes (III, 6) für h/e mit dem Ohlinschen h/e -Wert

$$h/e = (4,1311_6 \pm 0,0026) \cdot 10^{-15} \text{ Volt} \cdot \text{sec} \quad (\text{II, 64})$$

zeigt, daß beide Werte innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmen. Vergleicht man die mit den Ergebnissen der e -Bestimmungen nach der Öltröpfchenmethode gewonnenen h/e -Werte (III, 7a und b) mit dem Ohlinschen (II, 64), so ist scheinbar die Übereinstimmung eine noch bessere. Es muß aber hier nochmals betont werden, daß zur Zeit diesen e -Bestimmungen noch nicht die Sicherheit zuzuschreiben ist, mit der die Elementarladung aus der spezifischen Ionenladung und Molekülzahl — im wesentlichen also aus den Absolutbestimmungen der Röntgenwellenlängen — bekannt ist. Diese Tatsache war ja auch einer der Gründe, aus denen heraus im Teil II von irgendeiner Mittelwertbildung zwischen den innerhalb ihrer Fehlergrenzen übereinstimmenden Ergebnissen dieser beiden verschiedenen Methoden der e -Bestimmung abgesehen wurde.

¹⁾ Unter zusätzlicher Berücksichtigung der von Miller und Du Mond für eventuelle Unvollkommenheiten im Kristallgitteraufbau bei der N_L -Bestimmung zu $0,4^0_{00}$ abgeschätzten möglichen Unsicherheit (siehe Abschnitt I, 4) wäre hier für h/e zu schreiben: $h/e = (4,133_3 \pm 0,005) \cdot 10^{-15} \text{ Volt} \cdot \text{sec}$.

2. Die Feinstrukturkonstante α .

Als Feinstrukturkonstante α hat Sommerfeld bei der Lösung des relativistischen Kepler-Problems die dimensionslose Zahl

$$\alpha = \frac{1}{2 \epsilon_0 c_0} \cdot \frac{e^2}{h} = \frac{\mu_0 \cdot c_0}{2} \cdot \frac{e^2}{h} \quad (\text{III, 8})$$

eingeführt.

Diese Beziehung bietet eine weitere Möglichkeit, die verschiedenen Werte der Atomkonstanten untereinander zu vergleichen.

Setzt man die im vorigen Abschnitt angegebenen Zahlenwerte (I, 3) für c_0 , (II, 7) für e und den Ohlinschen Wert (II, 64) für h/e in die Gleichung (III, 8) ein, so folgt für die reziproke Feinstrukturkonstante

$$1/\alpha = 136,97_0 \pm 0,22^1). \quad (\text{III, 9})$$

Zweitens soll für h/e der aus der Rydberg-Formel berechnete Wert benutzt werden. Durch Kombination der Rydberg-Formel (III, 4a) mit der Beziehung (III, 8) für die Feinstrukturkonstante erhält man

$$1/\alpha = \left\{ \frac{1}{\mu_0 \cdot R_\infty \cdot e \cdot (e/m_0)} \right\}^{1/2}. \quad (\text{III, 10})$$

Mit den im vorigen Abschnitt zusammengestellten Zahlenwerten ergibt sich nach dieser Beziehung

$$1/\alpha = 137,033 \pm 0,092^2). \quad (\text{III, 11})$$

Die beiden Zahlen (III, 9) und (III, 11) für $1/\alpha$ zeigen wieder dieselbe gute Übereinstimmung wie die beiden Werte (II, 64) und (III, 6) für h/e .

Man gelangt aber noch auf einem anderen Wege zu einem Zahlenwert für $1/\alpha$. Birge³⁾ hatte vor einiger Zeit darauf hingewiesen, daß die vorliegenden experimentellen Daten über die Feinstrukturaufspaltung ($L_{II}-L_{III}$) aus Messungen im Röntgenwellenlängengebiet eine Bestimmung der Feinstrukturkonstanten mit hinreichender Genauigkeit gestatten, und auch selbst vorläufige Werte für $1/\alpha$ angeben. Auf Veranlassung von Oppenheimer haben inzwischen Christy und Keller⁴⁾ auf quantenmechanischer Grundlage eine genauere Neuberechnung durchgeführt. Sie erhalten in

¹⁾ Unter zusätzlicher Berücksichtigung der von Miller und Du Mond für eventuelle Unvollkommenheiten im Kristallgitteraufbau bei der N_L -Bestimmung zu $0,4^0_{00}$ abgeschätzten möglichen Unsicherheit (siehe Abschnitt I, 4) wäre hier als Fehlergrenze zu schreiben: $\pm 0,27$. — ²⁾ Bei Einbeziehung der in der Fußnote 1 für N_L genannten $0,4^0_{00}$ wäre hier für $1/\alpha$ zu schreiben: $1/\alpha = 137,03_3 \pm 0,11$. — ³⁾ R. T. Birge, Phys. Rev. **55**, 1119, 1939. — ⁴⁾ R. F. Christy u. J. M. Keller, ebenda **58**, 658, 1940.

erster Näherung unter Benutzung des für die Elemente der Ordnungs-
zahlen $Z = 60$ bis 92 zur Verfügung stehenden experimentellen Materials
 $1/\alpha = 136,95 \pm 0,13$ ¹⁾. (III, 12)

Dieser Zahlenwert für $1/\alpha$, welcher unabhängig von den beiden vorher
genannten Werten (III, 9) und (III, 11) gewonnen wurde, weist eine sehr
gute Übereinstimmung mit diesen auf. Er macht eine Zahl nahe bei 137
für die reziproke Feinstrukturkonstante sehr wahrscheinlich und ist als ein
weiterer Beweis für die gegenseitige Konstistenz der zur Zeit vertretbaren
Zahlenwerte für die atomaren Konstanten zu werten (Tabelle 8) ²⁾.

Zum Schluß sollen noch einmal die für die einzelnen Hilfsgrößen und
Atomkonstanten aus experimentellen Bestimmungen abgeleiteten Zahlen-
werte zusammengestellt werden. Bei den Angaben für das Plancksche
Wirkungsquantum h bzw. h/e und die Sommerfeldsche Feinstruktur-
konstante α bzw. ihren reziproken Wert sind gleichzeitig in Kursivschrift
diejenigen Zahlen eingefügt worden, die sich für diese Größen aus der
Rydberg-Formel und der Sommerfeldschen Beziehung für die Fein-
strukturkonstante durch Einsetzen der Zahlenwerte für die übrigen hierfür
erforderlichen Konstanten ergeben.

Diese Zusammenstellung liefert also neben den heute als vertretbar
anzusehenden Zahlenwerten für die einzelnen Größen zugleich die zahlen-
mäßigen Unterlagen für die in einer voraufgehenden Veröffentlichung ³⁾
aus allgemeinen Gründen vertretene Ansicht, daß für Versuche, grund-

¹⁾ Christy und Keller haben bei der Abschätzung ihrer Fehlergrenze den
bei dem Auswertverfahren auftretenden statistischen wahrscheinlichen Fehler
mit dem Faktor 3 multipliziert, um die entsprechende Fehlergrenze festzulegen.
Multiplikation mit dem hier für diesen Zweck im allgemeinen benutzten Faktor 4
würde die Fehlergrenze auf $\pm 0,14$ erhöhen. — *Anmerkung bei der Korrektur:*
Inzwischen hat Birge (Phys. Rev. **60**, 766, 1941) aus den Meßergebnissen von
Houston (l. c.) bzw. Chu (l. c.) bei Feinstrukturuntersuchungen an der He-
Linie bei 4686 \AA für $1/\alpha$ die Zahlenwerte $137,038$ bzw. $137,079$ berechnet, die
gleichfalls mit den hier angegebenen Werten (III, 9), (III, 11) und (III, 12) in
bester Übereinstimmung sind. Für den zweiten, von ihm für zuverlässiger
bestimmt gehaltenen Zahlenwert gibt Birge einen wahrscheinlichen Fehler
von $\pm 0,2$ an, dem also vielleicht eine Fehlergrenze von $\pm 0,8$ entsprechen
dürfte. — ²⁾ In den voraufgehenden Tabellen dieser Veröffentlichung sind teilweise
die einzelnen Werte mit mehr Ziffern angegeben worden, als es auf Grund der
zugehörigen Fehlergrenze einer tatsächlichen physikalischen Realität entspricht.
Es geschah dieses entweder, um bei graphischer Darstellung in großem Maßstabe
einen guten Überblick über die einzelnen Meßergebnisse zu bekommen (e/m_0 -
Werte), oder weil die betreffenden Daten noch in späteren Rechnungen bzw.
zum Vergleich mit anderen Zahlenwerten benötigt wurden (e -Werte, h/e -Werte
usw.). In der abschließenden Zusammenstellung dieser Tabelle 8 sind daher
noch einige erforderlich erscheinende Abrundungen vorgenommen worden. —

³⁾ U. Stille, ZS. f. Phys. **120**, 703, 1943.

Tabelle 8. Zusammenstellung der zur Zeit vertretbaren Zahlenwerte für die Atomkonstanten und einige andere wichtige Größen¹⁾.

Umrechnungsfaktoren	$p = 1,00049 \pm 0,00002$	(I, 1a)
	$\eta = 0,9999_0 \pm 0,0001_2$	(I, 1b)
	$k_A = 1,00027_6 \pm 0,00001$	(I, 14)
	$k_L = (1,00203 \pm 0,00008) \cdot 10^{-13}$	(I, 18)
Vakuumlichtgeschwindigkeit	$c_0 = (2,99777 \pm 0,00020) \cdot 10^8$ m/sec	(I, 3)
Induktionskonstante	$\mu_0 = (1,25602 \pm 0,00002) \cdot 10^{-6}$ Volt \cdot sec/Amp \cdot m	(I, 7)
Influenzkonstante	$\epsilon_0 = (8,8594 \pm 0,0014) \cdot 10^{-12}$ Amp \cdot sec/Volt \cdot m	(I, 9)
Spezifische Molekülzahl	$N_L = (6,0243 \pm 0,0048) \cdot 10^{23}$ Kilomol $^{-1}$ (bez. auf die physik., Atomgewichtsskala)	(I, 20)
Spezifische Ionenladung	$F = (9,6520_3 \pm 0,0006) \cdot 10^7$ Amp \cdot sec/Kiloäquivalent (bez. auf die physik. Atomgewichtsskala)	(I, 27')
Elementarladung	$e = (1,6022 \pm 0,0014) \cdot 10^{-19}$ Amp \cdot sec	(II, 7)
Spezifische Elektronenladung	$e/m_0 = (1,759_3 \pm 0,002) \cdot 10^{11}$ Amp \cdot sec/kg	(II, 56)
Plancksches Wirkungsquantum	$h = (6,619 \pm 0,010) \cdot 10^{-34}$ Watt \cdot sec ²	(II, 66)
	$h/e = (6,621 \pm 0,012) \cdot 10^{-34}$ Großdyn \cdot m \cdot sec	(II, 66a)
	$h/e = (4,1312 \pm 0,0026) \cdot 10^{-15}$ Volt \cdot sec	(II, 64)
	$R_\infty = (4,1333 \pm 0,0043) \cdot 10^{-15}$ Volt \cdot sec	(III, 6)
Rydberg-Konstante	$R_\infty = 10973730,4 \pm 7,8$ m $^{-1}$	(III, 3)
Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante	$1/\alpha = 136,95 \pm 0,13$	(III, 12)
	$1/\alpha = 136,97 \pm 0,22$	(III, 9)
	$1/\alpha = 137,03 \pm 0,09$	(III, 11)
Elektronenmasse	$m_0 = (9,107 \pm 0,018) \cdot 10^{-31}$ kg	(Tab. 4 u. 5)
Wasserstoffatommasse	$m_H = (1,6734 \pm 0,0014) \cdot 10^{-27}$ kg	(Tab. 4 u. 5)
	$m_H/m_0 = 1837,5 \pm 2,1$	(II, 59)
Protonenmasse	$m_p = (1,6725 \pm 0,0014) \cdot 10^{-27}$ kg	(II, 60)
Spezifische Protonenladung	$e/m_p = (9,5794 \pm 0,0008) \cdot 10^7$ Amp \cdot sec/kg	(II, 61)

¹⁾ Die von Miller und Du Mond für eventuelle Unvollkommenheiten im Kristallgitteraufbau bei der N_L -Bestimmung zu $0,4^{+0}_{-00}$ abgeschätzte mögliche Unsicherheit ist in den in dieser Tabelle aufgeführten Fehlergrenzen nicht enthalten. Die entsprechend vergrößerten Fehlergrenzen für die über N_L direkt oder indirekt bestimmten Größen sind bei der Besprechung der einzelnen Größen jeweils in Fußnoten angegeben worden.

legende Gesetzmäßigkeiten — wie z. B. die Rydberg-Formel — in ihrer theoretischen Formulierung irgendwie abzuändern, keinerlei Veranlassung vorliegt. Im Gegenteil ergeben die neueren experimentellen Untersuchungen eine vorzügliche Übereinstimmung mit diesen Relationen.

Den Anstoß zu solchen Versuchen gab eine formal-mathematische Art der Fehlerrechnung, die auf der Gaußschen Fehlertheorie beruht, somit ihren Voraussetzungen nach zunächst auf zufällige Fehler beschränkt und den experimentellen Verhältnissen oft wenig angepaßt ist. Die zahlenmäßigen Ergebnisse dieser Rechenoperationen wurden vielfach über den Rahmen ihrer Möglichkeiten hinaus als mathematisch objektive Aussagen gewertet, führten zu einer Überschätzung der experimentell bedingten Meßgenauigkeiten und gaben der Diskussion eventuell noch unerkannter, die Experimente fälschender systematischer oder konstanter Fehlerquellen nicht den gebührenden Raum. Bei einer etwas vorsichtigeren und den experimentellen Gegebenheiten mehr Rechnung tragenden Behandlung des Problems der Atomkonstanten hätten sich vielleicht eine Reihe von voreiligen, experimentell nicht begründeten und teilweise recht spekulativen Schlußfolgerungen vermeiden lassen, die besonders in der amerikanischen Literatur dazu führten, allgemeine, theoretisch sicher fundierte und durch die experimentelle Atomphysik immer wieder bestätigte Gesetzmäßigkeiten in Frage zu stellen.

Von einer graphischen Darstellung aller zur Bestimmung der Atomkonstanten nach den verschiedenen Methoden gemessenen Größen — etwa analog den von Du Mond¹⁾ und Darwin²⁾ durchgeführten Methoden — ist im Augenblick bewußt abgesehen worden. Hierzu sollen erst die endgültigen Ergebnisse der noch laufenden h/e -Bestimmungen abgewartet werden. Es ist anzunehmen, daß sich nach Abschluß dieser Arbeiten noch ein besserer Einblick in die Gründe für das Auftreten der „tiefen“ h/e -Werte gewinnen lassen wird, besonders auch im Zusammenhang mit den in dieser Veröffentlichung gleichfalls nicht näher besprochenen Werten für h/e , die sich mit anderen und als weniger zuverlässig angesehenen Untersuchungsmethoden ergeben haben.

Herrn Prof. Dr. Cario und den übrigen Mitarbeitern des Instituts bin ich für Diskussionen über das Gesamtthema zu Dank verpflichtet, besonders Herrn Dr. rer. nat. Janssen für das sorgfältige Lesen der Korrekturen.

Braunschweig, Physikal. Inst. der Techn. Hochschule, im Oktober 1942.

¹⁾ J. W. M. Du Mond, Phys. Rev. 56, 153, 1939. — ²⁾ C. G. Darwin, Proc. Phys. Soc. 52, 202, 1940.

Wirkungsquerschnitte für die Absorption langsamer Neutronen*).

Von **Helmut Volz** in Berlin-Charlottenburg.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 27. Januar 1943.)

In dem ersten Teil der folgenden Arbeit wird eine kritische Übersicht über die wichtigsten bisherigen Methoden zur Messung von Wirkungsquerschnitten für langsame Neutronen gegeben. Im zweiten Teil wird eine Methode zur Messung von Absorptionsquerschnitten entwickelt, bei der die Absorptionswirkung ebener Platten untersucht wird. Diese Platten werden in ein Wasservolumen gebracht, in dem durch eine Neutronenquelle geeigneter Form eine zunächst konstante Dichte thermischer Neutronen erzeugt wird. Die Dichte unmittelbar an der Oberfläche der Absorberplatte wird mittels eines dünnen Indikators für thermische Neutronen gemessen und mit der Dichte in dem ursprünglich homogenen Feld verglichen. Das Verhältnis der beiden Meßwerte dient zur Bestimmung des Absorptionsquerschnitts der in der Absorberplatte enthaltenen Substanzen. Nach dieser Methode werden 49 Elemente auf ihre Absorptionswirkung untersucht und die Ergebnisse unserer bisherigen Kenntnis von den Wirkungsquerschnitten dieser Elemente gegenübergestellt. In Tabelle 2 am Schluß der Arbeit sind die wichtigsten heute vorliegenden Ergebnisse der Messungen von Gesamtquerschnitten, Streuquerschnitten und Absorptionsquerschnitten zusammengestellt.

1. Teil. Thermische Wirkungsquerschnitte und ihre Messung.

I. Über die Wechselwirkung von Neutronen mit Atomkernen und den Begriff des Wirkungsquerschnittes.

Wenn ein Neutron Materie durchquert, so macht es Zusammenstöße mit den darin enthaltenen Atomkernen. Bei einem solchen Zusammenstoß kann das Neutron entweder gestreut werden, d. h. seine Bewegungsrichtung und im allgemeinen auch seine Geschwindigkeit ändern, dabei aber als freies Neutron erhalten bleiben, oder es kann seine selbständige Existenz verlieren, indem es in den Atomkern eindringt und mit ihm verschmilzt. Der Atomkern als schwingungsfähiges Gebilde geht dabei in einen Zustand hoher innerer Anregung über, der selbst nur kurze Zeit existenzfähig ist und durch Abspaltung eines korpuskularen Teilchens oder Emission eines Gammaquants sehr rasch in einen stabileren Zustand übergeht. Wir sprechen in diesem Fall von der Absorption des Neutrons und von der damit verbundenen Kernumwandlung. Ist das von dem Atomkern emittierte Teilchen

*) Eingereicht zur Erlangung des Grades eines Dr. rar. nat. habil. in der Fakultät für allgemeine Wissenschaften der Technischen Hochschule Berlin.

ein Gammaquant, so haben wir einen Anlagerungs- oder Einfangvorgang, ist es jedoch speziell selbst wieder ein Neutron, so können wir auch von einem Streuvorgang sprechen, der dann allerdings meist unelastisch, d. h. unter Verlust an kinetischer Energie vor sich geht, wobei der Restkern in einem Zustand innerer Anregung zurückbleibt.

Aus der Häufigkeit, mit der die verschiedenen Prozesse auftreten, kann man den Wirkungsquerschnitt berechnen, den ein Atomkern einem bewegten Neutron für das Eintreten des betreffenden Vorgangs darbietet. Den Wirkungsquerschnitt σ definieren wir dabei so, daß $N \cdot \sigma \cdot dx$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des betreffenden Vorgangs innerhalb der Wegstrecke dx angibt, wenn N die Anzahl der Atome pro Volumeneinheit bedeutet. Wir sprechen so von dem Wirkungsquerschnitt für Streuung, von dem Wirkungsquerschnitt für Absorption und schließlich von dem Gesamtquerschnitt, der als Summe der beiden vorigen die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten irgendeines der genannten Prozesse, also für die Unterbrechung der geradlinigen Bahn eines Neutrons überhaupt bestimmt.

Diese Wirkungsquerschnitte sind alle mehr oder weniger stark von der Neutronengeschwindigkeit abhängig. Besonders wichtig ist der Fall, daß die Wahrscheinlichkeit für den Streuvorgang gegenüber allen anderen Prozessen weit überwiegt, wie dies besonders bei der Bewegung von Neutronen in Wasser, Paraffin oder anderen wasserstoffhaltigen Substanzen der Fall ist. Die von der Neutronenquelle emittierten und meist ziemlich energiereichen Neutronen machen dann zunächst eine große Zahl elastischer Stöße durch. Nach den Stoßgesetzen geben sie dabei jedesmal einen gewissen Bruchteil ihrer Energie an den getroffenen Atomkern ab und werden so von Stoß zu Stoß immer weiter verlangsamt, bis sie schließlich eine Geschwindigkeit annehmen, die dem thermischen Gleichgewicht mit ihrer Umgebung entspricht. In diesem Zustand führen sie eine Diffusionsbewegung aus, bis sie durch einen Absorptionvorgang ihre selbständige Existenz wieder verlieren. Wir sprechen dann von thermischen Neutronen und verstehen unter dem thermischen Wirkungsquerschnitt den Wirkungsquerschnitt für thermische Energie, gemittelt über die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung der Neutronen.

Der Energieverlust des Neutrons beim Einzelstoß ergibt sich aus Energie- und Impulssatz. Seine größten Werte nimmt er beim Zusammenstoß des Neutrons mit dem massengleichen Wasserstoffkern an, wo er im Mittel die Hälfte der Anfangsenergie des Neutrons beträgt. Die Verlangsamung von Neutronen geht deshalb in wasserstoffhaltigen Substanzen besonders rasch vor sich. Hier genügen schon einige 20 Zusammenstöße

mit einem Wasserstoffkern, um beispielsweise ein Neutron von einer Energie von 10^6 e-Volt auf thermische Energie ($\sim 1/40$ e-Volt) abzubremesen. Da andererseits thermische Neutronen als solche in Wasser oder Paraffin nur schwach absorbiert werden, also in diesen Substanzen eine verhältnismäßig lange Lebensdauer aufweisen, haben diese Stoffe für die Erzeugung und Untersuchung thermischer Neutronen besondere Bedeutung erlangt.

Die Untersuchung der Eigenschaften thermischer Neutronen bietet für die Kernphysik ganz besonderes Interesse. Während geladene Teilchen bei ihrer Abbremsung in Materie schließlich wieder eine Elektronenhülle annehmen und so ihre kernphysikalische Wirksamkeit völlig verlieren, zeigen Neutronen gerade bei kleinen Geschwindigkeiten eine besonders hohe Aktivität. Wenn man von feineren Einzelheiten absieht, zeigt nämlich das Experiment in Übereinstimmung mit theoretischen Erwartungen, daß die Wirkungsquerschnitte der Atomkerne für Neutronenabsorption bei kleinen Neutronengeschwindigkeiten einen Gang mit der reziproken Neutronengeschwindigkeit zeigen ($1/v$ -Gesetz). Diese Wirkungsquerschnitte nehmen also für thermische Neutronen verhältnismäßig hohe Werte an. Da die Absorptions- und Streuquerschnitte das ganze Verhalten und schließlich Schicksal der thermischen Neutronen vollkommen bestimmen, ist ihre Messung eine der wichtigsten Aufgaben der Neutronenphysik.

II. Methoden zur Messung thermischer Wirkungsquerschnitte.

Zur Messung der verschiedenen Arten thermischer Wirkungsquerschnitte sind in den letzten Jahren eine ganze Reihe von Methoden entwickelt worden, deren wichtigste Gesichtspunkte und Ergebnisse im folgenden kurz dargestellt sind.

Die Messung des Gesamtquerschnitts bietet im Prinzip keine Schwierigkeit. Sie erfolgt nach einer Methode, die aus der Definition des Gesamtquerschnitts unmittelbar hervorgeht und zuerst von Dunning u. Mitarb.¹⁾ auf eine große Zahl von Elementen angewandt worden ist: Ein Strahl thermischer Neutronen durchsetzt eine dünne Schicht der zu untersuchenden Substanz. Durch Absorption und Streuung von Neutronen in der Schicht tritt eine Verminderung der Strahlintensität ein, aus der sich der Gesamtquerschnitt des einzelnen Atomkerns ohne weiteres berechnen läßt. Wichtig ist bei einer solchen Messung, wie besonders Riezler²⁾ hervorgehoben hat, daß man mit dünnen Schichten arbeitet. Da nämlich nach dem $1/v$ -Gesetz der Absorptionsquerschnitt gerade im thermischen Gebiet sehr

¹⁾ I. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink u. D. P. Mitchell, Phys. Rev. 48, 265, 1935. — ²⁾ W. Riezler, Ann. d. Phys. 41, 476, 1942.

stark variiert, werden beim Durchgang durch die Schicht die verschiedenen Geschwindigkeitsbereiche der Neutronen verschieden stark aus dem Strahl ausgefiltert, so daß bei zu dicker Schicht die ursprünglich „thermische“ Geschwindigkeitsverteilung der Neutronen merklich gestört wird. Manche Diskrepanzen erklären sich aus der teilweisen Nichtbeachtung dieses Punktes. In der geometrischen Anordnung des Versuchs ist ferner darauf zu achten, daß keine gestreuten Neutronen mitgezählt werden, daß also das Nachweisinstrument der Absorberschicht einen möglichst kleinen Raumwinkel darbietet, eine Forderung, die aus Intensitätsgründen oft nur schlecht erfüllbar ist. Bei Kernen mit merklichem Streuanteil erhält man sonst zu kleine Werte für den Gesamtquerschnitt.

Durch die Messungen von Dunning sowie eine Reihe von späteren Arbeiten¹⁾ sind uns die Gesamtquerschnitte heute für fast alle Elemente des periodischen Systems mit wenigen Ausnahmen bekannt. Die Messungen ergaben, daß der Gesamtquerschnitt für die verschiedenen Atomkerne sehr großen und ganz unregelmäßigen Schwankungen unterworfen ist, wobei als kleinste Werte ungefähr die geometrischen Kernquerschnitte ($\sim 10^{-24}$ cm²), als größte solche vom 10^4 - bis 10^5 -fachen davon gefunden wurden.

Meßreihen ähnlicher Ausdehnung wie diejenigen von Dunning sind von Goldhaber und Briggs²⁾ zur Messung von Streuquerschnitten durchgeführt worden. Sie untersuchen speziell die Streuung um 90° und berechnen den Streuquerschnitt dann unter der Annahme, daß die Streuung kugelsymmetrisch erfolgt. Es zeigt sich dabei, daß der thermische Streuquerschnitt, von gewissen Schwankungen abgesehen, einen kontinuierlichen Gang mit dem Atomgewicht aufweist und den geometrischen Kernquerschnitt, abgesehen vom Wasserstoff, der eine gewisse Sonderstellung einnimmt, niemals wesentlich überschreitet.

Schon aus diesen Messungen ging hervor, daß die bei manchen Stoffen gefundenen, besonders hohen Gesamtquerschnitte im wesentlichen auf Neutronenabsorption beruhen mußten, ja man konnte bei einigen dieser Stoffe, soweit der Streuquerschnitt vergleichsweise klein war, den Wirkungsquerschnitt für Neutronenabsorption unmittelbar gleich dem Dunning'schen Gesamtquerschnitt setzen. Für die große Zahl anderer Stoffe aber, wo Gesamtquerschnitt und Streuquerschnitt von gleicher Größenordnung sind, ist die Meßgenauigkeit für beide Größen vielfach nicht ausreichend,

¹⁾ Die wichtigsten derartigen Meßreihen sind in Tabelle 2 am Schluß der Arbeit aufgeführt. — ²⁾ M. Goldhaber u. G. H. Briggs, Proc. Roy. Soc. London (A) 162, 127, 1937.

um etwa durch Differenzbildung auf den Absorptionsquerschnitt zu schließen. Hier müssen direkte Methoden zur Messung des Absorptionsquerschnittes eingreifen, und solche sind nun auch in verschiedenster Art entwickelt worden und zur Anwendung gekommen.

Eine dieser Methoden beruht auf der in vielen Stoffen durch Neutronenanlagerung erregten Radioaktivität. Wird ein durch Neutronen aktivierbarer Stoff genügend lange, d. h. lange gegen seine eigene Zerfallszeit, der Neutronenbestrahlung ausgesetzt, so stellt sich ein stationärer Zustand ein, in dem ebensoviele radioaktive Kerne durch Zerfall verschwinden wie durch Neutronenanlagerung neu gebildet werden. Die unter gleichen Bedingungen in verschiedenen Stoffen erregten Aktivitäten sind also der Anlagerungswahrscheinlichkeit für Neutronen in diesen Stoffen proportional und können zur Bestimmung von Relativwerten für die Anlagerungsquerschnitte der betreffenden Stoffe dienen. Zu Absolutwerten kommt man, indem man die Ergebnisse auf einen ebenfalls aktivierbaren Stoff von schon bekanntem Wirkungsquerschnitt bezieht.

Wie alle radioaktiven Methoden läßt sich diese Meßmethode sehr empfindlich gestalten. Ihre meßtechnischen Schwierigkeiten liegen in der Herstellung gleicher geometrischer Bedingungen für die verschiedenen Substanzen, in den zum Teil nur sehr ungenau bekannten Halbwertszeiten und in der verschiedenen und größtenteils noch unbekannten Härte der emittierten β -Strahlen. Diese Schwierigkeiten führen dazu, daß die Genauigkeit der Methode ihrer Empfindlichkeit bei weitem nicht entspricht. Da die Methode zudem auf die große Zahl aller derjenigen Stoffe nicht anwendbar ist, bei denen durch Neutronenanlagerung kein radioaktiver Körper gebildet wird — zu diesen Stoffen gehören die für die Neutronenphysik besonders wichtigen Stoffe Wasserstoff, Lithium, Bor, Cadmium —, ferner bei all denjenigen Stoffen, die auch nur ein nichtaktivierbares Isotop besitzen, nur ein Teilergebnis liefert, so mußte von Anfang an nach Wegen gesucht werden, um Absorptionsquerschnitte unabhängig von der durch die Neutronenanlagerung erregten Aktivität zu messen.

Solche Methoden sind von Fermi¹⁾ angegeben und insbesondere zur Bestimmung des Absorptionsquerschnitts von Wasserstoff angewendet worden. Die eine ist die sogenannte Albedomethode: ein dünner Indikator für thermische Neutronen wird einseitig mit einem ausgedehnten Cadmiumblech bedeckt und innerhalb der zu untersuchenden Substanz mit Neutronen bestrahlt. Da Cadmium schon in dünner Schicht thermische Neutronen

¹⁾ E. Fermi, Ric. Scient. **1**, 454, 1936; **7**, 13, 1936

vollkommen absorbiert, wird der Indikator nur einseitig von Neutronen getroffen und aktiviert. In einer zweiten Messung wird die Erhöhung der Aktivität bestimmt, die eintritt, wenn die Bestrahlung ohne Cadmium erfolgt. Das Verhältnis der Aktivität I_0 bei Bestrahlung ohne Cadmium zur Aktivität I_c bei Bestrahlung mit Cadmium hängt von dem Verhältnis des Streuquerschnitts zum Absorptionsquerschnitt der untersuchten Substanz ab, und zwar gilt nach Fermi

$$\left(\frac{I_0}{I_c}\right)^2 = 1 + \frac{\sigma_s}{\sigma_a} = N,$$

wo N die Zahl von freien Weglängen ist, die das Neutron in der betreffenden Substanz bis zu seiner Absorption im Mittel durchläuft. Bei bekanntem Streuquerschnitt σ_s kann diese Beziehung zur Bestimmung des Absorptionsquerschnitts σ_a dienen. Da das Verhältnis I_0/I_c quadratisch in die Formel eingeht und insbesondere I_c nicht ganz leicht einwandfrei zu messen ist, wird das Ergebnis allerdings nicht sehr genau.

Ein anderes Verfahren, das ebenfalls von Fermi stammt, beruht auf der Beobachtung der Diffusionseigenschaften der Neutronen. Hier wird die Diffusionslänge l gemessen, das ist die wahrscheinlichste Entfernung, die ein thermisches Neutron von seiner Entstehung bis zu seiner Absorption durchläuft. Auch diese hängt natürlich ab von der Anzahl und der Größe der von dem Neutron durchlaufenen freien Weglängen, und zwar ist nach Fermi

$$l = \lambda\sqrt{N/3},$$

wo λ die mittlere freie Weglänge des Neutrons in der betreffenden Substanz bedeutet. Bezüglich der Genauigkeit gilt dasselbe wie im vorigen Falle. Beide Verfahren sind vor allem auf Stoffe mit großem Streu- und kleinem Absorptionsquerschnitt, also insbesondere auf Wasserstoff oder wässrige Lösungen absorbierender Substanzen anwendbar, doch ist von der letzteren Möglichkeit bisher noch kaum Gebrauch gemacht worden.

Die Verwendung wässriger Lösungen zur Messung von Absorptionsquerschnitten bietet grundsätzlich den Vorteil, daß man von dem Streuquerschnitt der zu untersuchenden Substanz unabhängig wird, da derselbe gegenüber der starken Streuwirkung des Wasserstoffs für thermische Neutronen immer vernachlässigt werden kann. Für sehr energiereiche Neutronen trifft dies allerdings nicht mehr zu, so daß man z. B. bei Vergleichsmessungen an verschiedenen Lösungen sehr darauf achten muß, daß der von verschiedenen Lösungen erfüllte Raum von möglichst wenig schnellen Neutronen durchsetzt wird.

Solche Vergleichsmessungen an wässrigen Lösungen sind von Lapointe und Rasetti¹⁾ an einer Reihe von Substanzen durchgeführt worden. Sie messen die Neutronendichte an einer bestimmten Stelle innerhalb des von Lösung erfüllten Raumes und vergleichen dieselbe mit derjenigen in einer Reihe von Borlösungen, die als Eichlösungen dienen. Die Neutronenquelle befindet sich dabei außerhalb des von Lösung erfüllten Volumens. Um neben der immerhin beträchtlichen Absorption im Wasserstoff des Lösungsmittels merkliche Effekte zu bekommen, muß man allerdings bei allen nicht sehr stark absorbierenden Stoffen so hohe Konzentrationen anwenden, daß ein merklicher Teil der ursprünglich vorhandenen Wasserstoffkerne aus dem Meßvolumen verdrängt wird, wodurch wiederum Korrekturen notwendig werden, die zum Teil von gleicher Größe wie die erhaltenen Effekte sind. Die Anwendbarkeit der Methode ist deshalb auf stärker absorbierende Stoffe beschränkt. Trotzdem stellen die Messungen von Lapointe und Rasetti die bisher umfangreichsten Meßreihen von Absorptionsquerschnitten dar.

Eine mühsame, aber empfindliche Methode, um die Wirkungsquerschnitte schwach absorbierender Substanzen mit dem des Wasserstoffs zu vergleichen, besteht darin, daß man in einem ausgedehnten Volumen, welches den betreffenden Stoff in Verbindung mit Wasserstoff enthält, die Neutronendichte über den ganzen Raum ausmißt, integriert und das Ergebnis mit demjenigen an reinem Wasser vergleicht. Die gesamte Neutronenzahl ist der Lebensdauer des einzelnen Neutrons direkt, dem gesamten Absorptionsquerschnitt der Substanz also umgekehrt proportional. Frisch, v. Halban und Koch²⁾ waren so in der Lage, die Absorptionsquerschnitte von Kohlenstoff und Sauerstoff trotz ihrer außerordentlichen Kleinheit wenigstens abzuschätzen.

Eine andere Meßmethode an Lösungen, mit der man die Wirkungsquerschnitte stark absorbierender Stoffe auch mit kleinen Lösungsmengen unmittelbar an den des Wasserstoffs anschließen kann, ist von Haxel und Volz³⁾ angegeben und auf Cadmium- und Silberlösungen angewendet worden. Ihre Messungen können als eine recht genaue Bestimmung des Wasserstoffwirkungsquerschnitts angesehen werden.

In neuerer Zeit sind von Ramm⁴⁾ Messungen mitgeteilt worden, in denen für eine Reihe von Stoffen Absorptionsquerschnitte ebenso wie in der folgenden Arbeit, jedoch unter anderen Versuchsbedingungen, durch

¹⁾ C. Lapointe u. F. Rasetti, Phys. Rev. **58**, 554, 1940. — ²⁾ O. R. Frisch, H. v. Halban jr. u. J. Koch, Nature **140**, 895, 1937; Medd. Kopenhagen **15**, Nr. 10, 1938. — ³⁾ O. Haxel u. H. Volz, ZS. f. Phys. **120**, 513, 1943. — ⁴⁾ W. Ramm, Naturwissensch. **30**, 755, 1942.

Messungen an festen Platten untersucht wurden. Die Ergebnisse von Ramm sind in Tabelle 2 am Schluß der Arbeit mit aufgenommen¹⁾.

Wenn man von den umfangreichen Meßreihen absieht, die auf der durch Neutronenanlagerung erregten Aktivität beruhen und, wie oben erwähnt, in vielen Fällen nur einen Teil der gesamten Neutronenabsorption ergeben, so kann man zusammenfassend sagen, daß wirkliche Absorptionsmessungen trotz der Vielzahl der angeführten Methoden erst für einen kleinen Teil aller Elemente ausgeführt worden sind. Dies liegt vor allem daran, daß alle diese Methoden teils an besondere Bedingungen, wie die der Wasserlöslichkeit oder die starker Absorption geknüpft sind, oder aber sehr große Materialmengen erfordern.

Es ist nun aber einerseits theoretisch von größtem Interesse, festzustellen, ob die aus Aktivitätsmessungen erhaltenen Werte da, wo dies zu erwarten ist, wirklich die gesamte Neutronenabsorption darstellen bzw. wieweit daneben noch Absorptionsvorgänge auftreten, die zu keiner beobachtbaren Aktivität führen. Andererseits ist die Kenntnis der Absorptionsquerschnitte die wichtigste Grundlage für das praktische Arbeiten mit Neutronen. Das Ziel der folgenden Arbeit ist es deshalb, eine Methode zu entwickeln, die es ermöglicht, die Absorptionsquerschnitte für den weitaus größten Teil aller Elemente in einheitlicher und einfacher Weise, mit großer Genauigkeit und mit kleinen Substanzmengen zu bestimmen. Diese Methode wird auf eine große Zahl von Elementen angewendet und das Ergebnis unserer bisherigen Kenntnis von den Wirkungsquerschnitten dieser Elemente gegenübergestellt.

2. Teil. Absorptionsquerschnitte, eigene Messungen.

III. Grundgedanke und Aufbau der Versuchsanordnung.

Der Grundgedanke der bei den vorliegenden Messungen verwendeten Versuchsanordnung ist der folgende: Durch eine Neutronenquelle geeigneter Form wird zunächst in einem Wasservolumen ein Gebiet möglichst konstanter Dichte von Neutronen hergestellt. In dieses Gebiet wird eine dünne ebene Schicht der absorbierenden Substanz gebracht. Durch die Absorption von Neutronen in der Schicht wird die Neutronendichte im Schichtinnern sowie in den angrenzenden Wasserschichten verringert. Mittel eines Indikators für thermische Neutronen wird die Neutronendichte unmittelbar an der Plattenoberfläche gemessen und mit der Dichte in dem ursprünglichen

¹⁾ Für die freundliche Mitteilung seiner Ergebnisse vor der Veröffentlichung danke ich Herrn Dr. Ramm bestens.

homogenen Feld ohne Absorberschicht verglichen. Aus dem Verhältnis der beiden Meßwerte läßt sich der Absorptionsquerschnitt der in der Platte enthaltenen Substanzen berechnen.

Der Aufbau der Versuchsanordnung ist in Fig. 1 dargestellt. Q ist die Neutronenquelle, A die Absorberschicht, I der Indikator zur Dichtemessung.

Die Neutronenquelle Q besteht aus zwei coaxialen Ringen aus Glasrohr, die mit Berylliumflittern + Radium-Emanation gefüllt sind. Ihrer Formgebung liegt der Gedanke der Helmholtzschen Stromspulen zur Herstellung

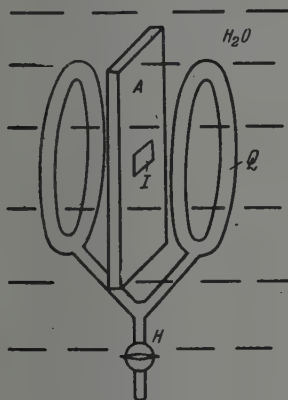


Fig. 1. Versuchsanordnung.

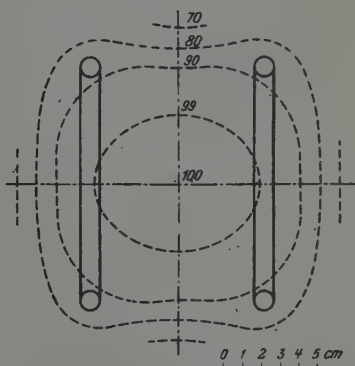


Fig. 2. Dichteverteilung der Resonanzneutronen.

konstanter Magnetfelder zugrunde. Im Gegensatz zu dort sind aber hier nicht nur die geometrischen Proportionen, sondern auch die absoluten Ausmaße der Anordnung durch die Diffusionseigenschaften der Neutronen in Wasser vollkommen festgelegt. Diese Ausmaße waren aus theoretischen Gründen so zu bestimmen, daß zunächst eine möglichst konstante Dichte von Neutronen von etwa 1 e-Volt Energie, also von sogenannten Resonanzneutronen, zustande kam. Da solche Neutronen nämlich nach wenigen Stößen thermisch werden, wird damit ein Raum geschaffen, in dem eine konstante „Quellstärke für thermische Neutronen“ vorliegt, eine Tatsache, die in der theoretischen Behandlung der Anordnung benutzt wird. Zur Festlegung der Maße der Anordnung wurde die von Amaldi und Fermi¹⁾ ausgemessene Dichteverteilung von Resonanzneutronen in der Umgebung einer punktförmigen Quelle benutzt. Mit Hilfe eines graphischen Verfahrens wurde damit die Dichteverteilung für verschiedene Abmessungen der beiden

¹⁾ E. Amaldi u. E. Fermi, Phys. Rev. 50, 899, 1936.

Ringe ermittelt und als günstigste Werte schließlich ein mittlerer Ringdurchmesser von 12 cm bei einem gegenseitigen Abstand der beiden Ringe von 9 cm gewählt. Fig. 2 zeigt im Schnitt die zugehörige Dichteverteilung. Sie ist in dem Raum zwischen den beiden Ringen innerhalb einiger Prozente konstant, wie auch durch einige stichprobenartige Messungen bestätigt wurde. Die Füllung der Ringe mit Radium-Emanation geschieht durch einen unten angesetzten Hahn, wobei zur Vermeidung toten Raumes die Rohrgabelung bis zu den Ringen mit Quecksilber gefüllt wird. Eine von der Neutronenabsorption im Quecksilber herrührende Dichteverminderung war im Zentrum der Anordnung nicht feststellbar und ist an sich für die Messungen ohne Belang. Die Präparatstärke betrug etwa 100 mc.

Die Absorberschichten hatten normalerweise eine Größe von $14,5 \times 17 \text{ cm}^2$ und wurden auf verschiedene Arten hergestellt. Metalle wurden, soweit erhältlich, in Form von Blechen einer Stärke von 0,2 bis 4 mm verwendet. Viele andere Stoffe wurden als Carbonate, Oxyde oder Hydroxyde oder in anderen Verbindungen mit schwach absorbierenden Stoffen untersucht. Dazu wurden diese Stoffe, die meist in körniger oder Pulverform vorlagen, mit Paraffin zu Platten von 2 bis 10 mm Dicke vergossen. Durch diese Art der Plattenherstellung ergab sich die Möglichkeit, auch stark wasserlösliche Substanzen oder chemisch in Wasser nicht beständige Verbindungen zu verwenden, so daß man in der Auswahl der geeigneten Substanzen große Freiheit hatte. Ein weiterer Vorteil der Verwendung von Paraffin zur Plattenherstellung liegt darin, daß der in Form von Wasser durch die Absorberplatte verdrängte Wasserstoff zu einem großen Teil durch den Wasserstoff des Paraffins wieder ersetzt wird, so daß der Verlangsamungsvorgang für die schnellen Neutronen auch mit dickeren Absorberschichten praktisch in derselben Weise wie ohne Absorber vor sich geht. Ferner wird durch die Streuwirkung der Wasserstoffkerne die Isotropie der Richtungsverteilung der Neutronen, die in der theoretischen Rechnung vorausgesetzt wird, sichergestellt.

Einige stark absorbierende Stoffe wurden zur bequemeren Handhabung mit reinstem Kohlepulver vermischt und dann entweder in ein flaches Aluminiumgefäß gefüllt oder in derselben Weise wie oben zu Platten vergossen, andere in Form wässriger Lösungen untersucht, die in das Aluminiumgefäß eingefüllt wurden. Eine Reihe von Stoffen, von denen nur kleine Substanzmengen zur Verfügung standen, wurden in derselben Weise, jedoch mit dem kleineren Plattenformat von $8 \times 8 \text{ cm}^2$, einige weitere seltene Substanzen in dem noch kleineren Format von $2,2 \times 3,6 \text{ cm}^2$ untersucht.

Die Indikatoren bestanden aus einer Schicht von Dysprosiumoxyd auf einer Aluminiumunterlage von 0,3 mm Dicke. Die aktive Schicht wies eine Fläche von $0,8 \times 1,6 \text{ cm}^2$ mit einer Belegung von 5 mg/cm^2 Dysprosiumoxyd auf und war nach oben durch eine dünne, mit gehärtetem Glyptallack befestigte Aluminiumfolie abgedeckt. Die Indikatoren wurden entweder an einem dünnen Aluminiumdraht in Wasser aufgehängt oder mit etwas Klebwachs an den Absorberplatten befestigt.

Die Messungen wurden in der Weise durchgeführt, daß 2 Indikatoren von bekanntem Ausbeuteverhältnis mit bzw. ohne Absorberschicht abwechselnd je 15 Minuten lang exponiert und dazwischen je 18 Minuten mit einem Zählrohr ausgezählt wurden, welches über eine Verstärkeranlage mit einem mechanischen Zählwerk verbunden war. Entsprechend der Halbwertszeit des Dysprosiums ($\sim 2,5 \text{ Std.}$) ergibt sich bei einer solchen Meßreihe für beide Indikatoren ein parallelaufender Anstieg der Aktivität, der im Laufe eines Tages bis zum Sättigungswert führt. Ohne Absorberschicht beträgt dieser je nach der Präparatstärke 100 bis 300 Teilchen pro Minute, der Nulleffekt etwa 25 Teilchen pro Minute. Schon während der Messung wird aus den zusammengehörigen Wertepaaren das Einzelverhältnis, zum Schluß der Mittelwert bestimmt. Dieses Verfahren gibt die ständige Sicherheit dafür, daß die Zählordnung einwandfrei und ohne zusätzliche Schwankungen arbeitet.

Nach der Elimination des Indikatorverhältnisses stellt die so ermittelte Verhältniszahl die Unterlage für die Bestimmung des Absorptionsquerschnittes dar.

IV. Theorie der Anordnung.

Die strenge Behandlung der Diffusion von Neutronen in streuenden und absorbierendem Material geht aus von einer Integralgleichung, die für jeden Raumpunkt und jede Geschwindigkeitsrichtung das Gleichgewicht zwischen den zuströmenden bzw. neuentstehenden und den verschwindenden Neutronen zum Ausdruck bringt. Sie ist mehrfach, so von Halpern, Lueneburg und Clark ¹⁾, aufgestellt und für spezielle Fälle streng gelöst worden. Für die praktische Anwendung kommt das Verfahren wegen seiner mathematischen Unhandlichkeit nicht in Betracht, man muß sich hier auf Näherungsverfahren stützen, wie sie sich in verschiedenen Formen schon in den grundlegenden Arbeiten von Fermi finden. Auf den vorliegenden Fall sind zwei dieser Näherungsverfahren anwendbar, die sich in verschie-

¹⁾ O. Halpern, R. Lueneburg u. O. Clark, Phys. Rev. **53**, 173, 1938.

denen Punkten gegenseitig ergänzen und die wir deshalb beide kurz darstellen.

Die eine Methode besteht in der Anwendung der Diffusionsgleichung, die für stationäre Fälle die Form

$$D \Delta \varrho - \frac{\varrho}{\tau} + q = 0 \quad (1)$$

hat. Hierin bedeutet ϱ die Neutronendichte, D die Diffusionskonstante, τ die mittlere Lebensdauer eines thermischen Neutrons in dem betreffenden Material und q die Quellstärke, d. h. die Zahl der pro cm^3 und sec neu entstehenden thermischen Neutronen. Für die Diffusionskonstante wird in der kinetischen Gastheorie der Wert $D = \frac{1}{3} \lambda v$ hergeleitet, wo λ die mittlere freie Weglänge und v die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen bedeutet. Der Näherungscharakter dieser Gleichung in ihrer Anwendung auf die Neutronendiffusion besteht einmal darin, daß die freie Weglänge der Neutronen in Wasser mit 0,3 cm vergleichbar ist mit den auftretenden Dimensionen, also insbesondere mit der Plattendicke und mit der Diffusionslänge selbst. Ferner darin, daß das Hinzutreten einer Absorption sich dem Diffusionsvorgang nicht einfach überlagert, wie es durch das additive Hinzutreten des Gliedes $-\varrho/\tau$ in der Diffusionsgleichung zum Ausdruck gebracht wird, sondern in den Diffusionsvorgang in tieferer Weise mit eingreift. Eine strengere Theorie der Diffusion im absorbierenden Medium ist von Bothe¹⁾ gegeben worden. Danach kann man in einem unendlich ausgedehnten Medium zwar immer noch mit einer Gleichung der allgemeinen Form (1) rechnen, muß jedoch beim Vorhandensein einer Absorption für die Diffusionskonstante einen anderen Wert einsetzen, welcher durch

$$D = \frac{l_B^2}{\tau}$$

definiert ist. Darin bedeutet l_B die (modifizierte, Bothesche) Diffusionslänge, die sich selbst mittels der Gleichung

$$\frac{\lambda}{l_B} = \mathfrak{Lg} \frac{\lambda_s}{l_B} \quad (2)$$

aus der mittleren freien Weglänge $\lambda_s = \frac{1}{\sum n_i \sigma_{s,i}}$ für Streuung und der mittleren freien Weglänge $\lambda_a = \frac{1}{\sum n_i \sigma_{a,i}}$ für Absorption bestimmt (n_i : Atomzahlen pro cm^3 , $\sigma_{s,i}$: Streuquerschnitte, $\sigma_{a,i}$: Absorptionsquerschnitte)..

¹⁾ W. Bothe, ZS. f. Phys. 118, 401, 1942.

Das zweite, auf das vorliegende Problem anwendbare Verfahren stammt ebenfalls von Fermi. In ihm werden die Streu- und Absorptionsvorgänge in einem eindimensionalen Modell behandelt. An die Stelle des dreidimensionalen Streuvorgangs tritt hierbei ein Vorgang, bei dem das Neutron mit gleicher Wahrscheinlichkeit seine Richtung beibehält oder umkehrt. Dieses Modell läßt sich vollkommen streng durchrechnen. Um das Ergebnis auf den dreidimensionalen Raum zu übertragen, hat man nach Fermi die auftretenden freien Weglängen als die wirklichen freien Weglängen, verkürzt um einen Faktor $\sqrt{3}$, zu deuten. Der Näherungscharakter liegt hier in dem letzten Schritt, also in dem Übergang zum dreidimensionalen Falle¹⁾. Da dieser jedoch mindestens teilweise bei der Anwendung der Diffusionsgleichung erfaßt wird, kann man annehmen, daß der Vergleich der Resultate einen Schluß auf den mit diesen Näherungen verbundenen Fehler zuläßt. Wir stellen deshalb beide Verfahren, ohne auf die Einzelheiten der Rechnung einzugehen, in ihren wesentlichen Schritten und Ergebnissen nebeneinander.

A. Anwendung der Diffusionsgleichung. Wenn wir die ganze Anordnung in Richtung der Absorberebene als unendlich ausgedehnt ansehen, hängt der Dichteverlauf der thermischen Neutronen nur von einer Koordinate, nämlich von dem Abstand von der Absorberebene ab. Diese Richtung machen wir zur x -Achse und legen den Ursprung in die Mittelebene der Platte. Die allgemeine Lösung der Diffusionsgleichung (1) lautet dann

$$\varrho = q\tau + Ae^{-x/l_B} + Be^{x/l_B}, \quad (3)$$

wo die Diffusionslänge l_B durch (2) definiert ist. Für das Platteninnere denken wir uns die Größen q , τ , A , B und l_B durch die entsprechenden gestrichenen Größen q' , τ' , A' , B' und l'_B ersetzt, wobei wir später die Quellstärken q und q' proportional der Dichte der Wasserstoffkerne ansetzen. Die Koeffizienten A , B , A' und B' lassen sich auf Grund der folgenden Bedingungen berechnen:

- a) Symmetrie der Anordnung zur y - z -Ebene,
- b) Verschwinden der Neutronendichte im Unendlichen,
- c) Stetigkeit der Dichte an den Grenzflächen $x = \pm d/2$,
- d) Stetigkeit des Neutronenstromes $-D \cdot \text{grad } \varrho$ bzw. $-D' \cdot \text{grad } \varrho$ an den Grenzflächen $x = \pm d/2$.

¹⁾ In mathematischer Hinsicht stellt das Fermische Verfahren den ersten Schritt des Gaußschen Näherungsverfahrens (vgl. Geiger-Scheel, Handb. d. Physik III, S. 629) zur Lösung der Integralgleichung des Diffusionsproblems dar. Herrn Prof. Dr. W. Heisenberg danke ich für den Hinweis.

Nach dem Einsetzen der so berechneten Konstanten in die allgemeine Lösung (3) ergibt sich für den Dichteverlauf im Außenraum der folgende Ausdruck:

$$\varrho = q \cdot \tau - \frac{(q\tau - q'\tau') \cdot \frac{\tau}{\tau'} \cdot \frac{l'_B}{l_B} \operatorname{tg} \frac{d}{2l'_B} - \frac{x - \frac{d}{2}}{l_B}}{1 + \frac{\tau}{\tau'} \cdot \frac{l'_B}{l_B} \operatorname{tg} \frac{d}{2l'_B}} \cdot e \quad (4)$$

Die Dichte setzt sich also zusammen aus einem konstanten Anteil $\varrho_0 = q\tau$, nämlich der Neutronendichte ohne Absorberschicht, und einem negativen Anteil, der von der Absorption in der Platte herrührt und exponentiell mit dem Abstand von der Platte abklingt. Wenn wir in diesem Ausdruck die Lebensdauern τ und τ' durch die freien Weglängen für Absorption und die mittlere Neutronengeschwindigkeit v ausdrücken auf Grund der Beziehungen

$$\tau = \frac{\lambda_a}{v}, \quad \tau' = \frac{\lambda'_a}{v},$$

so erhalten wir nach einigen Umformungen für die Dichte $\bar{\varrho}$ unmittelbar an der Oberfläche der Absorberplatte ($x = d/2$) den Ausdruck

$$\bar{\varrho} = \varrho_0 \cdot \frac{1 + \frac{q'}{q} \cdot \frac{l'_B}{l_B} \operatorname{tg} \frac{d}{2l'_B}}{1 + \frac{\lambda_a}{\lambda'_a} \cdot \frac{l'_B}{l_B} \operatorname{tg} \frac{d}{2l'_B}}.$$

Einen für die praktische Auswertung geeigneteren Ausdruck können wir herstellen, indem wir den Quotienten $\kappa = \frac{\varrho_0 - \bar{\varrho}}{\bar{\varrho}}$ bilden. Dafür erhalten wir

$$\kappa = \frac{\varrho_0 - \bar{\varrho}}{\bar{\varrho}} = \frac{1 - \frac{q' \lambda'_a}{q \lambda_a}}{\frac{q'}{q} + \frac{\lambda'_a}{\lambda_a} \cdot \frac{l'_B}{l_B} \operatorname{ctg} \frac{d}{2l'_B}} = \frac{\frac{1}{\lambda'_a} - \frac{q'}{q \lambda_a}}{\frac{q'}{q \lambda_a} + \frac{1}{\lambda_a} \cdot \frac{l'_B}{l_B} \operatorname{ctg} \frac{d}{2l'_B}}. \quad (5)$$

Der Zähler dieses Ausdrucks hat eine einfache und anschauliche Bedeutung. Um sie zu erkennen, bezeichnen wir die Anzahl der Atome des untersuchten Stoffes in der Absorberplatte pro cm^3 mit n_x , die Anzahl von Wasserstoffatomen pro cm^3 im Innern der Platte mit n'_H , im Außenraum mit n_H und Die zugehörigen Absorptionsquerschnitte mit σ_x und σ_H . Dann wird

$$\frac{1}{\lambda'_a} = n_x \sigma_x + n'_H \sigma_H \quad \text{und} \quad \frac{q'}{q \lambda_a} = \frac{n'_H}{n_H} \cdot n_H \sigma_H = n'_H \sigma_H.$$

Der Zähler des Ausdrucks (5) stellt also einfach den Absorptionskoeffizienten $n_x \sigma_x$ des untersuchten Stoffes allein dar. Wenn wir nach diesem auflösen, erhalten wir

$$n_x \sigma_x = \kappa \left(\frac{q'}{q \lambda_a} + \frac{l_B}{\lambda_a} \cdot \frac{1}{l'_B} \cdot \text{Ctg} \frac{d}{2 l'_B} \right). \quad (6)$$

Diesen Ausdruck werden wir mit dem Ergebnis des im nächsten Abschnitt dargestellten Näherungsverfahrens vergleichen.

B. Berechnung im eindimensionalen Modell. Gemäß dem oben ausgeführten Gedankengang teilen wir die Neutronen hier ein in solche, die sich nach rechts bewegen, mit der Dichte n_1 (bzw. im Innenraum n'_1), und solche, die sich nach links bewegen, mit der Dichte n_2 bzw. n'_2 . Die mittleren freien Weglängen im Außen- bzw. Innenraum seien λ bzw. λ' , die Zahl von Weglängen, die in dem betreffenden Material im Mittel durchlaufen wird, bis Absorption erfolgt, sei N bzw. N' . Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein beliebig herausgegriffener Stoß zu einer Streuung führt, gleich $(N-1)/N$ bzw. $(N'-1)/N'$. In den Ausgangsgleichungen bringen wir zum Ausdruck, daß z. B. die an einer bestimmten Stelle im rechten Halbraum vorhandenen und nach rechts laufenden Neutronen an irgendeiner links davon gelegenen Stelle ihren letzten Stoß gemacht haben und dabei nach rechts gestreut worden sind, oder aber neu entstanden und nach rechts gestartet sind. Wir bekommen so eine Gleichung für n_1 im rechten Halbraum, die wir als Beispiel hinschreiben:

$$\begin{aligned} n_1(x) = & \int_{-\infty}^{-d/2} \frac{1}{2} \left(\frac{q}{v} + \frac{n_1(\xi) + n_2(\xi)}{\lambda} \cdot \frac{N-1}{N} \right) \cdot e^{-\frac{x-\xi}{\lambda} - d \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} \right)} d\xi + \\ & + \int_{-d/2}^{+d/2} \frac{1}{2} \left(\frac{q'}{v} + \frac{n'_1(\xi) + n'_2(\xi)}{\lambda'} \cdot \frac{N'-1}{N'} \right) \cdot e^{-\frac{x-\xi}{\lambda} - \left(\frac{d}{2} - \xi \right) \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} \right)} d\xi + \\ & + \int_{+d/2}^x \frac{1}{2} \left(\frac{q}{v} + \frac{n_1(\xi) + n_2(\xi)}{\lambda} \cdot \frac{N-1}{N} \right) \cdot e^{-\frac{x-\xi}{\lambda}} d\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

Unter den Integralen steht die Zahl der an einer Stelle ξ neu entstandenen bzw. nach rechts gestreuten Neutronen — genauer wegen der Division mit v ihr Beitrag zur Dichte —, multipliziert mit der durch den Exponentialfaktor gegebenen Wahrscheinlichkeit, daß diese Neutronen bis zur Stelle x ohne weiteren Stoß gelangen. Ähnliche Gleichungen ergeben sich für n_2, n'_1

und n'_2 sowie die entsprechenden Größen des linken Halbraumes. Wir gehen in diese Gleichungen ein mit den Ansätzen

links	Mitte	rechts
$n_1 = a - B e^{x/l};$	$n'_1 = a' + A' e^{x/l'} + B' e^{-x/l'};$	$n_1 = a - A e^{-x/l};$
$n_2 = a - A e^{x/l};$	$n'_2 = a' + B' e^{x/l'} + A' e^{-x/l'};$	$n_2 = a - B e^{-x/l};$

in denen wir die Symmetrieeigenschaften der Anordnung bereits zum Ausdruck gebracht haben, und bekommen so ein System von linearen Gleichungen für die Größen a, a', A, \dots , deren Koeffizienten jedoch, wie aus (7) hervorgeht, Exponentialfunktionen von x sind. Wenn die Gleichungen für alle x gelten sollen, müssen die Koeffizienten gleichartiger Exponentialfunktionen verschwinden. Dies liefert folgende Gleichungen:

$$a = \frac{1}{2} \frac{q N \lambda}{v}; \quad a' = \frac{1}{2} \frac{q' N' \lambda'}{v}; \quad (8)$$

$$A = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{A+B}{2} \cdot \frac{1}{1-\lambda/l}; \quad B = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{A+B}{2} \cdot \frac{1}{1+\lambda/l}; \quad (9)$$

$$A' = \frac{N'-1}{N'} \cdot \frac{A'+B'}{2} \cdot \frac{1}{1+\lambda'/l'}; \quad B' = \frac{N'-1}{N'} \cdot \frac{A'+B'}{2} \cdot \frac{1}{1-\lambda'/l'}; \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} a - A e^{-d/2l} &= a' + A' e^{d/2l'} + B' e^{-d/2l'}; \\ a - B e^{-d/2l} &= a' + A' e^{-d/2l'} + B' e^{d/2l'}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Der Forderung der Verträglichkeit der beiden Gleichungspaare (9) und (10) liefert

$$l = \lambda \sqrt{N} \quad \text{und} \quad l' = \lambda' \sqrt{N'}.$$

Nach der Berechnung der Koeffizienten ergibt sich bei Berücksichtigung von $\lambda'_a = N' \lambda'$ schließlich wie oben

$$\frac{\varrho_0 - \bar{\varrho}}{\bar{\varrho}} = \kappa = \frac{\frac{1}{\lambda'_a} - \frac{q'}{q \lambda_a}}{\frac{q'}{q \lambda_a} + \frac{\lambda}{l} \frac{l'}{\lambda' \lambda'_a} \operatorname{ctg} \frac{d}{2l'}} = \frac{\frac{1}{\lambda_x}}{\frac{q'}{q \lambda_a} + \frac{\lambda}{l} \cdot \frac{1}{l'} \operatorname{ctg} \frac{d}{2l'}}.$$

Wenn wir nun den Übergang ins Dreidimensionale vollziehen, indem wir alle freien Weglängen mit dem Faktor $1/\sqrt{3}$ versehen und nunmehr als die Größen des dreidimensionalen Raumes betrachten, gleichzeitig die „Fermische“ Diffusionslänge des dreidimensionalen Raumes definieren durch

$$l_F = \lambda \sqrt{\frac{N}{3}}.$$

und dann nach $1/\lambda_x$ auflösen, erhalten wir die der Gleichung (6) entsprechende Endformel

$$\frac{1}{\lambda_x} = n_x \sigma_x = \kappa \left(\frac{q'}{q \lambda_a} + \frac{\lambda}{3 l_F} \cdot \frac{1}{l'_F} \cdot \operatorname{ctg} \frac{d}{2 l'_F} \right). \quad (12)$$

C. *Vergleich der Ergebnisse.* Beim Vergleich der beiden Endformeln (6) und (12) können wir die Tatsache benutzen, daß die ungestrichenen Größen sich auf gewöhnliches Wasser beziehen. Wegen der geringen Absorption stimmen hier die Größen l_F und l_B praktisch überein, es ist also

$$l_B = l_F = \sqrt{\frac{\lambda \lambda_a}{3}} = l, \quad \text{d. h.}, \quad \frac{\lambda}{3 l_F} = \frac{l_B}{\lambda_a} = \frac{l_F}{\lambda_a} = \frac{l}{\lambda_a}.$$

Mit Benutzung dieser Beziehungen läßt sich Gleichung (12) in genau dieselbe funktionale Form bringen wie Gleichung (6), es wird nämlich

$$n_x \sigma_x = \kappa \left(\frac{q'}{q \lambda_a} + \frac{l}{\lambda_a} \frac{1}{l_F} \operatorname{Ctg} \frac{d}{2 l_F} \right); \quad (13)$$

der einzige Unterschied gegenüber Gleichung (6) besteht darin, daß hier l'_F an Stelle von l'_B steht.

Die beiden Diffusionslängen und damit die rechten Seiten der beiden Endformeln (6) und (13) können sich nun zwar im Grenzfall reiner Absorption in dicker Schicht bis um einen Faktor $\sqrt{3}$ unterscheiden. Die Ausrechnung zeigt nun aber, daß bei den im folgenden verwendeten Absorberschichten immer $d \ll 2 l'_F$ und damit auch $d \ll 2 l'_B$ ist. In diesem Fall können wir aber den Ctg durch den Reziprokwert seines Arguments ersetzen und erhalten nach beiden Methoden übereinstimmend die Endformel:

$$n_x \sigma_x = \kappa \left(\frac{q'}{q \lambda_a} + \frac{2 l}{d \lambda_a} \right), \quad (14)$$

die wir damit als recht gut gesichert ansehen können und im folgenden der Auswertung zugrunde legen. Die in den Vernachlässigungen liegenden Abweichungen betragen in allen Fällen wenige Prozent und liegen damit innerhalb der Meßgenauigkeit. Bemerkenswert ist, daß auf der rechten Seite dieser Gleichung keine Größen mehr vorkommen, die sich auf die untersuchte Substanz beziehen, daß sich damit also der Absorptionsquerschnitt der betreffenden Substanz explizit berechnen läßt.

Für den Fall, daß im Innern des Absorbers keine Verlangsamung erfolgt ($q' = 0$)¹⁾, sieht man aus (14), daß zwischen dem Meßeffect κ und der Dicke der Absorberplatte direkte Proportionalität besteht. Da das Verlangsamungsglied meist klein ist gegen das zweite Glied, besteht die Proportionalität näherungsweise auch noch für wasserstoffhaltige Schichten. Wir werden diese Tatsache in Abschnitt V experimentell bestätigen.

¹⁾ Für diesen Fall ist das der Formel (14) entsprechende Ergebnis schon von Ramm (l. c.) angegeben und der Auswertung seiner Messungen zugrunde gelegt worden.

D. Abschätzung geometrischer Faktoren. Die in der theoretischen Behandlung gemachten idealen Voraussetzungen sind in der praktischen Anordnung nicht vollkommen erfüllt, insbesondere müssen wir den Einfluß der nicht vollständigen Homogenität des Neutronenfeldes sowie der endlichen Ausdehnung der Absorberplatte betrachten.

Da es bei der vorliegenden Anordnung, wie besonders aus der Behandlung im eindimensionalen Modell hervorgeht, wesentlich nur auf die Symmetrie in bezug auf die Absorberebene ankommt, lassen wird die Inhomogenität der Neutronendichte innerhalb der Ebene der Absorberplatte außer Betracht und betrachten zunächst nur den Einfluß des Dichteabfalls in der Richtung senkrecht zur Absorberplatte. Dieser Dichteabfall beruht auf der Abnahme der Quellstärke in dem Raum außerhalb der beiden Ringe und läßt sich modellmäßig annähern, indem wir uns zunächst konstante Quellstärke im ganzen Raum denken und den Dichteabfall durch zwei Absorberebenen, praktisch etwa zwei Cadmiumbleche, hervorgerufen denken, die parallel zur Mittelebene auf beiden Seiten außerhalb der beiden Ringe angebracht sind. Die Absorption in diesen Cd-Bleichen verringert sowohl die Dichte ohne, wie auch die Dichte mit Absorberplatte und verschiebt dabei das Verhältnis der beiden Meßwerte. Die Durchrechnung zeigt jedoch, daß bei der hier erreichten Homogenität des Feldes dieser Einfluß immer kleiner als $1/2\%$ bleibt und daher unberücksichtigt bleiben kann.

Der zweite Punkt betrifft die endliche Größe der Absorberplatte. Da sich ein Absorptionsvorgang in einem bestimmten Raumpunkt nach dem Gesetz $\sim \frac{e^{-r/l}}{r}$ in seiner Umgebung bemerkbar macht und eine Vergrößerung der Absorberplatte um den Radius dr die Fläche um $2\pi r dr$ vergrößert, geben die Randpartien Beiträge $\sim e^{-r/l}$. Für stark absorbierende Platten erhält man wegen der zusätzlichen Absorption in der Platte noch einen etwas rascheren Abfall der Randbeiträge. Theoretische Abschätzungen lassen sich zwar angeben, sind jedoch insbesondere für das kleinere Plattenformat von $8 \times 8 \text{ cm}^2$ zu ungenau. Wir stützen uns deshalb in diesem Punkt auf einige empirische Gesetzmäßigkeiten, die sich aus den im nächsten Abschnitt dargestellten Messungen ergeben.

V. Eich- und Kontrollmessungen.

1. Der Einfluß der Plattengröße.

Die Abhängigkeit des gemessenen Absorptionseffektes von der Plattengröße wurde an einer Dysprosiumoxydschicht untersucht, die in einer

Dicke von 15 mg Oxyd/cm² auf einer Aluminiumfolie von 8×8 cm² aufgebracht war. Von dieser Anfangsgröße wurde die Absorberschicht schrittweise verkleinert bis zu der Endgröße von $2,2 \times 3,6$ cm². Das letzte Format wurde deshalb gewählt, weil es für einige seltene Stoffe (Rhodium, Indium, Rhenium) als Meßformat Verwendung fand. Nach größeren Absorberflächen hin wurden die Messungen ergänzt durch solche an zwei Kupferplatten von 2 mm Dicke in den Größen 8×8 und 14×24 cm². Die Ergebnisse sind in Fig. 3 dargestellt.

Eingetragen ist das Verhältnis der Dichte ohne zur Dichte mit Absorber in Abhängigkeit von einem Radius, der einem der Platte flächengleichen Kreis entspricht. Man sieht, wie dieses Verhältnis mit wachsender Absorbergröße sehr rasch einem Grenzwert zustrebt, der sich recht gut angeben läßt. Die Differenzen gegen den Grenzwert sind in willkürlichen Einheiten logarithmisch mit in die Figur eingetragen und liegen in sehr guter Annäherung auf einer Geraden, der Grenzwert wird also exponentiell erreicht. Die Abfallsbreite, nach den Ausführungen des vorigen Abschnitts eine „effektive“ Diffusionslänge, ergibt sich zu 2,4 cm, also etwas kleiner als die Diffusionslänge in Wasser, wie auch zu erwarten ist.

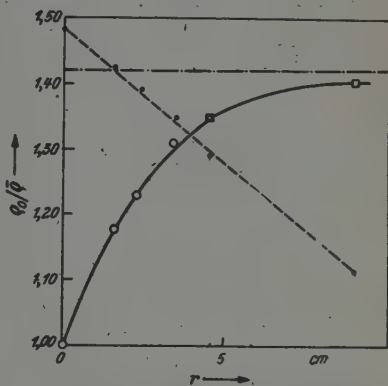


Fig. 3. Abhängigkeit des Verhältnisses ρ_0/ρ von der Größe der Absorberplatte.

2. Die Abhängigkeit von der Absorberdicke.

Zwischen dem Dichteverhältnis $1 + \kappa = \rho_0/\rho$ und der Dicke der Absorberplatte muß nach den Ausführungen des IV. Abschnitts ein linearer Zusammenhang bestehen. Zur Prüfung dieses Tatbestandes dienten die im folgenden dargestellten Meßreihen, die unter etwas verschiedenen Bedingungen an einer Reihe von Stoffen durchgeführt wurden.

Die eine Meßreihe wurde an Kupferblechen von $1/2$, 2 und 3,7 mm Dicke durchgeführt, eine andere an einer Platte, die aus Kobaltcarbonat und Paraffin hergestellt war und die stufenweise von einer Dicke von 1,2 cm auf 0,58 und 0,28 cm abgehobelt wurde. Fig. 4 zeigt die Ergebnisse. Für Kupfer liegen die Meßwerte sehr gut auf einer Geraden, während sich für Kobalt bei der größten Plattendicke ein kleiner Abfall unter den linearen

Verlauf zeigt, der qualitativ bei Vorhandensein verlangsamender Substanz zu erwarten ist und auch quantitativ mit Formel (14) übereinstimmt.

Eine zweite Serie von Messungen wurde an Bor, Lithium und Cadmium in der Weise ausgeführt, daß steigende Mengen von Borax, Lithiumcarbonat und Cadmiumnitrat mit reiner Kohle vermischt und in ein flaches Aluminiumgefäß von 15 cm Durchmesser eingefüllt wurden. Hier wurde also nicht die Dicke geändert, sondern die Konzentration erhöht. Auch in diesem Falle ist nach Gl. (14) ein linearer Zusammenhang zu erwarten. Die Ergebnisse der Messungen sind in Fig. 5 eingetragen. Für Bor und Lithium

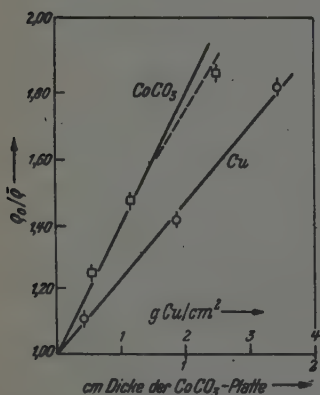


Fig. 4. Abhängigkeit des Verhältnisses q_0/\bar{q} von der Dicke der Absorberplatte.

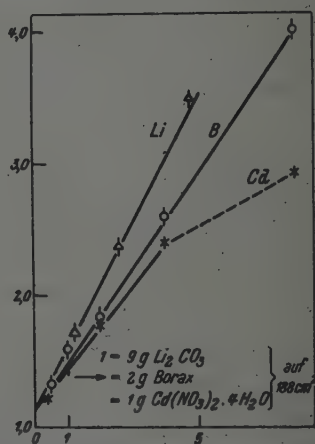


Fig. 5. Abhängigkeit des Verhältnisses q_0/\bar{q} von der Konzentration des Absorbermaterials.

ergeben sich tatsächlich Geraden, während die Messungen an Cadmium bei der höchsten Konzentration einen Abfall unter den linearen Verlauf zeigen. Der letzteren Erscheinung dürfte allerdings keine grundsätzliche Bedeutung zukommen, da sie vermutlich mit der Herstellung des Absorbermaterials zusammenhängt. Während nämlich die kleinen Cadmiumzusätze so mit dem Kohlepulver verbunden wurden, daß das Cadmiumnitrat zunächst in Wasser gelöst, die Kohle gleichmäßig damit befeuchtet und dann getrocknet wurde, wurde die größte Cadmiummenge einfach in fester Form zugesetzt. Wegen des außerordentlich großen Absorptionsquerschnittes von Cadmium kommt es hierbei aber auf feinste und gleichmäßigste Verteilung an, die offenbar nicht in genügendem Maße erreicht wurde. Bei den Cadmiummessungen beschränken wir uns deshalb im folgenden auf den ersten, ausgezogenen Teil der Kurve.

Aus den Steigungen der Geraden lassen sich sofort Verhältniszahlen für die Wirkungsquerschnitte der drei Stoffe entnehmen. Man findet

$$\sigma_{\text{Li}} : \sigma_{\text{B}} : \sigma_{\text{Cd}} = 1 : 8,6 : 51.$$

Die genauere Auswertung, die im nächsten Abschnitt vorgenommen wird, ergibt, wie hier schon vorweggenommen sei, die Absolutwerte (in Einheiten 10^{-24} cm^2):

$$\sigma_{\text{Li}} = 58, \quad \sigma_{\text{B}} = 495, \quad \sigma_{\text{Cd}} = 2950,$$

in Übereinstimmung mit bekannten Werten. Im ganzen können wir also die vorliegenden Messungen als eine volle Bestätigung der Theorie ansehen.

3. Dickenabhängigkeit bei kleinen Plattengrößen.

Zur Auswertung der Messungen an kleinen Plattengrößen ist die Kenntnis der Dickenabhängigkeit des Verhältnisses q_0/\bar{q} für das betreffende Format erforderlich. Messungen hierüber wurden für das Format $2,2 \times 3,6 \text{ cm}^2$ wieder an Dysprosiumoxydschichten von 15 mg/cm^2 ausgeführt, welche in einfacher, doppelter und dreifacher Schicht untersucht wurden. Fig. 6 zeigt das Ergebnis dieser Messungen. Die Meßwerte liegen wieder mit sehr guter Genauigkeit auf einer Geraden, die Dickenabhängigkeit ist also dieselbe wie bei größeren Plattenformaten. Diese an sich unerwartete Tatsache vereinfacht die Auswertung der Messungen an kleineren Formaten ganz beträchtlich. Sie besagt nämlich, daß das Verhältnis des Meßeffectes κ zur entsprechenden Größe bei unendlich ausgedehnter Absorberschicht von der Absorberdicke praktisch unabhängig und durch eine für das betreffende Format ein für allemal feste Zahl gegeben ist. Für das Format $8 \times 8 \text{ cm}^2$ entnehmen wir der Fig. 3 für diesen Korrektionsfaktor den Wert 1,2, für das Format $2,2 \times 3,6 \text{ cm}^2$ den Faktor 2,34.

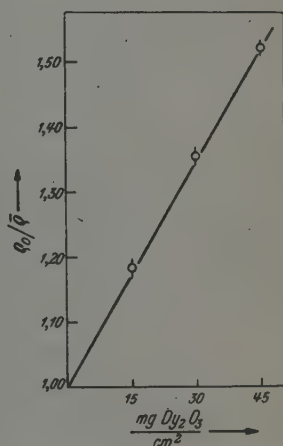


Fig. 6. Dickenabhängigkeit von q_0/\bar{q} für das Format $2,2 \times 3,6 \text{ cm}^2$.

4. Die Absorption im Indikator.

Um die durch den Indikator selbst verursachte Dichteverminderung festzustellen, wurde ein Meßindikator einseitig bzw. doppelseitig mit einem bzw. zwei weiteren gleichartigen Indikatoren bedeckt und exponiert. Die

Aktivität des Meßindikators sank dabei um 6 bzw. 12% ab. Wenn diese Werte auch nicht sehr genau sind, so scheinen sie doch zu zeigen, daß die Linearität des Effektes sich bis zu den kleinsten Absorbergrößen herunter fortsetzt. Wir schließen, daß der Meßindikator allein die Dichte ebenfalls um 6% herabsetzt. Eine Korrektur brauchen wir hierfür im allgemeinen nicht anzubringen, da bei nicht allzu verschiedenen Dichtewerten die Korrektur mit und ohne Absorber dieselbe ist und bei der Verhältnisbildung wieder herausfällt. Nur wenn der Dichtewert mit Absorber sehr klein ist gegen die Dichte ohne Absorber, z. B. bei Verwendung eines Cadmiumbleches als Absorberplatte, können wir annehmen, daß hier das Einbringen des Indikators keine weitere Verringerung mehr hervorruft, so daß es hier angebracht ist, an dem Meßwert ohne Absorber eine Korrektur von 6% anzubringen.

5. Weitere Korrekturen.

Die Verwendung von Dyprosiumoxyd als Indikatormaterial bietet den Vorteil, daß hier die Aktivierung praktisch nur durch thermische Neutronen erfolgt. Dies wurde mit der vorliegenden Anordnung erneut bestätigt, indem eine Messung durchgeführt wurde, bei der der Indikator allseitig mit Cadmium von 0,7 mm Dicke bedeckt war. Der Resteffekt, der hier noch festgestellt wurde, betrug etwa 1,5% des Effektes ohne Cadmium. Eine Korrektur wurde hierfür im allgemeinen nicht angebracht.

Der Einfluß der Resonanzabsorption in der Absorberschicht wurde einmal für ein 1 mm dickes Silberblech und zweitens für den in Absatz 2 beschriebenen Borabsorber mit dem höchsten Borzusatz untersucht, und zwar wurde für diese Absorber eine Dichtemessung für Neutronen von 1 e-Volt Energie durchgeführt. Hierzu diente ein allseitig mit Cadmium umgebener Indikator aus Indiumblech. Er zeigte in beiden Fällen eine Verminderung der Neutronendichte durch die Absorberplatte um etwa 8% an. Im Falle des Silbers ist diese auf die Absorption in Resonanzbändern, im Falle des Bors auf den Ausläufer des thermischen Wirkungsquerschnittes in das Gebiet höherer Energien zurückzuführen. In beiden Fällen ist der Effekt ($\kappa \sim 0,08$) klein gegen den Absorptionseffekt für thermische Neutronen ($\kappa \sim 3$ bis 4). Von einer Korrektur hierfür wurde deshalb im allgemeinen ebenfalls abgesehen.

VI. Messung von Absorptionsquerschnitten.

Die Gesamtheit der zur Bestimmung von Absorptionsquerschnitten durchgeführten Messungen ist mit den näheren Angaben in Tabelle 1 zusammengestellt. Bei den meisten Stoffen konnten die Wirkungsquer-

schnitte ohne Heranziehung des Streuquerschnitts nach der Formel (14) des IV. Abschnitts direkt ermittelt werden. Eine Ausnahme macht der Wasserstoff selbst, der in der vorliegenden Anordnung der Träger des Verlangsamungs- und Diffusionsvorganges ist und in der Auswertung die Rolle der Bezugssubstanz spielt. An die Stelle einer direkten Messung des Absorptionsquerschnittes trat hier eine Wiederholung der Fermischen Albedomessung: der eine der beiden Vergleichsindikatoren wurde einseitig mit einem Cd-Blech von 0,7 mm Dicke und 15 cm Durchmesser bedeckt und seine Aktivität mit der des zweiten Indikators verglichen, der ohne Cadmium exponiert wurde. Nach Abzug des Nulleffektes ergab sich ein Intensitätsverhältnis von

$$5920 : 510.$$

Nach Ausweis der im vorigen Abschnitt beschriebenen Messungen haben wir von beiden Zahlen noch 1,5% des größeren Effektes als Wirkung schneller Neutronen in Abzug zu bringen, ferner den größeren Effekt um etwa 6% zu erhöhen, um der Dichteverminderung durch den Indikator Rechnung zu tragen. Mit diesen Korrekturen ergibt sich ein Intensitätsverhältnis von

$$I_0 : I_c = 14,8 \pm 1.$$

Das Quadrat dieser Zahl gibt näherungsweise die Anzahl N der elastischen Stöße, die ein Neutron in Wasser bis zu seiner Absorption zurücklegt, also mit anderen Worten das Verhältnis von Streuquerschnitt zum Absorptionsquerschnitt an. Nach der etwas genaueren Formel von Bouwers¹⁾ ist

$$N = \left(\frac{I_0}{I_c}\right)^2 \left(\frac{1+\beta}{2}\right)^2,$$

wo β , die eigentliche Albedo, selbst mittels der Gleichung $\beta = 1 - 4/\sqrt{3N}$ aus der Zahl N zu berechnen ist. Man erhält so

$$N = 180 \pm 30.$$

Wenn auch die Fehlergrenzen recht groß sind und zu ihrer Verbesserung eingehendere Spezialuntersuchungen über den Beitrag der schnellen Neutronen u. a. erfordern würden, so erkennt man doch, daß dieser Wert in Übereinstimmung mit neueren Absorptionsmessungen an Wasserstoff wesentlich höher liegt als die ursprünglich von Fermi angegebene Zahl $N = 124$. Wir rechnen im folgenden mit der obigen Zahl $N = 180$.

Da wir die Wirkungsquerschnitte des Wasserstoffs zur Auswertung der übrigen Absorptionsmessungen benötigen, stellen wir hier die benutzten

¹⁾ A. Bouwers, *Physica* VII, 193, 1940.

Tabelle 1. Absorptionsmessungen.

Element	Verbindung	Substanz g	Paraffin + Zusätze g	Größe der Absorberplatte (cm)	Dichte- verhältnis $\rho_0/\bar{\rho} = 1 + \alpha$	Wirkungsquerschnitt in 10^{-24} cm ²
1 H	H ₂ O	—	(Cd-Blech)	15 cm Ø, $d = 0,07$	14,8	$\sigma_H = 0,25$
3 Li	Li ₂ CO ₃	5 bis 45	Kohlepulver in Al-Gef.	15 cm Ø, $d = 0,8$	$1 + \frac{0,05}{g}$	$\sigma_{Li} = 58$
4 Be	Be	108	76	$14,5 \times 17 \times 0,9$	1,00	$\sigma_{Be} < 0,03$
5 B	Na ₂ B ₄ O ₇	1	65 + 100 g C	$14,5 \times 17 \times 0,7$	1,13	$\sigma_B = 495$
	· 10 H ₂ O	1 bis 16	Kohlepulver in Al-Gef.	15 cm Ø, $d = 0,8$	$1 + \frac{0,18}{g}$	$\sigma_B = 495$
	(Al-Indikator)	3	150 cm ³ H ₂ O in Al-Gef.	15 cm Ø, $d = 0,8$	1,54	$\sigma_B = 505$
		1,5	150 cm ³ H ₂ O in Al-Gef.	15 cm Ø, $d = 0,8$	1,35	$\sigma_B = 600$
6 C		s. Silicium				$\sigma_C < 0,06$
7 N	NH ₄ NO ₃	50	30	$8 \times 8 \times 1,1$	1,11	$\sigma_N = 1,05$
9 F	CaF ₂	200	100	$14,5 \times 17 \times 0,9$	1,025	$\sigma_{CaF_2} = 0,37$
11 Na	Na ₂ CO ₃	150	60	$14,5 \times 17 \times 0,73$	1,03	$\sigma_F \approx 0,05$
12 Mg	Mg	215	—	$17 \times 18 \times 0,4$	1,06	$\sigma_{Na} = 0,38$
13 Al	Al	173	—	$17 \times 18 \times 0,2$	1,06	$\sigma_{Mg} = 0,31$
14 Si	SiC	220	40	$14,5 \times 17 \times 0,55$	1,00	$\sigma_{Al} = 0,42$
15 P	P	150	70	$14,5 \times 17 \times 0,75$	1,03	$\sigma_{Si} < 0,06$
16 S	S	145	45	$14,5 \times 17 \times 0,56$	1,08	$\sigma_P = 0,23$
17 Cl	NaCl	20	8	$8 \times 8 \times 0,4$	1,73	$\sigma_S = 0,62$
19 K	KHCO ₃	200	45	$14,5 \times 17 \times 0,6$	1,11	$\sigma_{Cl} = 24$
20 Ca	CaO	218	77	$14,5 \times 17 \times 0,9$	1,03	$\sigma_K = 2,0$
22 Ti	Ti	45	25	$8 \times 8 \times 0,75$	1,30	$\sigma_{Ca} = 0,28$
25 Mn	K MnO ₄	120	27	$14,5 \times 17 \times 1,2$	1,28	$\sigma_{Ti} = 3,8$
26 Fe	Fe	1030	—	$20,5 \times 13,2 \times 0,5$	1,75	$\sigma_{Mn} = 11,2$
27 Co	CoO ₂	240	110	$14,5 \times 17 \times 1,2$	1,90	$\sigma_{Fe} = 1,6$
28 Ni	Ni	166	—	$15,3 \times 21 \times 0,07$	1,22	$\sigma_{Co} = 24,0$
	Cu	1020	—	$13,3 \times 22,2 \times 0,37$	1,83	$\sigma_{Ni} = 3,6$
						$\sigma_{Cu} = 2,2$

 $\sigma_B = 500$
 ± 20

Element	Verbindung	Substanz g	Paraffin + Zusätze g	Größe der Absorberplatte (cm.)	Dichte- verhältnis $\rho_0/\rho = 1 + \kappa$	Wirkungsquerschnitt in 10^{-24} cm ²
30 Zn	Zn	790	—	13,4 × 21 × 0,38	1,37	$\sigma_{Zn} = 1,2$
33 As	As	200	60	14,5 × 17 × 0,3	1,25	$\sigma_{As} = 3,5$
34 Se	Se	27	17	8 × 8 × 0,4	1,35	$\sigma_{Se} = 12,0$
35 Br	NaBr	200	50	14,5 × 17 × 0,4	1,19	$\sigma_{Br} = 3,2$
38 Sr	SrO	255	40	14,5 × 17 × 0,7	1,10	$\sigma_{Sr} = 1,5$
40 Zr	Zr(OH) ₄	156	114	14,5 × 17 × 0,8	1,00	$\sigma_{Zr} < 0,35$
42 Mo	Mo	30	—	12 × 21,5 cm ²	1,05	$\sigma_{Mo} = 5,8$
45 Rh	Roh	0,865	—	2,2 × 3,6 cm ²	1,48	$\sigma_{Rh} = 148$
47 Ag	Ag	395	—	15 × 25 × 0,1	4,2	$\sigma_{Ag} = 58$
48 Cd	Cd(NO ₃) ₂ ·4H ₂ O	0,5-2	C-Pulver in Al-Gef.	15 cm Ø, d = 0,8	$1 + \frac{0,322}{g}$	$\sigma_{Cd} = 2950$
49 In	In	0,935	—	2,2 × 3,6 cm ²	1,46	$\sigma_{In} = 147$
50 Sn	Sn	225	—	8 × 8 × 0,5	1,07	$\sigma_{Sn} = 0,40$
51 Sb	Sb ₂ O ₃	200	81	14,5 × 17 × 0,6	1,16	$\sigma_{Sb} = 4,4$
52 Te	Te	53	10	8 × 8 × 0,3	1,11	$\sigma_{Te} = 2,95$
53 J	PbJ ₂	150	40	14,5 × 17 × 0,4	1,09	$\sigma_J = 5,0$
56 Ba	BaCO ₃	150	65	14,5 × 17 × 0,5	1,02	$\sigma_{Ba} = 0,95$
57 La	La(CH ₃ COO) ₃	45	25	8 × 8 × 0,45	1,11	$\sigma_{La} = 9,1$
66 Dy	Dy ₂ O ₃	0,97	—	8 × 8 cm ²	1,35	$\sigma_{Dy} = 745$
73 Ta	H ₃ TaO ₄	20	20	8 × 8 × 0,45	1,09	$\sigma_{Ta} = 11,5$
74 W	W	36	—	10 × 20 cm ²	1,13	$\sigma_W = 20,5$
75 Re	Re	0,945	—	2,2 × 3,6 cm ²	1,20	$\sigma_{Re} = 104$
79 Au	Au	8,65	—	$\pi \cdot 2,8^2$, kreisf.	1,58	$\sigma_{Au} = 72$
80 Hg	HgO	2,28	60 + 80 g C	14,5 × 17 × 0,6	1,09	$\sigma_{Hg} = 325$
81 Tl	Tl	105	—	8 × 8,2 × 0,2	1,10	$\sigma_{Tl} = 2,2$
82 Pb	Pb	1270	—	14 × 20 × 0,4	1,05	$\sigma_{Pb} = 0,32$
83 Bi	Bi	4200	—	24 × 24 × 0,7	1,08	$\sigma_{Bi} = 0,33$
90 Th	ThO ₂	50	15	8 × 8 × 0,3	1,12	$\sigma_{Th} = 7,1$

Werte nochmals zusammen. Wir setzen für Wasserstoff (in Einheiten 10^{-24} cm^2)

$$\sigma_s = 45, \quad \sigma_a = 0,25,$$

dementsprechend

$$\lambda = \lambda_s = 0,33 \text{ cm}, \quad \lambda_a = 60 \text{ cm}, \quad l = 2,58 \text{ cm}.$$

Alle übrigen zur Berechnung der Absorptionsquerschnitte nötigen Daten sind in Tabelle 1 (S. 224/225) aufgeführt. Die vorderen Spalten enthalten die untersuchten Elemente, Verbindungen; die Substanzmengen und Zusatzstoffe in den Absorberschichten sowie die verwendeten Plattenformate. In der zweitletzten Spalte sind unmittelbar die gemessenen Werte für das Dichteverhältnis $\rho_0/\bar{\rho} = 1 + \kappa$ angegeben. Für die Berechnung der Wirkungsquerschnitte wurden die daraus zu ersiehenden Werte von κ auf unendlich ausgedehnte Absorberschicht umgerechnet, indem sie für das Format $8 \times 8 \text{ cm}^2$ mit dem Faktor 1,20, für das Format $2,2 \times 3,6 \text{ cm}^2$ mit dem Faktor 2,34 multipliziert wurden. Die entsprechende Größenkorrektur für die größeren Plattenformate betrug zwischen 5 und 10% und wurde, soweit es die Meßgenauigkeit sinnvoll erscheinen ließ, ebenfalls angebracht. Bei der Messung an Silberblech wurde ferner wegen des von 1 stark verschiedenen Dichteverhältnisses noch der Einfluß der schnelleren Neutronen ebenso wie bei der Albedomessung berücksichtigt.

Bei den Messungen an Lithium, Bor und Cadmium, die mit verschiedenen Absorbermengen ausgeführt wurden, konnten die Wirkungsquerschnitte ohne Berücksichtigung der Absorption in den Gefäßwänden schon aus der Steigung der in Fig. 6 eingezeichneten Geraden ermittelt werden. Eine theoretische Formel, die die Absorption in den Gefäßwänden mit berücksichtigt, wurde nur bei der Auswertung der Messungen an Boraxlösungen verwendet. Für den Wirkungsquerschnitt des Aluminiums wurde dabei der Wert 0,4 eingesetzt.

Die Fehlergrenzen sind bei schwachen Absorbern mit $\kappa \lesssim 0,05$ im wesentlichen durch den statistischen Fehler gegeben und betragen hier nach kleineren κ -Werten zunehmend von 20% in einigen Fällen bis 50%. Bei stärkeren Absorbern mit $\kappa \gtrsim 0,20$ kann die Genauigkeit auf Grund der inneren Übereinstimmung der Messungen im allgemeinen, soweit nicht besonders eingehende Untersuchungen (s. Abschnitt V) vorliegen; zu etwa 10% angenommen werden.

In den Fällen, wo kein meßbarer Effekt festgestellt werden konnte, wurde der in der Tabelle angegebene obere Grenzwert des Wirkungsquerschnittes für einen Effekt von 1% berechnet.

In einigen Fällen wurden die angegebenen Wirkungsquerschnitte durch Kombination verschiedener Messungen an Verbindungen der betreffenden Elemente ermittelt, so im Falle des Fluors, das als CaF_2 untersucht wurde, durch Kombination mit der Messung an CaO , im Falle des Mangans durch Kombination mit der Messung an Kalium, im Falle des Broms durch Kombination mit der Messung an Natrium. In anderen Fällen, so bei Chlor und Jod, wurde der Beitrag des anderen Bestandteils, in beiden Fällen des Natriums, wegen seiner Kleinheit nicht berücksichtigt.

VII. Diskussion der Ergebnisse und Vergleich der heute bekannten Wirkungsquerschnitte.

Zur vergleichenden Beurteilung der gewonnenen Ergebnisse sind in Tabelle 2 (S. 232/234) die heute bekannten Wirkungsquerschnitte zusammengestellt. Diese Tabelle besteht aus vier großen Spalten I bis IV. Spalte I enthält die Gesamtquerschnitte, und zwar in der ersten Unterspalte die Werte von Dunning u. Mitarb. (D.), in zwei weiteren spätere Messungen von Goldhaber und Briggs (GB.) sowie von Whitaker u. Mitarb. (WB.)¹⁾. Ergänzende Einzelmessungen verschiedener Autoren sind zum Teil mit in die Tabelle aufgenommen und durch vorgesetzte kleine Buchstaben bezeichnet, deren Bedeutung am Schluß der Tabelle zusammengestellt ist. Spalte II enthält die Streuquerschnitte, und zwar im wesentlichen nach Messungen von Goldhaber und Briggs (GB.), daneben ergänzende Messungen von Whitaker u. Mitarb. (WB.) und weitere Einzelmessungen. Spalte III enthält die Ergebnisse von Aktivitätsmessungen. Hier sind zunächst die Prozentzahlen der aktiven Isotope mit ihren Halbwertszeiten eingetragen, weitere Unterspalten enthalten die Messungen von Sinma und Yamasaki (SY.), Goldhaber und Neal (GN.), Rasetti (R.) und Houtermans (H.). Die angegebenen Wirkungsquerschnitte beziehen sich immer auf das Durchschnittsatom, können also bei Vorhandensein mehrerer aktiver Isotope einfach addiert werden. Soweit die für einen bestimmten Stoff angegebenen Prozentzahlen nicht die Summe 100 ergeben, stellen jedoch die Ergebnisse Teilwerte dar, die nur bedingt mit anderen Ergebnissen vergleichbar sind. Spalte IV schließlich enthält die Ergebnisse der eigentlichen Absorptionsmessungen, und zwar zunächst neben Einzelmessungen die Meßreihen von Lapointe und Rasetti (LR.) und von Ramm (Rm.), in der letzten Unterspalte die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit (V.). In der Diskussion werden wir zunächst die Werte

¹⁾ Die genaueren Literaturangaben sind am Schluß der Tabelle 2 zusammengestellt.

dieses Abschnitts unter sich vergleichen, weiter aber auch die Aktivitätsmessungen sowie die Differenz von Gesamt- und Streuquerschnitt zum Vergleich heranziehen. Dabei ist zu beachten, daß die Angaben der III. und Teile der IV. Spalte als Relativwerte aufzufassen sind, bei deren Diskussion die angenommenen Bezugswerte berücksichtigt werden müssen. Diese sind in die betreffenden Spalten mit aufgenommen und durch Schrägdruck gekennzeichnet.

Um einen Ausgangspunkt für die Beurteilung und den Vergleich der einzelnen Werte zu gewinnen, betrachten wir zunächst die besonders wichtigen und hier eingehend untersuchten Stoffe Bor, Mangan und Kupfer etwas genauer.

An Bor wurden, wie aus Tabelle 1 zu ersehen ist, vier Meßreihen durchgeführt. In der ersten wurde Borax mit Kohlepulver vermischt einmal in ein Aluminiumgefäß gefüllt, das andere Mal mit Paraffin zu einer festen Platte vergossen. Die Übereinstimmung der Ergebnisse macht zunächst einen möglicherweise von der Verwendung des Aluminiumgefäßes oder von der Art der Herstellung der paraffinierten Platten herrührenden Fehler außerordentlich unwahrscheinlich. Die dritte Meßreihe wurde an einer Boraxlösung durchgeführt und hatte vor allem den Zweck, einen bei den ersten beiden Meßreihen etwa vorhandenen Einfluß der Körnigkeit des Absorbermaterials, der sich bei der Messung an Cadmium störend bemerkbar gemacht hatte, auszuschalten. Sie liefert einen Borwirkungsquerschnitt $\sigma_B = 505$, also ein mit den beiden ersten Meßreihen übereinstimmendes Resultat.

Die vierte Meßreihe schließlich wurde wieder an einer Boraxlösung, diesmal aber nicht mit Dysprosium-, sondern mit Aluminiumindikatoren ausgeführt, und ergibt mit $\sigma_B = 600$ einen Wirkungsquerschnitt, der um 20% höher liegt als bei den drei ersten Meßreihen. Bei den weiter unten dargestellten Messungen an Kupfer tritt genau derselbe Unterschied zwischen Messungen mit Dysprosium- und solchen mit Aluminiumindikatoren wieder auf, so daß offenbar eine systematische Abhängigkeit der Ergebnisse vom Indikatormaterial vorliegt. Man wird diese Erscheinung durch die Annahme deuten, daß die Wirkungsquerschnitte von Dysprosium- und Aluminium in verschiedener Weise von der Neutronengeschwindigkeit abhängen, und zwar so, daß Dysprosium auf eine höhere Effektivgeschwindigkeit anspricht als Aluminium. Für ein verschiedenes Verhalten dieser beiden Stoffe spricht schon die Tatsache, daß Dysprosium einen besonders hohen Wirkungsquerschnitt, also wahrscheinlich eine Resonanzstelle in der Nähe des thermischen Gebietes hat, während Aluminium mit seinem kleinen Wirkungsquerschnitt vermutlich dem $1/v$ -Gesetz folgt.

Eine weitere Stütze findet diese Deutung unserer Ergebnisse in dem Vergleich mit Messungen anderer Autoren. Die ersten drei Meßreihen zeigen vollkommene Übereinstimmung mit denjenigen von Norling und Fleischmann¹⁾, die ebenfalls mit Dysprosiumindikatoren ausgeführt sind und einen Borquerschnitt $\sigma_B = 503$ ergaben. Von anderer Seite werden demgegenüber wesentlich höhere Wirkungsquerschnitte für Bor angegeben, so von Horvath und Salant²⁾ $\sigma_B = 550$, von Hoffmann und Livingston³⁾ sogar $\sigma_B = 650$. Lapointe und Rasetti⁴⁾ setzen als Bezugswert für ihre Messungen $\sigma_B = 600$ ein.

Eine Betrachtung der Versuchsanordnungen zeigt nun, daß in diesen Fällen der Nachweis der Neutronen aller Wahrscheinlichkeit nach mit Nachweismitteln erfolgt ist, die dem $1/v$ -Gesetz folgen. Unsere Annahme beseitigt also auch die Diskrepanz zwischen diesen Messungen und denjenigen von Norling und Fleischmann. Soweit der Vergleich der Ergebnisse in solchen Fällen einen Unterschied von 20% in dieser Richtung ergibt, werden wir also immer noch von Übereinstimmung sprechen können. Darüber hinausgehende Unterschiede können als Hinweise auf Abweichungen vom $1/v$ -Gesetz angesehen werden, doch soll auf diese Fragen im Rahmen der vorliegenden Diskussion nicht eingegangen werden.

Bei den Kupfermessungen betrachten wir zunächst noch einmal die in Fig. 4 dargestellte Dickenabhängigkeit des Effektes. Aus der Tatsache, daß der Meßeffect der Absorberdicke genau proportional ist, läßt sich ein wichtiger Schluß auf die Zulässigkeit unserer theoretischen Formeln ziehen. In den in Abschnitt IV dargestellten Näherungsrechnungen mußte beidemal ein Punkt unberücksichtigt bleiben, nämlich die Anisotropie in dem Geschwindigkeitsfeld der Neutronen in der Nähe der Absorberplatte. Mit einer solchen ist besonders im Falle von Metallplatten zu rechnen, während bei den Paraffinplatten die Isotropie durch die Streuwirkung der Wasserstoffatome weitgehend gesichert wird. Eine Anisotropie muß sich nun mit steigender Absorption immer stärker ausprägen. Der exakt lineare Verlauf unserer Meßwerte zeigt aber, daß der nach unserer Näherungsrechnung bestimmte Wirkungsquerschnitt keine Dickenabhängigkeit aufweist. Das heißt offenbar, daß auch für die dickste Absorberplatte die Anisotropie ohne Einfluß auf das Ergebnis bleibt, daß also das Näherungsverfahren auch in diesem Falle zulässig ist.

¹⁾ F. Norling u. R. Fleischmann, ZS. f. Phys. **108**, 483, 1938. — ²⁾ W. J. Horvath u. E. O. Salant, Phys. Rev. **59**, 154, 1941. — ³⁾ J. G. Hoffmann u. M. S. Livingston, ebenda **52**, 1228, 1937. — ⁴⁾ C. Lapointe u. F. Rasetti, ebenda **58**, 554, 1940.

Eine weitere Messung mit Aluminiumindikatoren ergab bei Kupfer genau wie bei Bor einen um 20 % höheren Wirkungsquerschnitt. Offenbar zeigt also der Wirkungsquerschnitt des Kupfers kein besonders anomales Verhalten. Diese Feststellung ist deshalb wichtig, weil andere direkte Absorptionsmessungen sowie die Differenzbildung von Gesamt- und Streuquerschnitt einen höheren Wert für den Absorptionsquerschnitt ergeben. Unser Wert zeigt andererseits Übereinstimmung mit den Aktivitätsmessungen. Diese ergeben übereinstimmend einen Wirkungsquerschnitt von etwa 1,6. Berücksichtigt man noch, daß diese Messungen auf einen Manganquerschnitt von 9,4 bezogen sind, welcher nach unseren und anderen Messungen um 20 bis 30 % zu niedrig ist, so ergibt sich recht gute Übereinstimmung mit dem vorliegenden Wert $\sigma_{\text{Cu}} = 2,2$.

Der Wirkungsquerschnitt des Mangans soll deshalb hier vorausgestellt werden, weil er, wie schon erwähnt, bei den Aktivitätsmessungen mehrfach als Bezugswert verwendet wurde. Dabei wurde der von Lapointe und Rasetti gefundene Wert $\sigma_{\text{Mn}} = 9,4$ eingesetzt. Die vorliegenden Messungen ergaben als übereinstimmendes Ergebnis mehrerer Meßreihen den Wert 11,2. Der Unterschied wird noch größer, wenn man bedenkt, daß der Wert von Lapointe und Rasetti selbst wieder als Relativwert unter Bezug auf den großen Borquerschnitt $\sigma_{\text{B}} = 600$ gewonnen ist und dementsprechend rund 20 % höher als der unsere sein müßte. Ein solcher höherer Manganwert ergibt sich tatsächlich aus Messungen von Whitaker und Bright¹⁾ ebenso wie aus der Kombination der Messungen von Goldhaber und Briggs mit denjenigen von Dunning. Es scheint deshalb berechtigt, den vorliegenden Manganwert als richtig anzusehen und bei-Vergleichen die Aktivitätswerte entsprechend umzurechnen.

Wir betrachten nun die in Tabelle 2 niedergelegten Ergebnisse der Reihe nach. Zunächst finden wir bei Lithium und Bor volle Übereinstimmung mit den Messungen von Norling und Fleischmann²⁾ sowie in dem oben besprochenen Sinn mit anderen Messungen. Für Beryllium, Kohlenstoff und Silicium können nur Abschätzungen gegeben werden, die die geringe Neutronenabsorption in diesen Stoffen bestätigen. Der Wert für Stickstoff stimmt mit demjenigen von Lapointe und Rasetti überein. Die gegenüber Lapointe und Rasetti um ein Mehrfaches gesteigerte Meßgenauigkeit zeigt sich besonders bei Fluor und Phosphor, wo die vorliegenden Absorptionswerte in nahe Übereinstimmung mit den Aktivitätswerten kommen. Bei Phosphor zeigt sich insbesondere die Unsicherheit

¹⁾ M. D. Whitaker u. W. C. Bright, Phys. Rev. **59**, 917, 1941. —

²⁾ F. Norling u. R. Fleischmann, ZS. f. Phys. **108**, 483, 1938.

der Differenzbildung von Gesamt- und Streuquerschnitt. Bei Magnesium und Aluminium finden wir Übereinstimmung mit den Messungen von Ramm, bei Chlor und Kobalt unter Berücksichtigung des Bezugswertes Übereinstimmung mit Lapointe und Rasetti. Für Nickel und Kupfer sind die vorliegenden Werte wesentlich kleiner als diejenigen von Coltman¹⁾, über dessen Methode allerdings nichts Näheres zu erfahren ist. Da bei Nickel auch die Differenz von Gesamt- und Streuquerschnitt auf einen höheren Wert hindeutet, muß hier eine Klärung durch weitere Messungen abgewartet werden. Für Kupfer steht unser Wert, wie oben erwähnt, in naher Übereinstimmung mit den Aktivitätsmessungen, dasselbe gilt für Arsen und Brom im Gegensatz zu den Messungen von Lapointe und Rasetti, die durchweg etwas höhere Werte liefern.

Für eine Reihe der folgenden Stoffe bestehen für die hier gefundenen Ergebnisse überhaupt noch keine Vergleichsmöglichkeiten, so bei Strontium, Zirkon (wenn wir die völlig abwegige Differenzbildung von Gesamt- und Streuquerschnitt unberücksichtigt lassen), ferner Molybdän, Zinn und Lanthan. Dagegen finden wir innerhalb der Fehlergrenzen Übereinstimmung mit anderen Messungen bei Rhodium, Silber, Cadmium, Indium, Antimon, bei Tellur mit der Differenz von Gesamt- und Streuquerschnitt, sowie bei Barium. Der Wirkungsquerschnitt von Dysprosium kann nur mit dem von Riezler gemessenen Gesamtquerschnitt verglichen werden und ergibt sich etwas kleiner als dieser. Er zeigt jedoch in Übereinstimmung mit diesem, daß bei Dysprosium außer der zur Aktivität von 2,5 Stunden Halbwertszeit führenden Neutronenanlagerung noch ein weiterer, starker Absorptionsprozeß auftritt. Bei Tantal ist unser Wert zwar niedriger als der von Ramm, aber immer noch wesentlich höher als die Werte aus Aktivitätsmessungen. Da Tantal nur ein Isotop besitzt, muß dies entweder darauf beruhen, daß die emittierte β -Strahlung sehr weiche und bei den Aktivitätsmessungen nicht erfaßte Komponenten enthält, oder aber es muß noch ein weiterer, nicht zu einer derartigen Aktivität führender Absorptionsvorgang auftreten. Ähnlich ist auch der hier für Rhenium gefundene Wirkungsquerschnitt höher als der von Sinma und Yamasaki aus Aktivitätsmessungen ermittelte. Der hier für Quecksilber angegebene Wirkungsquerschnitt liegt vermutlich etwas zu tief, da sich bei der Herstellung der Absorberplatte aus Kohlepulver und Quecksilberoxyd eine gleichmäßige Vermischung beider Bestandteile nicht vollkommen befriedigend erreichen ließ. Auffallend sind die sehr kleinen Absorptionsquerschnitte von Blei

¹⁾ J. W. Coltman, Phys. Rev. **59**, 917, 1941.

Tabelle 2. Wirkungsquerschnitte für langsame Neutronen.

I. Gesamtquerschnitt			II. Streuquerschnitt		III. Aktivitätsmessungen				IV. Absorptionsmessungen			Elen
D.	WB.	GB.	GB.	WB.	Häufigkeit/ Halbwertszeit	SY.	GN.	R. H.	LR.	Rm.	V.	
38	—	47,5	47,5						0,22 – 0,31 ¹⁾	0,25		1 H
4,0		p 5,3	7						f _{hk} < 0,03	—		1 D
*1,51			—							—		2 H
45		nf 58	—							58		3 L
5,3			6,9							< 0,03		4 B
360		nf 503	—						600	500		5 B
4,1	—	²⁾ 550–750	—							(600)		
*12,0		4,8	4,8	4,5					f _{hk} < 0,01	< 0,06		6 C
*4,1			8,2						1,2	1,05		7 M
2,5			4,2						f _{hk} < 0,01	—		8 O
*2,9			4,1		(100/12 s)	*0,01			< 0,5	0,05		9 F
4,2			—							—		10 N
3,5			3,6		(100/14,8 h)	0,38	0,4	0,35	< 0,5	0,38		11 N
1,5			4,2		(11/10,2 m)	0,003	0,03	—		0,22	0,31	12 M
2,5			1,6		(100/2,4 m)	0,15	*0,2	0,21		0,44	0,42	13 A
14,7	—	13,6	1,7		(4,2/170 m)	0,003	0,03				< 0,06	14 Si
1,4	2,2	—	10,4		(100/14,3 d)	0,15	0,3	0,2	1,0		0,23	15 P
39			1,1	2,0					*0,44		0,62	16 S
*2,5			< 10		(25/37 m)	0,10	0,07	—	27		24	17 C
8,2			—							—	—	18 A
11,0			1,5		(6,5/12,4 h)	0,04	0,05	0,08	3,2		2,0	19 K
			9,5		(0,18/2,5 h)		*0,01		*0,5		0,28	20 C
			—		(100/85 d)	2,8					—	21 S
11,9			6,2								3,8	22 T
10			< 4		(100/3,9 m)	3,5	—	5,2	6,8		—	23 V
4,8			3,6								—	24 C
14,3	15,1		2,1	2,1	(100/2,6 h)	6,0	—	9,4	9,4		11,2	25 M
12,0	12,8	13,6	10,3	9,5					*2,1	2,1	1,6	26 F
35		b 26	~5	b 5,6	(100/11 m)	48			33		24,0	27 C
15,4	21,2	19,7	12,4	13,9	(3,8/2,6 h)	3,8					3,6	28 N
7,5	10,3	11,9	8,6	5,5	(68/12,8 h)	0,9		1,2	*6,2		2,2	29 C
4,7	4,5	—	5,2		(32/5 m)	0,5	0,8	0,4	*4,3	3,6	(2,6)	30 Z
—			4		(17,4/57 m)	0,1	—	—	*1,0		1,2	31 G
~75			—		(61/20 m)	0,4					—	32 G
8,6			7,1		(39/14 h)	0,5					—	33 A
19	—	20,4	12,7		(100/26,8 h)	1,5	—	3,1	6,5	5,2	3,5	34 S
11,8			7		(51/4,4 h)	0,7	—	3,1	11,5		12,0	35 B
—			—		(51/18 m)	2,2	—	3,6	7	—	3,2	36 K
~9			—		(49/34 h)	0,5	—	—			—	37 F
60,7			9,5								1,5	38 S
~14			< 14		(100/60 h)	0,73					—	39 Y
			< 16								< 0,35	40 Z
			5		(100/6,6 m)	0,005			—	1,5	—	41 N
					(55 d)							

1) Siehe Anm. 2) und 3) S. 207, 1) S. 209. — 2) Siehe Anm. 1) bis 4) S. 229.

Tabelle 2 (Fortsetzung).

Gesamtquerschnitt		II. Streuquerschnitt		III. Aktivitätsmessungen				IV. Absorptionsmessungen			Element	
WB.	GB.	GB.	WB.	Häufigkeit/ Halbwertszeit	SY.	GN.	R.	H.	LE.	Rm.		V.
1		6,7		(30/4 h)	0,06						5,8	42 Mo
5		5,9		(17/20 h)	0,08						—	44 Ru
5		—		(100/44 s)	8,8	—	—	137			149	45 Rh
0		3		(27/13 h)	5,4	—	—	6,2			—	46 Pd
5	—	63	*6,3	(14/17 m)	0,08	—	—	—			—	47 Ag
00			*1,2	(52/2,3 m)	13,7	—	—	16,8	—	64	58	47 Ag
				(48/22 s)	33,5	—	—	41,0	2900	—	2950	48 Cd
			—	(4,5/48 d)	1,0						147	49 In
0			4,9	(95,5/54 m)	119	—	—	121			0,4	50 Sn
1			6,5	(56/2,8 d)	4,5	2	2	—	*5,3	—	4,4	51 Sb
2			5,3	(44/60 d)	0,7	1	—	—			2,9	52 Te
4	f 14		—	(100/25 m)	6,5		6,5	7,1	6,8		5,0	53 J
			—								—	54 X
			—								—	55 Cs
	g 10		8,2	(72/87 m)	2,2				< 1		0,95	56 Ba
	B.											
	32		—	(100/31 h)	5,5						9,1	57 La
	3										—	58 Ce
	3,5										—	59 Pr
	65										—	60 Nd
00	6620										—	62 Sm
000	4120			(49/9,2 h)	260						—	63 Eu
000	35700										—	64 Gd
											—	65 Tb
	863			(28/2,5 h)	450	—	—	272			745	66 Dy
	47										—	67 Ho
	233										—	68 Er
	69										—	69 Tu
	46										—	70 Yb
	99										—	71 Cp
											—	72 Hf
7			~10	(100/99 d)	4,5	—	—	5	—	20	11,5	73 Ta
3	j 17,5		7,8	(30/24 h)	10	—	—	12	—		20,4	74 W
			—	(38/90 h)	32						104	75 Re
				(62/16 h)	39						—	76 Os
			10,8								—	77 Ir
	p 325			(39/60 d)	74						—	78 Pt
				(61/19 h)	38						—	79 Au
	21,5		8,3	(7,2/31 m)	0,7						72	80 Hg
	p 80			(100/2,7 d)	130	—	—	89			325	81 Tl
	f 450		*4,7								—	82 Pb
			14,2	(29/4-m)	0,06	*0,17	—	—	m 2,5	3,2	2,2	81 Tl
6	10	12,5	12,9							0,8	0,3	82 Pb
2		8,9	8,9	(100/5 d)		< 0,1	—	*0,02		0,45	0,33	83 Bi
											—	84 Po
											—	86 Rn
											—	88 Rn

Tabelle 2 (Fortsetzung).

I. Gesamtquerschnitt			II. Streuquerschnitt	III. Aktivitätsmessungen					IV. Absorptionsmessungen			Element	
D.	WB.	GB.	GB. WB.	Häufigkeit/ Halbwertszeit	SY.	GN.	R.	H.	LR.	Rm.	V.		
													89 A
										m 6		7,1	90 T
												—	91 P
										m 1,5		—	92 U
		w 23	w ~ 12	(99/23 m)				fa 1,2					
								Spaltung ab 2,0					

Erläuterungen und Literaturverzeichnis zu Tabelle 2.

Die vier Hauptspalten der Tabelle sind nach Arbeitsgruppen in verschiedene Unterspalten aufgeteilt, die durch darübergesetzte große Buchstaben bezeichnet sind. Die jeweils kleineren Meßreihen sind in der Tabelle ebenso wie in dem vorliegenden Verzeichnis durch ein vorgesetztes * bezeichnet. Es bedeutet:

D.: I. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink u. D. P. Mitchell, Phys. Rev. **48**, 265, 1935; *H. Carroll u. I. R. Dunning, ebenda **54**, 541, 1938.

WB.: M. D. Whitaker u. H. G. Beyer, Phys. Rev. **55**, 1124, 1939; M. D. Whitaker u. W. C. Bright, ebenda **60**, 155, 1941.

GB.: M. Goldhaber u. G. H. Briggs, Proc. Roy. Soc. London (A) **162**, 127, 1937; *A. C. G. Mitchell u. Mitarb., Phys. Rev. **48**, 653, 1935; **49**, 411—870, 1936.

SY.: K. Sinma u. F. Yamasaki, Phys. Rev. **59**, 402, 1941,

GN.: M. Goldhaber u. D. D. O'Neal, Phys. Rev. **59**, 102, 1941; *J. H. Manley, L. J. Havorth u. G. A. Luebke, ebenda, S. 109.

R.: F. Rasetti, Phys. Rev. **58**, 869, 1940.

H.: F. G. Houtermans, ZS. f. Phys. **118**, 424, 1941; *Naturw. **30**, 758, 1942.

LR.: C. Lapointe u. F. Rasetti, Phys. Rev. **58**, 554, 1940; *J. W. Coltman, ebenda **59**, 917, 1941.

Rm.: W. Ramm, Naturwissensch. **30**, 755, 1942.

V.: H. Volz, vorliegende Arbeit.

R.: W. Riezler, Ann. d. Phys. **41**, 476, 1942.

Ergänzend sind in dieselben Spalten eine Reihe von Einzelmessungen aufgenommen und durch vorgesetzte kleine Buchstaben bezeichnet. Hierbei bedeutet:

b: N. E. Bradbury, F. Bloch, H. Tatel u. P. A. Ross, Phys. Rev. **52**, 1023, 1937.

f: G. A. Fink, Phys. Rev. **50**, 738, 1936.

g: J. H. E. Griffiths u. L. Szilard, Nature **139**, 323, 1937.

j: R. Jäckel, ZS. f. Phys. **104**, 762, 1937.

m: L. Meitner, Nature **145**, 422, 1940.

nf: F. Norling u. R. Fleischmann, ZS. f. Phys. **108**, 483, 1938.

p: P. N. Powers u. H. H. Goldsmith, H. G. Beyer, I. R. Dunning, Phys. Rev. **53**, 947, 1938.

hs: W. J. Horvath, E. O. Salant, Phys. Rev. **59**, 154, 1941.

fa: H. L. Anderson u. E. Fermi, Phys. Rev. **55**, 1106, 1939.

ab: H. L. Anderson, E. T. Booth, J. R. Dunning, E. Fermi, G. N. Glasoe, u. F. G. Slack, Phys. Rev. **55**, 511, 1939.

w: M. D. Whitaker, C. A. Burton, W. C. Bright, E. J. Murphy, Phys. Rev. **55**, 793, 1939.

fhk: O. R. Frisch, H. v. Halban u. J. Koch, Nature **140**, 895, 1937.

und Wismut. Bei Wismut scheint ebenso wie bei Tantal noch ein unbekannter Absorptionsprozeß aufzutreten, da die beobachtete Aktivität nach Houtermans¹⁾ nur einen kleinen Bruchteil des hier gefundenen Wirkungsquerschnittes liefert.

VIII. Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode zur Messung von Absorptionsquerschnitten für langsame Neutronen entwickelt, die sich praktisch ohne Einschränkung auf alle Elemente mit Ausnahme einiger Gase anwenden läßt. Nach dieser Methode werden die Wirkungsquerschnitte von 49 Elementen untersucht. Die Messungen bestätigen im ganzen den völlig unregelmäßigen Verlauf des Absorptionsquerschnitts in Abhängigkeit vom Atomgewicht. Soweit Unterschiede gegen bisherige Absorptionsmessungen vorliegen, gehen diese meist in der Richtung, daß sich die vorliegenden Werte den aus Aktivitätsmessungen gewonnenen annähern. Nur in einigen wenigen Fällen, so bei Tantal und Wismut, lassen die Ergebnisse in Übereinstimmung mit anderen Absorptionsmessungen auf einen zusätzlichen Absorptionsvorgang schließen. Bei einer Reihe von Stoffen fehlen bisher noch Vergleichsmöglichkeiten mit anderen Messungen.

Die vorliegende Arbeit wurde im physikalischen Institut der Technischen Hochschule Berlin ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. H. Geiger, für die Möglichkeit zur Durchführung der Arbeit zu danken.

¹⁾ F. G. Houtermans, Naturwissensch. 30. 758, 1942.

Über eine Atomumwandlungsanlage für Spannungen bis zu 1 Million Volt.

Von Manfred von Ardenne
(zum Teil gemeinsam mit Fritz Bernhard).

Mit 19 Abbildungen. (Eingegangen am 29. Januar 1943.)

Konstruktion und Ausführung einer *Atomumwandlungsanlage für Spannungen bis zu etwas über 1 Million Volt* werden beschrieben. Die Magnetfeld-Ionenquelle und das Aufsprühnetzgerät des Bandgenerators wurden so gestaltet, daß während des Betriebes die Anlage wahlweise auf *Deuteronen-, Protonen- oder Elektronenstrahlen umschaltbar* ist. Der Strahlstrom liegt zur Zeit bei etwa $35 \mu\text{A}$ für alle Strahlarten. Der Ionenstrahl am Auffänger besteht nach Messungen mit magnetischer Zerlegung zu etwa 50 % aus Atomionen. Das Ra-Be-Äquivalent der Anlage beträgt dann unter Verwendung der $(\text{Li} + \text{D})$ -Reaktion nach einer direkten Vergleichsmessung zur Zeit etwa 65 g Radium. — Die Energieaufnahme des Strahlerzeugungssystems ist außerordentlich niedrig, da die Strahlfokussierung durch Anwendung einer *vorgespannten Steuerelektrode* leistungslos erfolgt und die Absaugung der Teilchen bereits durch die erste vom Bandgenerator gespeiste Beschleunigungsstufe bewirkt wird, ohne daß diese hierdurch eine zusätzliche Belastung erfährt. Eine günstige Bemessung von Ionenquelle und Entladungsrohr bewirkt, daß eine Pumpleistung von 30 Litern/sec genügt und 20 % des Generator-Kurzschlußstromes als Strahlstrom nutzbar werden.

Aus dem Inhalt der nachstehenden Veröffentlichung geht hervor, daß seit einiger Zeit der Aufgabenkreis meines Forschungslaboratoriums in größerem Umfange auf Themen der experimentellen Kernphysik ausgedehnt worden ist. Diese Erweiterung des Arbeitsbereiches wurde aus den folgenden Gründen als zweckmäßig angesehen und trotz der Zeitverhältnisse vorgenommen:

Die Tätigkeit des Verfassers und seiner Mitarbeiter auf übermikroskopischem Gebiet brachte zwangsläufig engere Berührungen mit aktuellen Problemen der Chemie, der Biologie und der Medizin. Oft wurde im Laufe der elektronenmikroskopischen Untersuchungen schmerzlich empfunden, daß viele wichtige Fragen aus dem morphologischen Befund nicht oder nicht allein beantwortet werden konnten. Der Wunsch nach Ergänzung der übermikroskopischen Methode durch andere Arbeitsverfahren war die naheliegende Folge. Besonders interessante Ergänzungsmöglichkeiten bot in dieser Hinsicht die zur Zeit noch viel zu wenig angewendete *Indikatormethode* nach L. Hahn und G. Hevesy¹⁾ mit durch Neutronenbestrahlung auf

¹⁾ Vgl. z. B. das Referat: N. W. Timofeeff-Ressovsky, Einige chemisch-biologische Anwendungen der schnellen Neutronen und der künstlich radioaktiven Stoffe. *ZS. f. angew. Chem.* **54**, 437, 1941, und das dort angegebene Schrifttum.

dem Wege der Atomumwandlung bzw. Atomzertrümmerung erzeugte künstlich-radioaktiven Isotopen. Diese Methode setzt bekanntlich kräftige *Quellen von schnellen Korpuskularstrahlen* und empfindliche *Verfahren zur Messung der Aktivität* voraus. Gerade für die Durchführung von Entwicklungsarbeiten an Atomumwandlungsanlagen und Vakuum-Korpuskularstrahlgeräten konnten die im hiesigen Laboratorium beim Bau von Elektronenstrahlröhren, Ionenstrahlgeräten und Elektronenmikroskopen gewonnenen vakuumtechnischen, hochspannungstechnischen und korpuskeloptischen Erfahrungen wertvolle Dienste leisten. Hinzu kam weiter, daß für die Ausbildung von Aktivitätsmeßeinrichtungen die im Zusammenhang mit den früheren Oszillographenentwicklungen gesammelten Erfahrungen und die Meßanlagen der Hochfrequenzabteilung wesentliche Vorteile versprachen.

Die im folgenden beschriebene *Atomumwandlungsanlage für Spannungen bis zu etwas über 1 Million Volt* verwendet einen bei Atmosphärendruck arbeitenden Bandgenerator nach van de Graaff¹⁾, sowie ein vielstufiges Entladungsrohr, und folgt damit dem Vorbild bewährter älterer Anlagen²⁾. Vorsichtige spannungstechnische Bemessung und sorgfältige Durchkonstruktion der Ausführung galten als Haupttrichtlinien bei ihrem Entwurf, um eine hohe Betriebssicherheit über längere Zeiträume bei relativ hoher Strahlungsintensität zu erreichen. Einfache Bedienung durch Laboranten, schnelle Betriebsbereitschaft und universelle Verwendbarkeit waren weitere aufgestellte Forderungen. So sollte die Anlage wahlweise mit Deuteronen, Protonen oder Elektronen im Entladungsrohr arbeiten können und neben der Herstellung gleichbleibender Neutronenstrahlung auch den Ausbau auf Erzeugung von kurzdauernden gesteuerten Strahlungsimpulsen gestatten. Schließlich sollte die Ausführung so getroffen werden, daß zur elektronenmikroskopischen Untersuchung sehr dicker Objekte in späterer Zukunft auch eine Kombination der Anlage mit einem der Elektronenmikroskope des Laboratoriums möglich ist. — Nachdem jetzt die über ein Jahr sich erstreckenden Betriebserfahrungen gezeigt haben, daß die vorstehenden Entwicklungsziele im wesentlichen als erreicht angesehen werden dürfen, wird eine kurze Beschreibung der Bauweise und der gesammelten Erfahrungen von Interesse sein.

1) R. I. van de Graaff, K. T. Compton u. L. C. van Atta, The electrostatic production of high Voltage for nuclear investigations. Phys. Rev. **43**, 149, 1933. — 2) W. Bothe u. W. Gentner, Eine Anlage für schnelle Korpuskularstrahlen und einige damit ausgeführte Umwandlungsversuche. ZS. f. Phys. **104**, 685, 1937, und: Die Wellenlängenabhängigkeit der Kernphotoeffekte. Ebenda **112**, 45, 1939.

Gesamtkonstruktion der Anlage.

Eine *Schnittzeichnung des 1 Millionen Volt-van de Graaff-Generators* mit Entladungsrohr und Meßraum bringt Fig. 1. Die Hochspannungselektrode besteht aus Aluminiumblech und hat die Form eines Zylinders mit zwei aufgesetzten Halbkugeln. Ihr Durchmesser beträgt 1,6 m, ihre Länge 2,6 m. Das obere Walzensystem des Bandgenerators und alle übrigen im Innern der Hochspannungselektrode untergebrachten Anlageteile sind auf einer Holzplattform befestigt, die zugleich auch die Hochspannungselektrode trägt. Die letztere ist ohne die Montage behindernde innere Verspannungen nur mit Hilfe zweier an den Enden des zylindrischen Teiles angebrachter Ringe versteift. Die Plattform ihrerseits wird von dem großen Pertinaxrohr, in dem das Band läuft, und von zwei kleineren Pertinaxstützrohren getragen. Das Entladungsrohr besteht aus drei gleichartigen aufeinandergestellten Porzellanisolatoren und enthält sechs Beschleunigungsstufen, deren Elektroden einzeln justierbar sind. Die genaue Zentrierung der Zylinder erfolgt während der Montage vor Einsetzen der Blenden mit Hilfe einer Zentrier-
vorrichtung. In der Schnittzeichnung ist das Entladungsrohr so dargestellt, wie es zur Zeit für Dauerbetrieb bei Anwendung der Anlage als Neutronengenerator in Benutzung ist. — Das von einer Magnetfeldionenquelle ausgehende Ionengemisch wird entweder durch einen Massenmonochromator rotationssymmetrischer Bauart so zerlegt, daß fast ausschließlich Deuteronen in die vom Bandgenerator gespeisten Beschleunigungsstufen des Entladungsrohres gelangen oder aber erreicht wie in Fig. 1 unzerlegt die Hauptbeschleunigungsstufen. Die Rotationssymmetrie des während des Betriebes bequem justierbaren Ionenquellensystems, die in den ersten Beschleunigungsstufen durch geeignete Bemessung der ionenoptischen Verhältnisse erreichte scharfe Bündelung und Begrenzung der Ionenstrahlung, sowie die beim Passieren der folgenden Hauptbeschleunigungsstufen eintretende weitere Fokussierung bewirken, daß der Ionenstrahl, ohne die Blenden der Hauptbeschleunigungselektroden des Rohres zu streifen, zum Auffänger gelangt. Der gekühlte Auffänger befindet sich isoliert in einem Rohrsystem, das zugleich als Faradayscher Käfig wirkt. Die Durchgriffsverhältnisse sind so, daß schon Vorspannungen von wenigen 100 Volt genügen, um zu verhindern, daß die am Auffänger entstehende sekundäre Elektronenemission in die unterste Beschleunigungsstufe zurückgelangen kann. Diese Bauweise des Auffängersystems einerseits und die Wirkung der zur Minderung vagabundierender Ionenströme im Innern der Beschleunigungszyylinder eingesetzten engen Blenden andererseits (sowie ferner die Wirkung des wahlweise einsetzbaren Massenmonochromators) haben zur Folge, daß ein

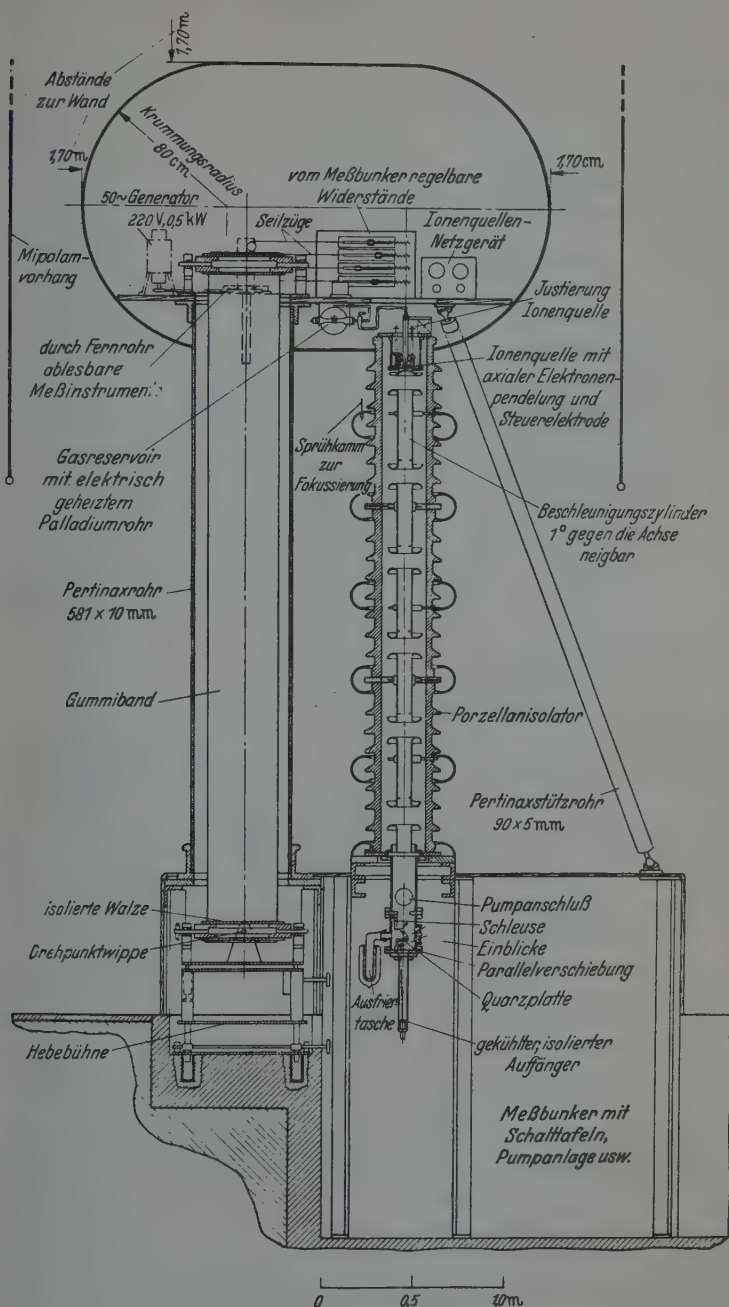


Fig. 1. 1 Million Volt-van de Graaff-Generator für die Erzeugung von Deuteronen-, Protonen- oder Elektronenstrahlen.

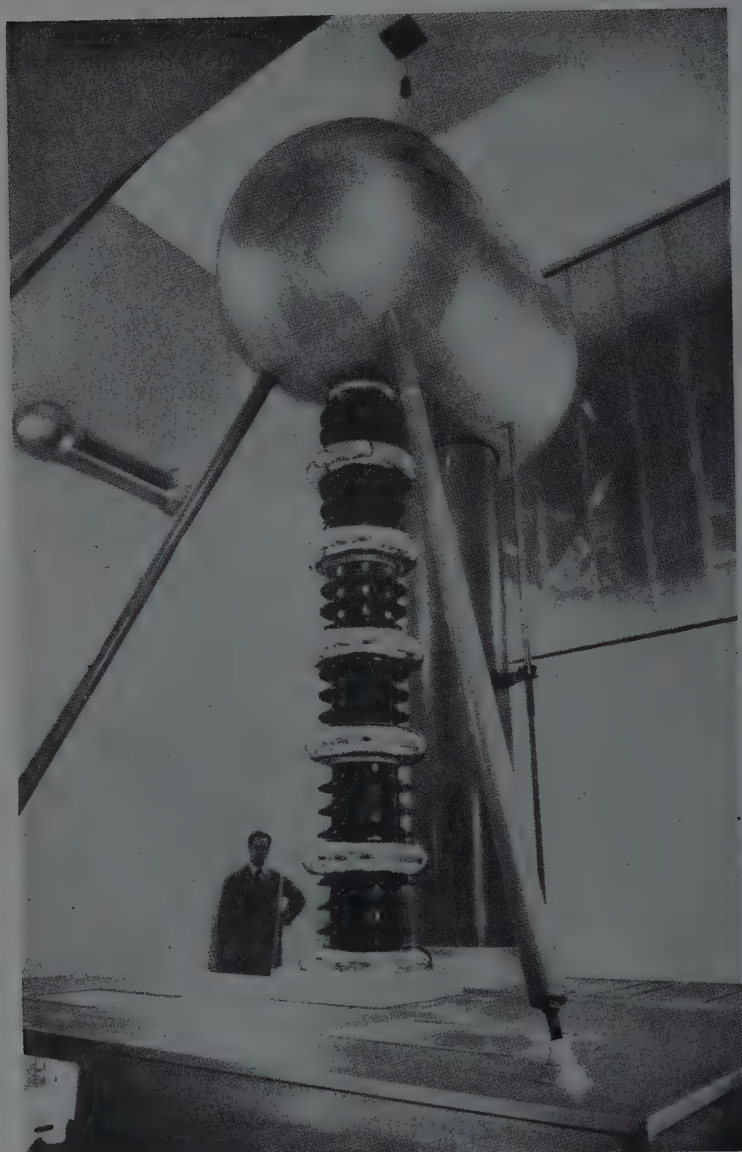


Fig. 2. Gesamtansicht der 1 Million Volt-Atomumwandlungsanlage im Laboratorium des Verfassers. (Vorn das Entladungsrohr mit sechs Beschleunigungsstufen auf dem Meßbunker stehend. Links an der Wand das Rotationsvoltmeter. Oben Deckenöffnung für Montage und mit absenkbarem Sprühkamm.)

ungewöhnlich hoher Prozentsatz des vom Bandgenerator gelieferten Stromes Nutzstrom bleibt. Ebenfalls um unnötige Generatorbelastungen zu vermeiden, wurde darauf verzichtet, einen Spannungsteiler zur gleichmäßigen Aufteilung der Gesamtspannung auf die sechs Beschleunigungsstufen des Entladungsrohres anzuwenden. Eine genügend gleichmäßige Spannungsaufteilung erfolgt nach Einschaltung der Ionen- oder Elektronenquelle durch die Wirkung der noch verbliebenen vagabundierenden Ladungsträger, die in den einzelnen Beschleunigungsstufen bei dem bestehenden

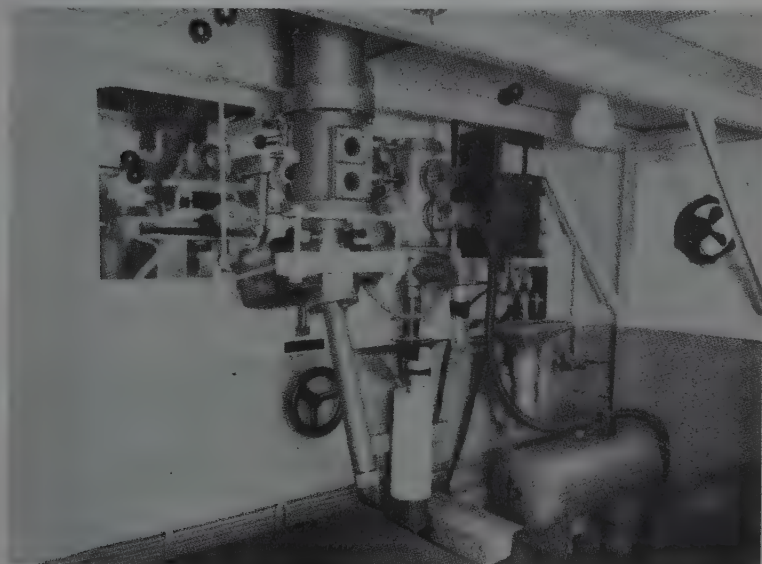


Fig. 3. Das Innere des Meßbunkers mit Abschluß des Entladungsrohres und Pumpanlage. (Links hinten der Durchblick auf das untere Walzensystem und das Gummiband.)

Gasdruck von etwa 10^{-4} Torr gebildet werden. Die besprochene sehr rationelle Ausnutzung des Generatorstromes hat es erlaubt, im Interesse der Betriebssicherheit mit nur einem einzigen Bande und mit Bandgeschwindigkeiten von 10 bis 15 m pro Sekunde auszukommen.

Um den Auffänger, beispielsweise zum Austausch oder zum Zwecke der Reinigung, auswechseln zu können, ohne in das ganze Entladungsrohr Luft einfüllen zu müssen, ist am unteren Ende ein Schleusenmechanismus vorgesehen.

Das Auffängersystem des Entladungsrohres ragt in den elektrostatisch abgeschirmten Meßbunker hinein, von dem aus die Bedienung der ganzen Anlage erfolgt. Durch ein Fenster wird von diesem Bunker das untere

Walzensystem des Bandgenerators übersehen und der einwandfreie Lauf des Bandes kontrolliert.

Zum *Übergang von Ionen auf Elektronen* genügt bei der neuerdings vorgesehenen Magnetfeld-Ionenquelle mit in Richtung der Hauptachse pendelnden Elektronen die Ausschaltung der Gaszufuhr, die Umpolung der Steuerelektrodenspannung der Quelle und die Umpolung der Aufsprühspannung des van de Graaff-Generators.

Die Ansicht der Anlage bringt die Photographie Fig. 2. Ein Blick in das Innere des Meßbunkers vermittelt die Aufnahme Fig. 3.

Aufbau des Hochspannungsgenerators.

a) *Spannungstechnische Bemessung von Generator und Raum.* Die oben angedeuteten Aufgaben ließen eine Projektierung der Anlage für eine Spannung von etwa 1 Millionen Volt als zweckmäßig erscheinen. Bei den Raumverhältnissen des Lichterfelder Laboratoriums bestand von vornherein der Zwang, diese Anlage und weitere kernphysikalische Laboratorien in völlig neuen Räumen unterzubringen. Die entsprechenden Bauten wurden Anfang 1940 durchgeführt. Da die Verhältnisse die Schaffung eines saalartigen Raumes erlaubten, wurde im Interesse kürzerer Bauzeit und bequemerer Zugänglichkeit aller Teile das Bandsystem nicht in einen Hochdruckkessel eingebaut, sondern der Betrieb bei Atmosphärendruck bevorzugt. Dem *Raum* wurden folgende Abmessungen gegeben: $6 \times 5,6$ m Grundfläche, 7 m Höhe; der Meßbunker mit einer Grundfläche von 2×3 m und 2 m Höhe ragt außerdem etwa 1,3 m tief in den Boden des Hauptraumes hinein. Die Hauptachse der Hochspannungselektrode befindet sich in einer Höhe von 4,5 m über dem Fußboden und von etwa 3,5 m über der Dachfläche des Meßbunkers. Bei den schon mitgeteilten Abmessungen der Hochspannungselektrode ist somit ein freier Abstand von 2,8 m zur Grundfläche gegeben, der ausreicht, um auch bei der höchsten Spannung Sprüh- oder Gleitentladungen längs der Pertinaxrohre und des Entladungsrohres mit Sicherheit zu verhindern. Trotz der relativ großen Länge des Entladungsrohres bleibt infolge der günstigen ionenoptischen Anordnung der Brennfleck noch ausreichend klein, und infolge der guten Evakuierung (geringe Gasabgabe der Magnetfeld-Ionenquelle an das Beschleunigungsrohr!) ebenso auch der durch Umladungen der Ionen an Gasmolekülen bedingte Stromanteil. Im Besonderen hat sich durch die große Bauhöhe erreichen lassen, daß der Raum während des Betriebes betreten werden kann. Auch brauchte die Hochspannungselektrode an den Durchtrittsstellen der Pertinaxrohre und des Entladungsrohres nicht trichterartig

eingezogen zu werden. Vielmehr genügte an diesen Stellen die Anbringung eines Gummischlauchwulstes, um alle Sprüherscheinungen zu unterbinden. Als Luftauslaß (siehe weiter unten) besitzt die Hochspannungselektrode eine mit Drahtnetz überspannte Öffnung.

Auf Grund der Erfahrungen mit älteren Anlagen und in guter Übereinstimmung mit einer inzwischen veröffentlichten Erfahrungszusammenstellung¹⁾ wurde für die *Hochspannungselektrode*, wie schon erwähnt, ein kleinster Krümmungsradius von 80 cm gewählt, um eine Maximalspannung von etwas über 1 Million Volt auch bei positiver Elektrodenspannung sicher zu erreichen. Unter idealen Verhältnissen brauchte theoretisch bekanntlich der kleinste Wandabstand nur etwa gleich dem kleinsten Krümmungsradius der Hochspannungsanodenelektrode gewählt werden. Um hier eine erhebliche Sicherheit einzuführen und um auch die Wahrscheinlichkeit von anormalen Durchschlägen herabzusetzen²⁾, wurde der kleinste *Wandabstand* mit 1,7 m etwa gleich dem doppelten Betrag des kleinsten Krümmungsradius der Hochspannungsanode gewählt. Trotzdem wurden schon bei Spannungen von über 800 kV häufig Funkenüberschläge zwischen den Enden der Hochspannungselektrode und den gegenüberliegenden Wandteilen beobachtet. Diese Überschläge, die zunächst die Maximalspannung der Anlage begrenzten, wurden durch die Anbringung großer *Vorhänge aus Mipolamfolien* vermieden³⁾. Einen der beiden Schirme sehen wir auch auf der Photographie Fig. 2. Durch die Schirme wird die Maximalspannung des Generators auf 1150 kV erhöht. Oberhalb 1050 kV beginnen Sprüherscheinungen. Die benutzten Mipolamfolien sind vorzügliche Isolatoren, so daß kritische Feldverzerrungen und Deformierungen der Vorhänge, die bei Papierschirmen leicht vorkommen, nicht gegeben sind.

In Übereinstimmung mit Untersuchungen von Kossel⁴⁾ wurde festgestellt, daß kleinere Nietköpfe und Nahtstellen an der Außenseite der Hochspannungselektrode, die bei ihrer rationellen Herstellung kaum zu vermeiden sind, die Spannungssicherheit nicht herabsetzen. Bei den beobachteten Funkenüberschlägen zur Wand zeigte sich nämlich, daß die Funken in der Regel von glatten Flächenstücken der Hochspannungselektrode ausgingen.

Um im Raum möglichst definierte Potentialverhältnisse zu schaffen und vor allen Dingen, um die bei stoßweisen Entladungen entstehenden

¹⁾ W. Gentner, Die Erzeugung schneller Ionenstrahlen für Kernreaktionen. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften **19**, 107, Abb. 2, 1940. — ²⁾ Vgl. A. Bouwers, Elektrische Höchstspannungen. Berlin, Springer, 1939. —

³⁾ E. Marx, Hochspannungs-Praktikum, S. 157. Berlin, Springer, 1941. —

⁴⁾ W. Kossel, Bemerkungen über elektrostatische Maschinen. ZS. f. Phys. **111**, 264, 1938.

Wanderwellen von dem Leitungsnetz der benachbarten Laboratorien fernzuhalten, und schließlich um Störungen der Hochfrequenzarbeiten und Zählverstärkereinrichtungen zu vermeiden, wurde der *Hochspannungssaal metallisch vollständig ausgekleidet*. Hierzu wurden die Wände nach dem Metallspritzverfahren mit einer Aluminiumschicht versehen. Diese Ab-

schirmung hat sich ausgezeichnet bewährt.

Zur Spannungsmessung dient ein Rotationsvoltmeter nach Schwenkhagen. Durch besonders große Ausführung der rotierenden Zylinderhälften wurde erreicht, daß das Voltmeter etwa 0,5 Mikroamp./kV Elektrodenspannung liefert, so daß ein empfindliches Zeigergalvanometer zur Anzeige genügt. Die Eichung des Rotationsvoltmeters erfolgte anfänglich durch Vergleich mit einem Starke-Schröder-Instrument und später mit den $(p\gamma)$ -Resonanzen einer dicken Lithiumfluoridschicht (s. unten). Das Rotations-

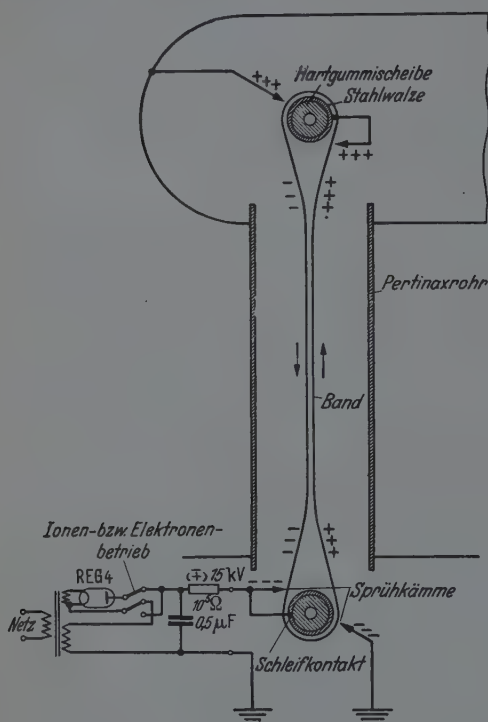


Fig. 4. Prinzipschiene des van de Graaff-Generators.

voltmeter befindet sich an einer der beiden Wände, die parallel zur großen Achse der Hochspannungselektrode liegen, wo also Raumladungsstörungen durch Sprühen infolge des größeren Wandabstandes besonders unwahrscheinlich sind. Infolgedessen ist die Eichkurve des Voltmeters, wie sich im letzten Abschnitt bestätigen wird, praktisch linear.

b) *Ausführung der van de Graaff-Anlage.* Die Prinzipschiene des Bandgenerators mit Fremderregung und Umladung an der oberen Walze bringt Fig. 4. Das Netzgerät ist so eingerichtet, daß seine Polung auf einfache Weise vertauscht werden kann. Die *Sprühkammer* werden durch feine Drähtchen gebildet, die nebeneinander an einer Halteschiene durch Punkt-

schweißung befestigt und dann auf gleiche Länge abgeschnitten sind. Der Vorteil dieser Kämme besteht darin, daß sie bei zu großer Annäherung an das Band keine Bandschädigung bewirken, sondern sich umbiegen. Als *Bandmaterial* wurden anfänglich Astralon- bzw. Mipolamfolien benutzt¹⁾. Obwohl Folien in verschiedenen Stärken erprobt und Hilfsvorrichtungen zur Herstellung der einzigen erforderlichen Schweißnaht geschaffen wurden, zeigte sich doch immer wieder, daß schon nach wenigen Tagen Betriebszeit das Kunstharzband meist an der Schweißstelle einriß. Daher wurde in neuerer Zeit durchweg ein *endloses Gummiband* benutzt, das 40 cm breit und z. B. ungefähr 1,7 mm stark ist und von der Semperit A.-G., Wien, als Sonderanfertigung geliefert wurde. Der große Vorteil des Gummibandes, das auch vorzügliche elektrische Eigenschaften besitzt und überdies aus einer Mischung mit heraufgesetzter Ozonbeständigkeit gefertigt wird, besteht darin, daß ein Herunterlaufen des Bandes von den Walzen, welches bei Kunstharzfolien sehr leicht eintritt, praktisch nicht mehr vorkommt. Diese Eigenschaft des Gummibandes ist für den Einsatz im Dauerbetrieb von höchster Bedeutung. Ein an der unteren Öffnung des Pertinaxrohres nachträglich angebauter kräftiger Ventilator sorgt für schnelle Wegführung der schädlichen ozonhaltigen Luft. Von der Anwendung neuerer Bandführungen zur Erreichung höherer Ladungsdichten²⁾ wurde zunächst abgesehen, da ihr gemeinsames Kennzeichen eine sehr starke gegenseitige Annäherung und Anziehung der beiden Bänderteile ist und gerade bei Gummi als Bandmaterial ein allzu kräftiges Aneinanderreiben der nach oben und unten laufenden Bänderteile im Dauerbetrieb große Nachteile hat (gegenseitiges Abradieren der Bänder, schnelle Verschmutzung, insbesondere des unteren Walzensystems). Schon bei der Geometrie der benutzten Walzenanordnung und der geringeren Bandbelastung tritt zwischen den Walzen auf einer Länge von 260 cm ein Aufeinandergleiten der gegenläufigen Bandteile ein. Von dem Kunstgriff, die (durch ein Luftpolster sicher schon erheblich gemilderte) Reibung durch Zwischenhängen eines Mipolambandes zu verringern, wurde abgesehen, da der Versuch eine Abnahme der Stabilität des Bandlaufes erkennen ließ.

Die *Spannungsregelung* erfolgt durch einen vom Meßbunker aus verstellbaren Sprühkamm. Dieser wird von der Decke des Raumes abgesenkt und kann völlig in eine Deckenöffnung hochgezogen werden, die in der

¹⁾ W. Baumhauer u. P. Kunze, Ein horizontal liegender Bandgenerator nach van de Graaff. ZS. f. Phys. **114**, 197, 1939. — ²⁾ W. Kossel u. F. Heise, Elektrostatische Maschine mit übernormaler Ladungsdichte. ZS. f. Phys. **113**, 769, 1939, und die zusammenfassende Darstellung bei U. Neubert, Elektrostatische Generatoren. Verlag Oldenbourg, 1942.

Photographie Fig. 2 oben sichtbar ist. Die Deckenöffnung hat auch bei der Montage wertvolle Dienste geleistet.

Die Kurzschlußstromstärke des Bandgenerators wurde bei 12,5 m Bandgeschwindigkeit zu 200 Mikroamp. ermittelt. Dieser Stromwert entspricht einer Beladungsdichte von $6,2 \text{ CGS/cm}^2$ und ist für die benutzte Bandführung als recht günstig anzusehen¹⁾.

Ganz besondere Sorgfalt wurde auf die *Ausführung* und *Auswuchtung* der Walzen gelegt. Das Schema des Bandantriebes ist in Fig. 5 wiedergegeben. Beide Walzen sind mit dem dort angegebenen Krümmungsradius

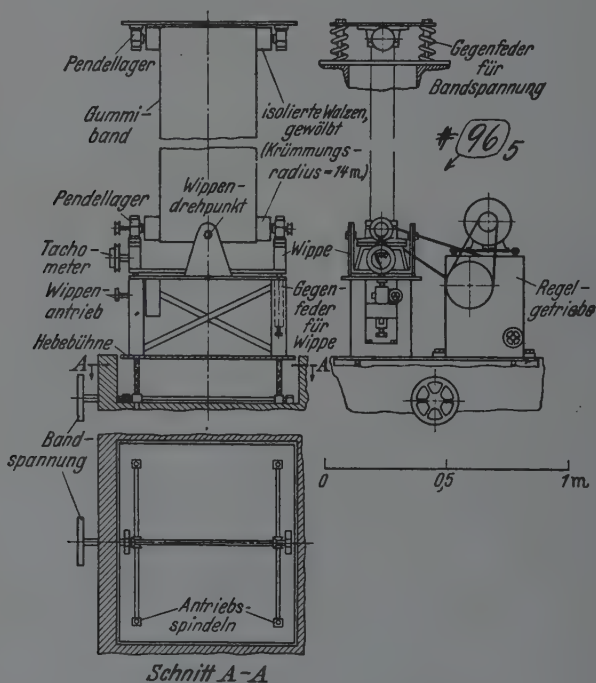


Fig. 5. Das Schema des Bandantriebes.

leicht ballig ausgeführt. Die Walzen selbst bestehen aus isoliert gehaltenen Stahlrohren, deren Oberfläche verchromt und poliert ist. Die untere Walze kann zur Justierung des Bandlaufes mit Hilfe einer Wippe ohne Änderung der Bandspannung geschwenkt werden. Die Bandspannung selbst ist in weiten Grenzen mit Hilfe einer Hebebühne einstellbar. Die Anordnung der Walzenlager und die Gesamtkonstruktion der Anlage sind so getroffen,

¹⁾ F. Heise, Erregungs- und Transportvorgänge an einer selbsterregenden van de Graaff-Maschine. ZS. f. Phys. 116, 317, 1940, Fig. 10.

daß das Band leicht ausgewechselt werden kann. Der Bandantrieb erfolgt über ein stufenloses Regelgetriebe aus einem 2 PS-Motor. Je nach Banddicke und Bandmaterial werden bei der hohen Präzision der Walzenausführung Bandgeschwindigkeiten bis zu 25 m pro Sekunde erreicht, so daß die *Maximalstromstärke des Bandgenerators bei 400 Mikroamp.* liegt. Für das normale Arbeiten werden Bandgeschwindigkeiten von 10 bis 12,5 m pro Sekunde verwendet, die eine sehr geringe Bandabnutzung gewährleisten. Die jeweils eingestellte Bandgeschwindigkeit wird an einem Tachometer abgelesen.

Eine Ansicht des unteren Walzensystems bringt die Photographie Fig. 6. Zu beiden Seiten des Bandes sind kleine, durch Asbestplatten gegen

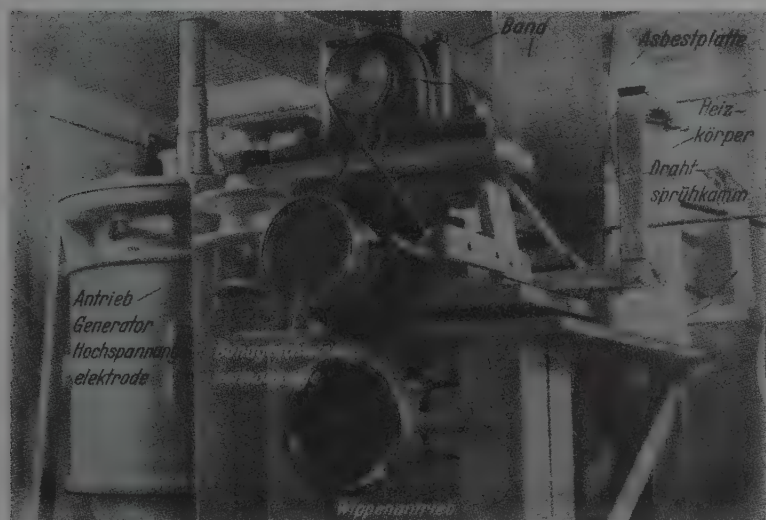


Fig. 6. Das auf einer Hebebühne stehende untere Walzensystem mit Aufsprüheinrichtung.

das Band abgeschirmte Heizkörper vorgesehen, die einen Strom warmer Luft längs des Bandes hochsteigen lassen. Diese Heizvorrichtung hat sich für die Ingangsetzung der Anlage in Zeiten hoher Raumfeuchtigkeit bewährt. Ganz links auf der gleichen Abbildung ist ein Antriebsmotor stehender Bauart sichtbar, der über eine mehrfach gelagerte isolierte Welle einen Wechselstromgenerator im Innern der Hochspannungselektrode anzutreiben gestattet.

Um eine völlige Unabhängigkeit von den die Raumfeuchtigkeit beeinflussenden Witterungsverhältnissen sicherzustellen, wurde nicht nur eine getrennte Beheizung des Hochspannungssaales, sondern außerdem eine

Klimaanlage vorgesehen. Durch die Klimaanlage (Bauart Frigidaire), die eine Luftumwälzung von 400 m^3 pro Stunde vornimmt, läßt sich auch in Zeiten höchster Luftfeuchtigkeit ein Feuchtigkeitsgrad von 50% aufrecht-erhalten, der stets genügt, um ein völlig einwandfreies Arbeiten des Band-
generators zu gewährleisten¹⁾.

Aufbau des Entladungsrohres (gemeinsam mit F. Bernhard).

a) *Ionenquelle.* Konstruktion und Eigenschaften einer Ionenquelle, Prinzip und Bauweise eines Gradsicht-Massenmonochromators und Aus-
führung einer Vakuumschleuse für die hier beschriebene Anlage wurde

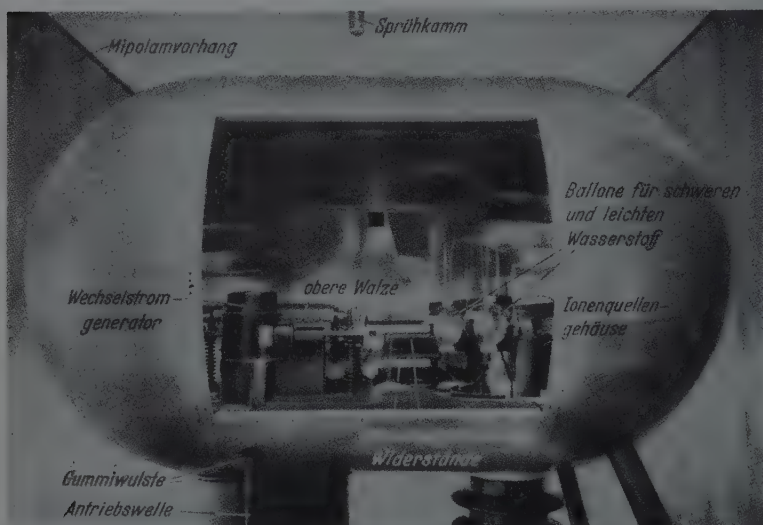


Fig. 7. Blick in die geöffnete Hochspannungselektrode.

bereits näher behandelt²⁾. Einen Blick in die geöffnete Hochspannungselektrode bei Betrieb mit diesen Bauteilen vermittelt die Photographie Fig. 7.

Der *Massenmonochromator* beruht darauf, daß die Ionenquelle mit Hilfe einer magnetischen Linse großer Öffnung über der Bohrung einer Zwischenblende abgebildet wird. Die Brechkraft der magnetischen Linse ist so eingestellt, daß bei der benutzten Ionengeschwindigkeit (1000 bis

¹⁾ Vgl. auch M. A. Tuve, L. R. Hafstad u. O. Dahl, Die Gleichspannungstechnik für quantitative Untersuchungen zur Kernphysik. Naturwissenschaften **24**, 625, 1936. — ²⁾ M. von Ardenne, Über ein Ionenquellensystem mit Massenmonochromator für Neutronengeneratoren. Phys. ZS. **43**, 91, 1942.

1500 Volt) für den Deuteronenanteil eine Abbildung im Maßstabe 1:1 erfolgt. Dann liegt die Bildweite für die Deuteronenmoleküliönen gerade im Unendlichen. Die eintretende Anreicherung ergibt sich bei gleichmäßiger Beaufschlagung der Blenden einfach aus dem Flächenverhältnis der Zwischenbildblende zur Magnetlinsenblende. Die Bohrung der Zwischenbildblende, die einen Durchmesser von 6,5 mm aufweist, wird durch die Optik des Entladungsrohres auf dem Auffänger schwach vergrößert abgebildet. Eingehende Messungen am Ionenquellensystem mit Massenmonochromator und an der nachgeschalteten Beschleunigungsrohre ließen eine zunächst störend empfundene Empfindlichkeit dieses Vorselektionsprinzips gegen Fremdgase und -dämpfe erkennen. Die letzteren bewirken im Raum des Massenmonochromators, daß bei der hier gegebenen noch kleinen Teilchengeschwindigkeit nur ein relativ geringer Prozentsatz der von der Quelle emittierten Deuteronen ohne Zusammenstöße die Bohrung der Zwischenbildblende durchfliegt. Sie lassen weiter im Raum des Beschleunigungsrohres neue Ionen entstehen, so daß die Wirkung der Vorselektion abgeschwächt wird. Durch starke Verminderung der Zahl von Fett- und Gummidichtungen — an die Stelle der meisten anfänglich vorgesehenen Gummidichtungen traten Apiezonwachskittungen —, sowie durch Anbringung von mit flüssiger Luft gekühlten Ausfriertaschen konnte jedoch der Dampfdruck ausreichend erniedrigt werden. Weiterhin nahm der Ionenstrom im Entladungsrohr nach Durchführung dieser Maßnahmen nicht mehr von Beschleunigungsstufe zu Beschleunigungsstufe erheblich zu, sondern blieb nahezu konstant.

Neben der früher beschriebenen Anordnung wurde das schon in Fig. 1 angedeutete System ohne Massenmonochromator erprobt. Wegen der sehr viel einfacheren Handhabung und wegen des leichteren Überganges von Ionen auf Elektronen wird zur Zeit dieses System in der Anlage benutzt. Zur Ionenerzeugung dient die in Fig. 8 gezeichnete *Magnetfeld-Ionenquelle mit Steuerelektrode und in Richtung der Hauptachse pendelnden Elektronen*. Die auf der Grundlage einer neueren amerikanischen Veröffentlichung¹⁾ ausgebildete Ionenquelle hat sich auch im Dauerbetrieb bei voller Generatorspannung vorzüglich bewährt. Die von einer Oxydkathode emittierten Elektronen durchfliegen hier nach Beschleunigung auf eine Spannung von etwa 150 Volt die Gaskammer und gelangen anschließend in den Bereich eines Bremsfeldes, das hier von der ersten mit etwa 100 kV betriebenen Beschleunigungsstufe des Entladungsrohres unmittel-

¹⁾ A. T. Finkelstein, A high efficiency Ion source. Rev. Sci. Instr. 11, 94, 1940.

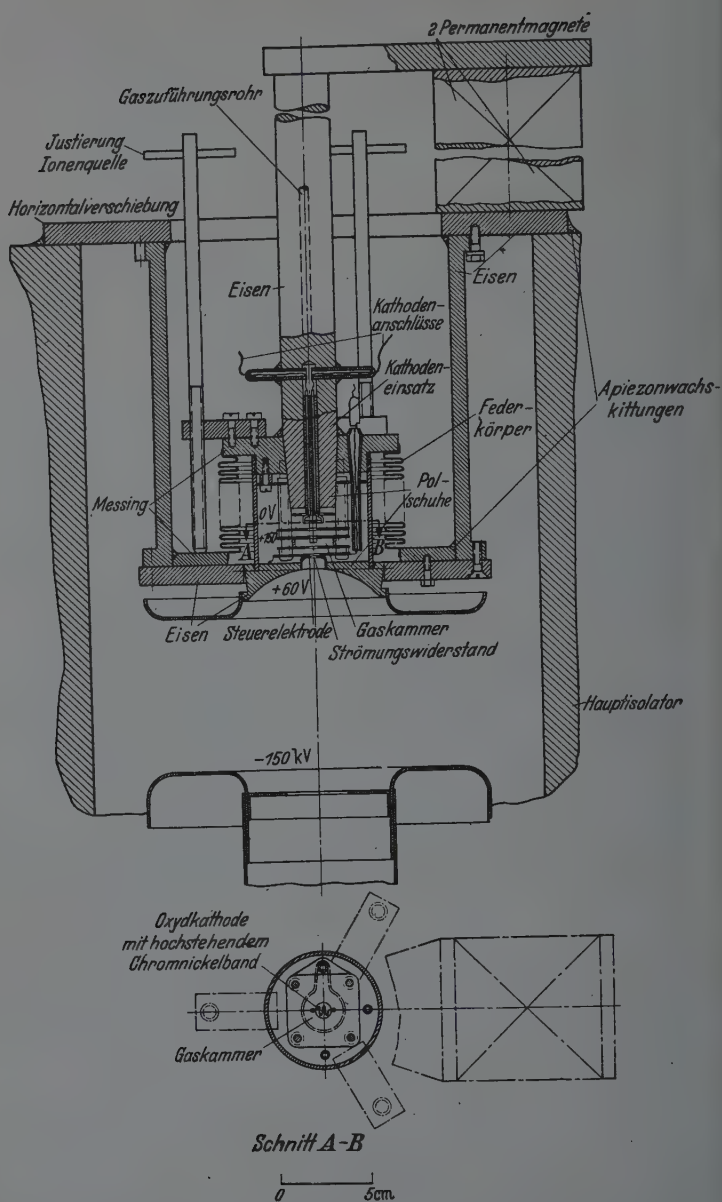


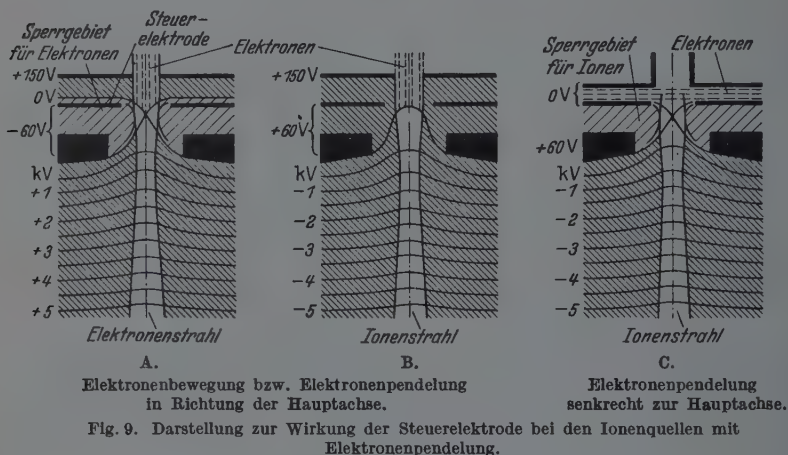
Fig. 8. Die justierbare Magnetfeldionenquelle mit in Richtung der Hauptachse pendelnden Elektronen und Steuerelektrode (Bauart M. v. Ardenne).

bar aufgebaut wird. Durch ein kräftiges magnetisches Führungsfeld, das von einem permanenten Magneten erzeugt wird, steigt die Zahl von Elektronenpendelungen zwischen Kathodenraum und Bremsfeld stark an. Hierdurch wird schon mit Anodenströmen von wenigen Milliampere eine hohe Elektronendichte und damit ein guter Ionisierungswirkungsgrad erzielt. Der Vorteil dieser Ionenerzeugungsart besteht darin, daß das Ionenabsaugfeld die (magnetische) Elektronenführung nicht stört. Das gleiche, wie schon erwähnt, von der ersten Beschleunigungselektrode hervorgerufene Feld, das die Absaugung der Ionen bewirkt, läßt die Elektronen in Richtung auf die Kathode zurückpendeln. Im Gegensatz zu der in Verbindung mit dem Massenmonochromator benutzten Art der Ionenerzeugung nach Heil haben hier die Ionen etwas verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten, je nachdem auf welcher Potentialfläche im Bremsraum die Ionisierung stattgefunden hat (vgl. hierzu den unten besprochenen Verlauf der Ionenstromkennlinie der Quelle). Jedoch auch für solche kernphysikalischen Aufgaben, die eine möglichst geringe Streuung der Teilchengeschwindigkeiten im Strahl verlangen, bleibt diese Geschwindigkeitsstreuung ohne Bedeutung, da sie weniger als $1/100$ der Streuung bei Kanalstrahl-Ionenquellen beträgt.

Der Ionenquellenraum steht, wie Fig. 8 erkennen läßt, mit dem Hauptvakuumraum nur über die Bohrung in der Steuerelektrode, die einen freien Durchmesser von 5,5 mm besitzt, in Verbindung. Der hierdurch gegebene *Strömungswiderstand* sowie ferner die Verwendung von Bohrungen mit nur 5 mm Durchmesser in der Gaskammer bewirken, daß zwischen Ionisierungsraum und Hauptvakuumraum ein Druckunterschied von fast einer Größenordnung besteht. Die Ausnutzung des Gasstrahles ist so gut, daß der *Verbrauch an schwerem Wasserstoff* bei Abgabe eines Deuteronenstromes von 100 Mikroamp. nur in der Größenordnung von 1 mg pro Stunde liegt. Infolge der rationellen Arbeitsweise der Ionenquelle genügt bereits eine relativ einfache Pumpanlage, um das erforderliche Vakuum aufrechtzuerhalten.

Nach Verwendung von hoch gereinigtem vakuumgeschmolzenem Elektrodenmaterial in der Ionenquelle und nach Durchführung der schon oben erwähnten vakuumtechnischen Maßnahmen gelang es, zu erreichen, daß trotz des hohen Elektronen-Pendelfaktors der Ionenstrom auf wenige Prozente seines normalen Arbeitswertes zurückgeht, sobald die Gaszufuhr unterbrochen wird. Auf diese Weise wird es möglich, die jeweils gewünschte Ionenstromstärke durch Steuerung der Gaszufuhr einzustellen und infolgedessen mit besonders niedriger Gaszufuhr auszukommen.

Die Teilspannung von über 100 kV, die am ersten Beschleunigungszylinder des Entladungsrohres liegt, dient gleichzeitig zur Herstellung des *Absaugfeldes*. Von erheblicher praktischer Bedeutung ist in diesem Zusammenhang die Anbringung einer vorgespannten *Steuerelektrode* im Absaugfeld der Ionenquelle (M. v. Ardenne). Die Wirkung dieser Elektrode auf die Bahnen der Ionen ist im Prinzip die gleiche wie die bekannte Wirkung der negativ vorgespannten, die Emissionsstelle rotationssymmetrisch umgebenden Elektrode (Wehnelt-Elektrode) bei Elektronenstrahlröhren. Wieder ergibt sich ohne störende reelle Blenden ein scharf gerichtetes und von einem kleinen Querschnitt ausgehendes



Strahlenbündel, bedingt durch starke *Sammelwirkung unmittelbar vor der Emissionszone*, d. h. dort, wo die Teilchen infolge der hohen Raumladung zu divergieren bestrebt sind. Gegenüber den sonst vielfach üblichen Anordnungen mit speziellen, der Ionenquelle zugeordneten Beschleunigungslinsen bringt die Anwendung der vorgespannten Steuerelektrode den Vorteil größter Einfachheit, weil die Notwendigkeit besonderer Beschleunigungsspannungen im Bereich der Ionenquelle fortfällt. Eine Darstellung zur Wirkung der Steuerelektrode bringt Fig. 9. Je nach der Polung des Systems Absaugelektrode-Steuerelektrode wird ein Ionenstrahl oder ein Elektronenstrahl von der Quelle geliefert. Bei jener Polung, die den Elektronenstrahl entstehen läßt (Fig. 9A), dient der Raum erhöhter Raumladung vor der Steuerelektrode, in dem die Elektronen zum Teil umkehren, als virtuelle Kathode. Bei jener Polung, die den Ionenstrahl ergibt (Fig. 9B), durchlaufen im Falle dieses Systems mit in Richtung der Hauptachse

pendelnden Elektronen, wie schon oben ausgeführt, die abgesaugten Ladungsträger eine etwas höhere und unterschiedliche Potentialdifferenz. ($\Delta U = U_A - U_{\text{ionis}}$. Hierin bedeutet U_{ionis} die Ionisierungsspannung.) Dies führt dazu, daß, wie Fig. 10 veranschaulicht, die Ionenstrahlkennlinie nicht bei gleicher, sondern stärkerer Steuerelektrodenvorspannung einsetzt als die Elektronenstrahlkennlinie, und außerdem den von Regelpenthoden her bekannten Charakter besitzt. — Die Kennlinien Fig. 10 zeigen, daß

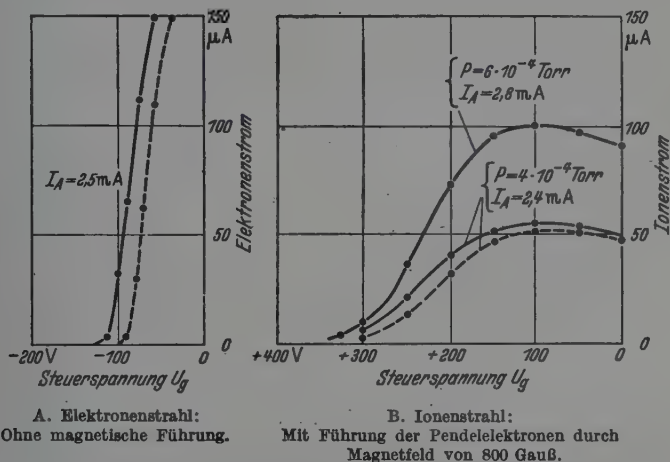


Fig. 10. Die Strahlstromkennlinien der Ionen- oder Elektronenquelle (Anodenspannung $U_A = 150 \text{ V}$, Anodenstrom I_A , Deuterium-Gaskammerdruck P .

Beschleunigungsfeldstärke: ——— $E = 7 \text{ kV/cm}$. - - - - - $E = 2 \text{ kV/cm}$.

die Quelle für den vorliegenden Zweck sowohl in bezug auf Elektronen (bereits ohne magnetische Führung!) als auch in bezug auf Ionen ausreichend ergiebig ist. Bemerkenswert und wertvoll für das praktische Arbeiten mit der Quelle ist der sehr geringe Einfluß der Beschleunigungsfeldstärke auf die Kennlinien. Die Kleinheit dieses Einflusses erklärt sich daraus, daß bei Vergrößerung der Beschleunigungsfeldstärke die Emissionszone sich zurückverlegt. Ein Beispiel über die Abhängigkeit des Ionenstromes vom magnetischen Führungsfeld der Pendelelektronen bringt die Messung Fig. 11. Die in Fig. 9 angedeuteten Unterschiede bei der Ionenabsaugung führen dazu, daß bei der benutzten Quelle die beste Strahlzusammenfassung nicht wie bei Elektronenbündelung nahe dem Stromeinsatz der Steuerelektrodenspannung liegt, sondern bei schwächerer Vorspannung der Steuerelektrode (+100 Volt bei der Kennlinie Fig. 10 B). Durch Arbeiten mit nicht zu hoher Anodenspannung im Pendelelektronenraum

kann die Geschwindigkeitsstreuung der Ionen und damit die Verschlechterung der Optik des Steuerelektrodensystems hinreichend klein gehalten werden. Man ist daher nicht gezwungen, aus diesem Grunde auf das System

mit quer zur Absaugrichtung pendelnden Elektronen (vgl. Fig. 9C) zurückzugreifen¹⁾.

Bei den praktisch eingestellten Strahlströmen beträgt die *Kathodenlebensdauer* viele hundert Stunden, obwohl bei in Richtung der Hauptachse pendelnden Elektronen der rückläufige Strahl negativer Ionen bis in den Bereich der Kathode gelangen kann. Die hohe Lebensdauer dürfte darauf zurückzuführen sein, daß der Hauptteil der Kathodenoberfläche bei der in Fig. 8 angegebenen Bandkathode (Chromnickelband 0,1 mm stark, 0,8 mm hoch) gegen die rückläufige Ionenstrahlung abgeschattet ist.

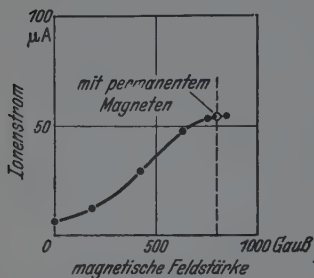


Fig. 11. Beispiel über die Abhängigkeit des Ionenstromes vom magnetischen Führungsfeld der Pendelelektronen ($U_A = 150$ V, $I_A = 2,4$ mA, $P = 4 \cdot 10^{-4}$ Torr, $F = 7$ kV/cm).

Mit Rücksicht auf die hohe Kathodenlebensdauer und darauf, daß eine ausreichende Entgasung des Hauptvakuumrohres schon nach einer Pumpzeit von etwa 3 Stunden erfolgt ist, konnte auf den Einbau einer Schleuse an dieser Stelle verzichtet werden.

Die Kathodenheizung der Quelle, ebenso die Heizung für die Palladiumröhrchen, über die die Zufuhr des schweren oder leichten Wasserstoffs zur Ionenquelle geregelt wird, und schließlich das einfache Netzgerät (1 Watt!) der Quelle werden aus dem in Fig. 7 links sichtbaren 500-Watt-Wechselstromgenerator gespeist. Die erforderlichen Regelwiderstände sind jeweils mit einer Gegenfeder kombiniert und werden ebenso wie die Stromschalter über Seidenschnüre vom Meßbunker aus gesteuert. Die insbesondere zur Kontrolle der Ionenquelle vorgesehenen Meßinstrumente können ebenfalls von unten aus über ein Fernrohr abgelesen werden. Durch Umschaltung der Palladiumrohrheizung wird wahlweise schwerer oder leichter Wasserstoff der Ionenquelle zugeführt.

b) *Die Beschleunigungsröhre.* Die Bauweise der Beschleunigungsröhre geht bereits aus der Übersichtszeichnung Fig. 1 hervor. Durch die Aufteilung der Spannung auf sechs Nachbeschleunigungsstufen ist eine große Betriebssicherheit in bezug auf Spannungsdurchschläge erreicht. Der

¹⁾ Für andere Aufgaben der Ionenoptik, wo die einfache Umschaltung der Quelle auf Elektronenstrahlung nicht verlangt wird, erscheint die Kombination der Steuerelektrode mit Systemen dieser Pendelrichtung besonders vorteilhaft.

Aufbau der einzelnen Beschleunigungsstufe und insbesondere die Ausführung der justierbaren Elektrodenhalterungen und der Verbindungen zwischen den Porzellanisolatoren ist aus der Zeichnung Fig. 12 zu entnehmen. Die gut abgerundeten und verchromten Elektroden an den Rohrenden sind mit einer breiten Stirnfläche versehen und ihr Abstand, soweit es die Abnahme der Durchschlagsfestigkeit erlaubt, möglichst niedrig gehalten, so daß ein merklicher Durchgriff von der Isolatorwand auf die vom Strahl erfüllten Räume noch nicht stattfindet. Infolgedessen besteht eine gute Stabilität der Lage des Brennfleckes am Auffänger.

Um den Einfluß des Elektrodenabstandes auf den Wert der Durchschlagsspannung unter den bestehenden Verhältnissen kennenzulernen, wurde eine Vorrichtung mit *Simmering* gebaut, die während des Betriebes eine Abstandsveränderung erlaubte. Die erhaltenen Meßergebnisse über das Eintreten von Spannungsdurchschlägen bei einer einzelnen Beschleunigungsstufe gemäß Fig. 12 in Abhängigkeit von dem *Elektrodenabstand* und für die angege-

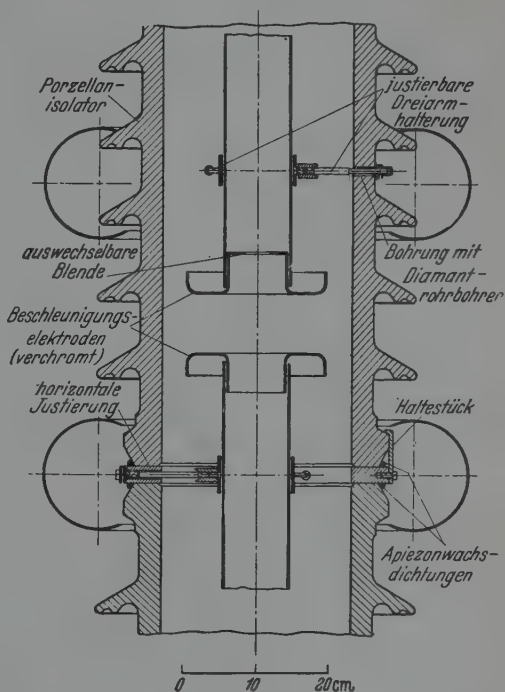


Fig. 12. Aufbau der einzelnen Beschleunigungsstufe.

benen *Restgasdrucke* bringt die Darstellung Fig. 13. Der Gasdruck wurde hierbei unmittelbar oberhalb der Kühlfalle der Quecksilberdiffusionspumpanlage mit Hilfe eines Leybold-Philips-Vakuummeters kontrolliert. Die Restgasdruckanzeige muß etwa einen Wert von $5 \cdot 10^{-5}$ Torr aufweisen, damit für eine Betriebsspannung von 1 Millionen Volt und gleichmäßige Spannungsverteilung auf sechs Stufen ein betriebssicheres Arbeiten gewährleistet ist. Dieser Restgasdruck wird dank der ausgezeichneten Vakuumdichtigkeit des ganzen Entladungsrohres und dank der vorgesehenen hohen Strömungs-

querschnitte schon nach einer Anlaufzeit von etwa $1/2$ Stunde erreicht, wenn das Entladungsrohr unter Vorvakuum geblieben war.

Die Pumpanlage besteht wahlweise aus der Parallelschaltung von zwei mit je einer Kühlfalle von geringem Strömungswiderstand versehenen Leybold-Quecksilberdiffusionspumpen Modell E oder einer einzelnen Pumpe dieser Type (Anfangspumpleistung 15 bzw. 30 Liter/sec bei 10^{-3} Torr).

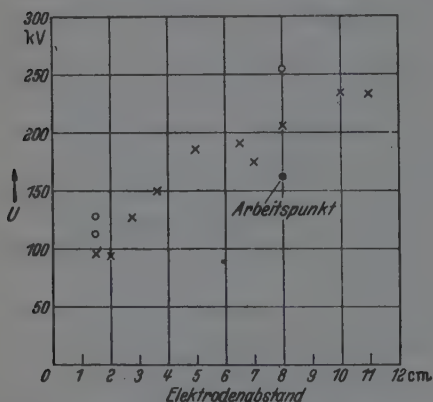


Fig. 13. Messungen über die Durchschlagsspannung der einzelnen Beschleunigungsstufe in Abhängigkeit von dem eingestellten Elektrodenabstand. (Elektroden Messing verchromt und poliert. Form wie angegeben.)

- Restgasdruck = $3 \cdot 10^{-4}$ Torr, Elektroden eingebrannt.
- × Restgasdruck = 10^{-4} Torr, Elektroden frisch eingesetzt.
- Betriebsspannung.

Die Pumpkombination ist über ein Absperrventil mit einer freien Durchtrittsöffnung von 70 mm und über einen Tombakschlauch von gleicher lichter Weite mit dem unteren Teil des Entladungsrohres verbunden. Das Absperrventil wird durch eine *Simmering-Vakuumpumpe* einfachster Bauart gesteuert.

Durch die Anwendung der vorgespannten Steuerelektrode besteht, wie die Gegenüberstellung Fig. 14 betont, zwischen dem Strahlengang des Entladungsrohres und dem Strahlengang einer Hochvakuum-Elektronenstrahlröhre eine besonders weitgehende Ähnlichkeit. Der kurz unterhalb der

Steuerelektrode liegende kleinste Querschnitt des Strahles (etwa 1 bis 2 mm Durchmesser) wird schwach vergrößert in der Ebene des Auffängers, oder, wenn man hier keine zu große Energiedichte wünscht, hinter dieser abgebildet. Aus den bekannten Gesetzmäßigkeiten über die Abbildungsverhältnisse bei elektrostatischen Beschleunigungslinsen geht hervor, daß bei gegebener Quelle und Rohrlänge die Schärfe und Größe des Brennflecks in erster Linie durch die Teilspannung und Geometrie des ersten Beschleunigungszyinders bestimmt wird. Um die Teilspannung am ersten Zylinder und damit die Fleckschärfe regeln zu können, ist eine in Fig. 1 mit angedeutete Sprühspitze vorgesehen, deren Lage gegenüber der Hochspannungselektrode über eine Seidenschnur vom Meßbunker aus unter Beobachtung des Brennfleckes verstellt werden kann.

Die sehr sorgfältig durchzuführende *Zentrierung der Zylinderelektroden* erfolgt schrittweise von oben mit Hilfe einer etwa 1 m langen Hilfs-*vorrichtung*, die genau dem freien Innendurchmesser der Beschleunigungs-*elektroden* angepaßt ist und von oben bei der Montage heruntergelassen werden kann. Am unteren Ende der Beschleunigungszylinder sind wie

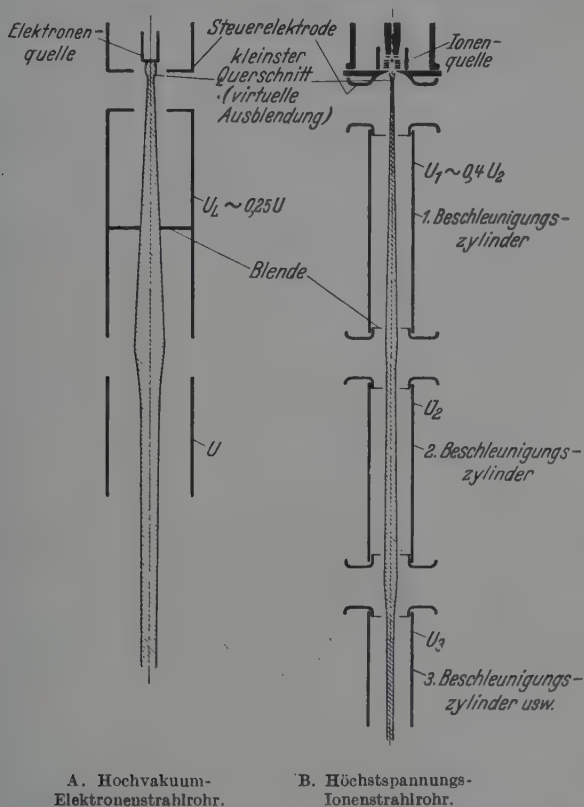


Fig. 14. Der dem Strahlengang einer Hochvakuum-Elektronenstrahlröhre nachgebildete Strahlengang des Entladungsröhres mit Steuerelektrode.

üblich u. a. zur Verringerung des (durch Ionenaufprall an den inneren Zylinderwandungen entstehenden und den Generator belastenden) gegenläufigen Sekundärelektronenstromes *Blenden* angebracht, die erst nach der Zylinderzentrierung von oben mit einer kleinen Hilfsvorrichtung eingesetzt werden. — Entscheidend für eine stabile und genügend gleichmäßige Aufteilung der Generatorspannung ohne Ohmschen Spannungsteiler oder merklich belastende Sprühstrecken ist, daß der direkte Ionen- oder Elek-

tronenstrahl in keiner Beschleunigungsstufe auf die zuvor erwähnten Blenden trifft oder diese auch nur streift. Andererseits sind zur Schwächung der vagabundierenden Strömungen im Entladungsrohr, bis deren Summe klein gegen den Wert des direkten Strahlstromes wird, möglichst enge Blenden erwünscht. Der hier zu schließende Kompromiß kann um so günstiger liegen, je einfacher und besser der Strahlengang zentriert werden kann und seine Zentrierung unter den verschiedenen Betriebsbedingungen (z. B. verschiedenen Spannungen) beibehält. Um während des Betriebes eine genaue Zentrierung zu ermöglichen, kann das ganze *Ionenquellensystem einschließlich Steuerelektrode* mit Hilfe der in Fig. 8 dargestellten Federkörpereinheit bis zu fast 50° gegen die Achse des Entladungsrohres geneigt

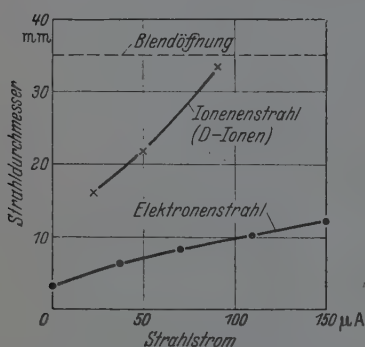


Fig. 15. Strahldurchmesser am Ort der Blende des ersten Beschleunigungszyinders mit 100 kV Teilspannung.

werden. Hierdurch kann in der Ebene der unteren Blende des ersten Beschleunigungszyinders die Mitte des Strahles um bis zu 20 mm verlagert werden. In der Ebene dieser Blende wurde bei verschiedenen Betriebsarten und Strahlströmen der Strahldurchmesser bestimmt. Das Ergebnis dieser Messungen unter den geometrischen Verhältnissen nach Fig. 1 bzw. Fig. 8 zeigt Fig. 15. Nachdem bei richtiger Fokussierung im Bereich dieser Blende etwa der größte Strahldurchmesser besteht und nach den Messungen Fig. 15

erschien bei Wahl von Blenden mit 35 mm eine ausreichende Sicherheit gegeben. Die größere Divergenz des Deuteronenstrahles gegenüber dem Wert des Elektronenstrahles gleicher Voltgeschwindigkeit und Stromstärke ist durch die höhere Raumladung der trägeren Ionen bedingt.

Die *Zurichtung des Entladungsrohres* beginnt nach Einstellung einer zunächst sehr kleinen Elektronen- oder Ionenstromstärke (10 μA) damit, daß nur an die beiden obersten Stufen die ihnen zugeordneten Teilspannungen gelegt werden. Dann erfolgt unter Beobachtung des unten erwähnten einklappbaren Leuchtschirmes (Quarzplatte oberhalb des Auffängers) die Zentrierung der Ionenquelle, die provisorische Fokussierung des Brennfleckes mit Hilfe der Sprühspritze am ersten Zylinder und die Ausrichtung des obersten Beschleunigungszyinders. Dieser kann unter Vakuum um Winkelbeträge bis zu 10° gegen die Achse geneigt werden. Weiter wird unter entsprechender Spannungssteigerung und gegebenenfalls leichter Nach-

zentrierung und Nachfokussierung eine Stufe nach der anderen hinzugeschaltet. Die auf diese Weise erreichte Zentrierung ist so gut, daß der Brennfleck stets nahezu gegenüber dem Auffänger zentriert ist. Eine letzte Nachzentrierung wird durch Parallelverschiebung des Auffängersystems vorgenommen. Schließlich wird der Strahlstrom so weit gesteigert, bis das Rotationsvoltmeter eine leichte Abnahme der Generatorspannung anzeigt.

c) *Auffängersystem*. Einen Blick auf das Auffängerende des Entladungsrohres im Meßbunker sowie auf einige der zuvor besprochenen Teile der Pumpanlage vermittelt die Photographie Fig. 16. Unmittelbar unterhalb des Pumpanschlusses befindet sich, wie auch schon in Fig. 1 dargestellt, die Schleusenklappe zur Abtrennung des Auffängerraumes und die übliche in den Strahlengang einschwenkbare Quarzplatte zur Brennfleckbeobachtung. Wie ebenfalls in Fig. 1 angedeutet, mündet im Raum unterhalb der Schleusenplatte die zur Beseitigung von Dämpfen vorgesehene und mit flüssiger Luft gekühlte Ausfriertasche von 50 mm lichter Weite. Der *Auffänger* hat einen Durchmesser von 30 bzw. 40 mm und ist hinreichend groß gegenüber dem Brennfleckdurchmesser (10 bis 20 mm je nach Fokussierung). Er befindet sich am unteren Ende eines 40 cm langen Rohres und ist zur Anbringung von Abschirm- und Meßsubstanzen, sowie von Meßeinrichtungen von fast allen Seiten zugänglich. Zum Zwecke der Nachjustierung ist der das Auffängerrohr tragende Flansch bzw. der Anschlußflansch der im folgenden Absatz besprochenen Ablenkkammereinheit in horizontaler Richtung verschiebbar gehalten.

Beispielsweise zur Bestimmung des Atomionenanteiles im Strahlstrom kann zwischen dem oberen Flansch des Auffängerrohres und dem unteren Flansch des Teiles mit Quarz- und Schleusenplatte eine *Ablenkkammer* geschaltet werden. Der das Ablenkkfeld liefernde Magnet ist auf der Photographie Fig. 16 mit abgebildet. Unmittelbar oberhalb der Ablenkkammer befindet sich ein (wieder durch einen Simmerring) von außen verstellbarer Spalt, dessen Weite durch Schwenkung einer rechteckigen Durchtrittsöffnung in weiten Grenzen verändert werden kann. Der durch Wasser gekühlte Auffänger ist zum Zwecke des Substanzwechsels oder zur Reinigung der Auffängeroberfläche leicht austauschbar.

Praktische Ergebnisse (gemeinsam mit F. Bernhard).

Zur *Eichung des Rotationsvoltmeters* wurden die scharfen ($p\gamma$)-Resonanzen an *Lithium und Fluor* benutzt. Zur Zählung der γ -Quanten diente ein Zählrohr von besonders kleinem Zählvolumen, das allseitig mit einem Bleimantel

von 3 cm Dicke umgeben war. Der Abstand der Schwerpunkte von Auffänger und Zählrohr betrug 9 cm. Als Auffänger wurde eine mehrere Milli-

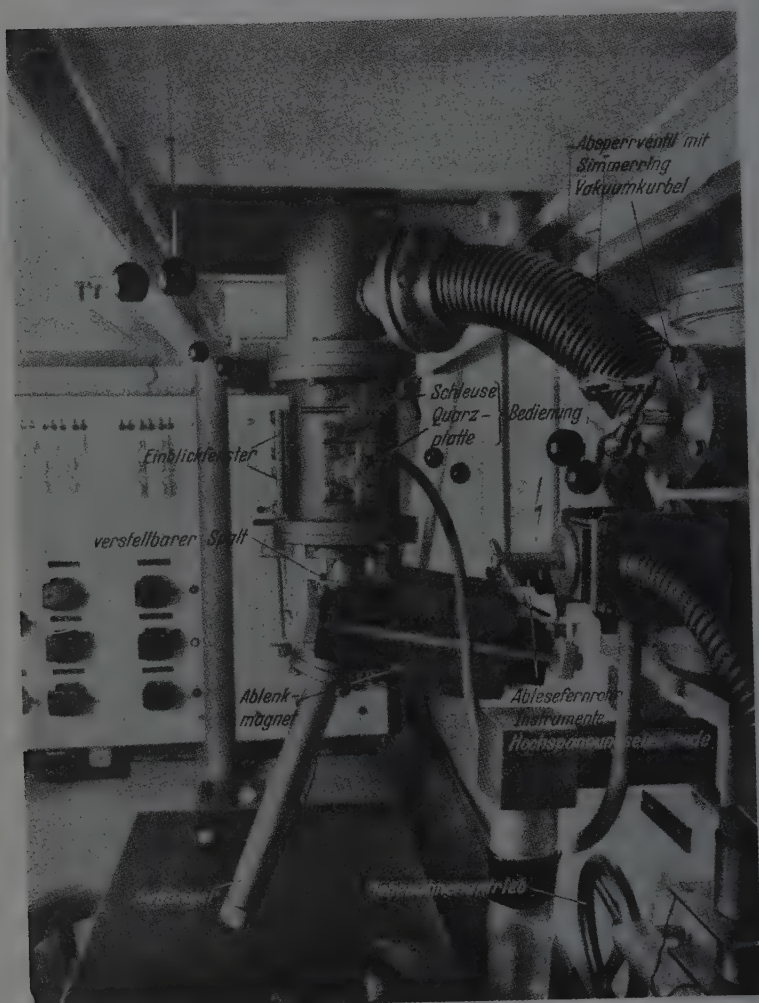


Fig. 16. Das Auffängerende des Entladungsrohres im Meßbunker mit der magnetischen Zerlegungsvorrichtung.

meter dicke Schicht von Lithiumfluoridkristallen benutzt. Das Ergebnis der Messungen zeigt Fig. 17. Die beobachteten Treppenstufen entsprechen

den bekannten $(p\gamma)$ -Resonanzen für Lithium¹⁾ und Fluor²⁾. Um die Zuordnung zu erleichtern, sind auf der Abszisse die verschiedenen Resonanzstellen für den Atom- und Moleküllenstrahl mit eingezeichnet. Der Atomionenanteil lag bei dieser Messung unter 50 %. Die Messung läßt erkennen,

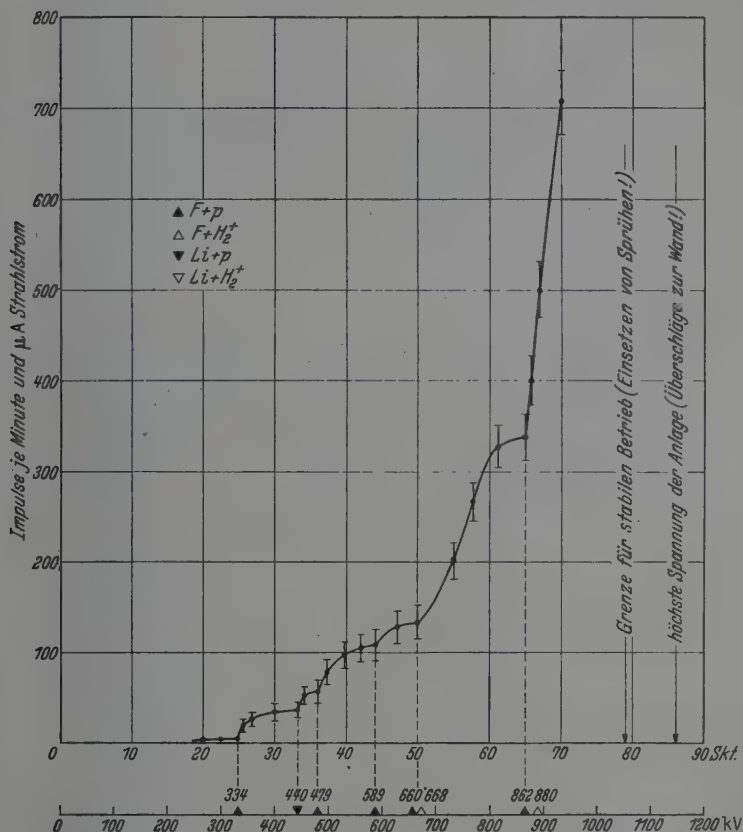


Fig. 17. Zur Eichung des Generatorvoltmeters mit Hilfe der $(p\gamma)$ -Resonanzen an LiF in dicker Schicht. (Abstand der Schwerpunkte vom Auffänger und Zählrohr 9 cm. Dicke der durchstrahlten Bleischicht 3 cm.)

daß die Eichkurve des Rotationsvoltmeters bis zu fast 900 kV sicher linear ist. Auf Grund dieser Eichung kann weiter angegeben werden, daß der Bandgenerator bei genügender Staubbefreiheit der Hochspannungselektrode

¹⁾ W. Bothe u. W. Gentner, ZS. f. Phys. **104**, 1. c. — ²⁾ J. F. Streib, W. A. Fowler u. C. C. Lauritsen, The Transmutation of Fluorine by Protons. Phys. Rev. **59**, 253, 1941.

und bei Betrieb der Klimaanlage (nur im Sommer notwendig) ohne kritische Sprühverluste positive Spannungen von bis zu 1050 kV liefert. *Die höchste Spannung der Anlage, bei der trotz der Schirme Überschläge zur Wand in unregelmäßiger Folge eintreten, liegt bei etwa 1150 kV.* Durch Zerstäuben von Tetrachlorkohlenstoff im Raum konnte nach dem Vorgehen von Joliot, Feldenkrais und Lazard¹⁾ die Spannung gegenüber den zuvor genannten Werten noch um etwa 150 kV gesteigert werden. Im Rahmen spezieller Meßaufgaben dürfte diese Möglichkeit wertvoll sein. — Die Durchschlagsfestigkeit des Entladungsrohres ist durch die gewählte Zahl von Beschleunigungsstufen und Einstellung ihres Elektrodenabstandes so bemessen, daß sie schon nach kurzem Einbrennen größer als die Maximalspannung des Bandgenerators wird. Die vorgesehene einfache Pumpanlage ermöglicht ein stabiles Arbeiten bis zur Maximalspannung des Bandgenerators.

Zur *Analyse der Strahlzusammensetzung* wurden Untersuchungen mit Hilfe der Ablenkammer durchgeführt. Das Ergebnis solcher Untersuchungen bei Zuführung von leichtem Wasserstoff in die Gaskammer der oben beschriebenen Ionenquelle bringt Fig. 18. Die Registrierung des Spektrums erfolgte durch Abphotographieren der Fluoreszenz auf einer Glasplatte am Ausgang der Ablenkammer. Neben den beiden Wasserstofflinien, die eindeutig aus der Ionenquelle stammen, weil ihre Linienhöhe im Gegensatz zu den übrigen Linien mit der Strahlfokussierung schwankt, sehen wir eine Anzahl schwächerer, zum Teil verwaschener Linien. Diese ändern beim Betrieb häufig und stetig ihre Lage und sind zum Teil durch ein Kontinuum miteinander verbunden. Die Intensität dieser Linien und Kontinua (zum Teil können diese den sechs Beschleunigungsstufen zugeordnet werden) nimmt mit zunehmender Brenndauer schnell ab. So ist beispielsweise die Aufnahme Fig. 18B etwa 1 Stunde später als die Aufnahme Fig. 18A durchgeführt worden. Einen ungefähren Überblick über den *Atomionenanteil am Strahlstrom* gewinnen wir bereits aus den Spektren in Fig. 18. Zur genaueren Beurteilung wurde die Intensität jeder einzelnen Linie mit Hilfe eines Spaltauffängersystems im Galvanometer gemessen. Danach schwankt der Atomionenanteil zwischen etwa 40 und 60% des Strahlstromes in Abhängigkeit von den Bedingungen in der Ionenquelle und der Einbrennzeit. Wird für den Dauerbetrieb ein Atomionenanteil von 50% angenommen, so ist der Vorteil der Anwendung eines Massenmonochromators bei Ionenquellen der beschriebenen Art offensichtlich.

¹⁾ F. Joliot, M. Feldenkrais u. A. Lazard, *Compt. rend. Acad. Sci. Paris* **202**, 291, 1936.

Bei Umschaltung auf schweren Wasserstoff tauchen sofort die diesem zugeordneten Atom- und Moleküllinien auf, während die nicht verdeckte Atomionenlinie des leichten Wasserstoffs allmählich verschwindet. Im Interesse möglichst großer Deuteronenintensität ist daher bei Übergang

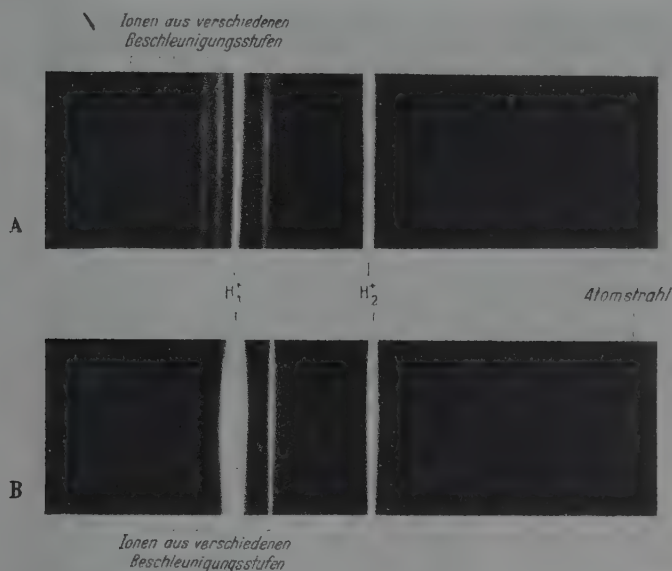


Fig. 18. Magnetische Zerlegung des Ionenstrahles bei Betrieb mit 850 kV und Wasserstoff, sowie verschiedene Bedingungen in der Ionenquelle.

- A. Atomionenanteil etwa 40 % des Strahlstromes.
B. Atomionenanteil etwa 75 % des Strahlstromes.

von Protonen auf Deuteronen eine längere Evakuierungszeit nützlich. Die relative Intensität von Atomionen zu Molekülionen ist etwa die gleiche wie bei leichtem Wasserstoff.

Die fortlaufende Beobachtung des Strahlspektrums auf dem Glasschirm gewährt, wie wir gesehen haben, einen sehr weitgehenden Einblick in die Vorgänge im Entladungsrohr und erleichtert damit außerordentlich die Einstellung günstigster Betriebsbedingungen bei der Inangasetzung der Anlage.

Für den Einsatz des Generators zur Neutronenerzeugung wurde anfänglich, um die Wartung zu vereinfachen, die $(Be + D)$ -Reaktion verwendet, obwohl ihre Neutronenausbeute bekanntlich etwas geringer ist¹⁾ als die der $(Li + D)$ -Reaktion. Eine zum Zwecke guter Wärmeableitung auf

¹⁾ E. Amaldi, M. A. Tuve u. L. R. Hafstad, Neutron yields from artificial sources. Phys. Rev. **51**, 896, 1937.

Kupfer aufgeschweisste etwa 1 mm starke Auffänger-Berylliumplatte stellte die Forschungsstelle der Auergesellschaft dem Verfasser freundlicherweise zur Verfügung. Neuerdings wird die $(\text{Li} + \text{D})$ -Reaktion bevorzugt. Eine Abschätzung der Ergiebigkeit des Generators bei 1,05 e-MV unter Benutzung dieser Reaktion stößt insofern auf Schwierigkeiten, als für diese Spannung eine direkte Messung des Wirkungsgrades der Neutronenerzeugung bisher nicht vorliegt. Amaldi, Tuve und Hafstad ¹⁾ geben das Neutronenäquivalent für diese Reaktion nur bis 0,8 e-MV an und auch dies nur unter der Voraussetzung, daß die räumliche Verteilung der bei dieser Reaktion im Wasser erzeugten thermischen Neutronen die gleiche sei wie für die Reaktion $(\text{Be} + \text{D})$. Diese Voraussetzung trifft zweifellos nicht ganz zu, was aus einer inzwischen von Amaldi und seinen Mitarbeitern ²⁾ gegebenen räumlichen Verteilungskurve der thermischen Neutronendichte für die Reaktion $(\text{Li} + \text{D})$ folgt. Extrapoliert man logarithmisch die von Amaldi, Tuve und Hafstad gegebenen Neutronenausbeuten der $(\text{Li} + \text{D})$ -Reaktion mit dickem Auffänger als Funktion der Geschwindigkeit linear, so erhält man bei 1,0 e-MV ein Ra—Be-Äquivalent von 15 g $(\text{Rn}\alpha + \text{Be})/\mu\text{A}$ Deuteronenstrom. Unter Zugrundelegung dieser Zahl berechnet sich das im Dauerbetrieb mittels der $(\text{Li} + \text{D})$ -Reaktion zur Zeit mit der besprochenen Anlage für 1,05 e-MV erreichbare Ra—Be-Äquivalent bei dem bisher maximal erreichten Ionenstrom von 35 μA unter Annahme von 50% Atomionen im Strahl zu 262 g $\text{Rn}\alpha + \text{Be}$. Diese Zahl muß einerseits wegen der Unsicherheit der Extrapolation, andererseits wegen der schon erwähnten Abweichung der räumlichen Verteilung der thermischen Neutronendichte bei den beiden Reaktionen sowie schließlich wegen der ungenauen Definition der zugrunde gelegten Einheit zu mindestens $\pm 70\%$ als unsicher angesehen werden. Nicht die bisher meist übliche Berechnung des Neutronenäquivalents, sondern nur eine *direkte Vergleichsmessung der Neutronenergiebigkeit* kann eine wirklich einwandfreie Unterlage für die Leistungsfähigkeit als Neutronengenerator geben, zumal bei ihr die Tatsache mit erfaßt wird, daß die Oberfläche des Li-Auffängers unter praktischen Verhältnissen in der Regel nicht ideal sauber ist oder bei längerem Betrieb bleibt. Für solche Vergleichsmessungen wurde im hiesigen Laboratorium ein spezieller Apparat (Neutronenintegrator) von Houtermans entwickelt. Die hiermit von J. Bartz und F. G. Houtermans durchgeführten Messungen, über die demnächst eingehender berichtet werden wird, lieferten als vorläufiges Ergebnis bei

¹⁾ Siehe Anmerkung 1 auf voriger Seite. — ²⁾ A. Ageno, E. Amaldi, D. Bocciarelli, N. B. Cacciapuoti u. G. C. Trabacchi, Rend. Rom 10, 525, 1940.

einer Strahlspannung von 1,01 e-MV (gemäß Spannungseichung Fig. 17) und einem Gesamtstrahlstrom von $22,8 \mu\text{A}$ auf den Auffänger ein 67,7mal größeres Neutronenäquivalent als das einer konstanten Neutronenquelle der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt von 497 mg ($\text{Ra } \alpha + \text{Be}$). Der Generator ergab somit bei dieser Messung nach Extrapolation auf unendliches Volumen eine Neutronenmenge, die $35,0 \text{ g} \pm 3 \text{ g}$ ($\text{Ra } \alpha + \text{Be}$) eines Präparats äquivalent ist, das die gleiche Neutronenausbeute besitzt wie das Vergleichspräparat der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt¹⁾. Die Integratormessung geschah dabei im Wasservolumen unter 90° zum Strahl bis zu einem Radius von 37,1 cm. Wird der bei voller Spannung am Auffänger zur Zeit erreichbare Strahlstrom von $35 \mu\text{A}$ berücksichtigt und wird weiter dem Umstand Rechnung getragen, daß die Neutronenausbeute bei der zuvor besprochenen Vergleichsmessung um 10 bis 13% zu ungünstig gewesen sein dürfte, weil die verhältnismäßig große als Auffänger verwendete Li-Menge im Zentrum des Wassertanks eine durch dünnere Li-Schichten leicht vermeidbare Senke an thermischen Neutronen bewirkt, so ergeben sich als wahres *Neutronenäquivalent der Anlage zur Zeit etwa 65 g Ra*. Praktisch wird im Dauerbetrieb etwa mit Strom- und Spannungsverhältnissen gearbeitet, die einem Neutronenäquivalent von 40 bis 50 g Ra entsprechen.

Nach Umpolung des Netzgerätes und den anderen schon erwähnten einfachen Änderungen an der Strahlenquelle liefert die Anlage gut fokussierte *Elektronenstrahlen* bei Spannungen und Stromwerten, die noch etwas höher sind als die entsprechenden Werte für Ionen. Der Einfluß des Erdmagnetfeldes, der die Zentrierung des Elektronenstrahles leicht stört, wird durch einen kleinen permanenten Magneten kompensiert, der innerhalb des Schutzringes der vorletzten Stufe ständig befestigt ist. Auf die Lage des Ionenbrennfleckes hat dieser Magnet naturgemäß keinen merkbaren Einfluß. — Bei Anbringung eines Lenard-Fensters werden intensive Elektronenstrahlen an Luft erhalten, die noch in über 1 m Abstand vom Fenster die Luft deutlich sichtbar anregen und Fluoreszenzschirme zum hellen Aufleuchten bringen. Die Anregung von Luft vor dem Lenard-Fenster und die Erregung eines Fluoreszenzmaterialstreifens durch einen 800-kV-Elektronenstrahl der Anlage zeigt die Photographie Fig. 19. Bei etwas herabgesetzter Spannung (650 kV Eindringtiefe in organisches Gewebe 3,2 mm) glaubten wir es wagen zu dürfen, für die Zeitdauer 1 Sekunde die

¹⁾ Für die leihweise Überlassung des starken Radiumpräparates ist der Verfasser den Herren Staatsrat Prof. A. Esau, Dr. H. Beuthe u. Dr. C. F. Weiss sehr zu Dank verpflichtet.

Hand in den mittleren Teil des Streukegels zu bringen. Im Augenblick der Bestrahlung entstand vielleicht 1 bis 2 mm unter der Haut eine eigenartige Hitzeempfindung. Die Elektronenstromdichte mag auf der be-

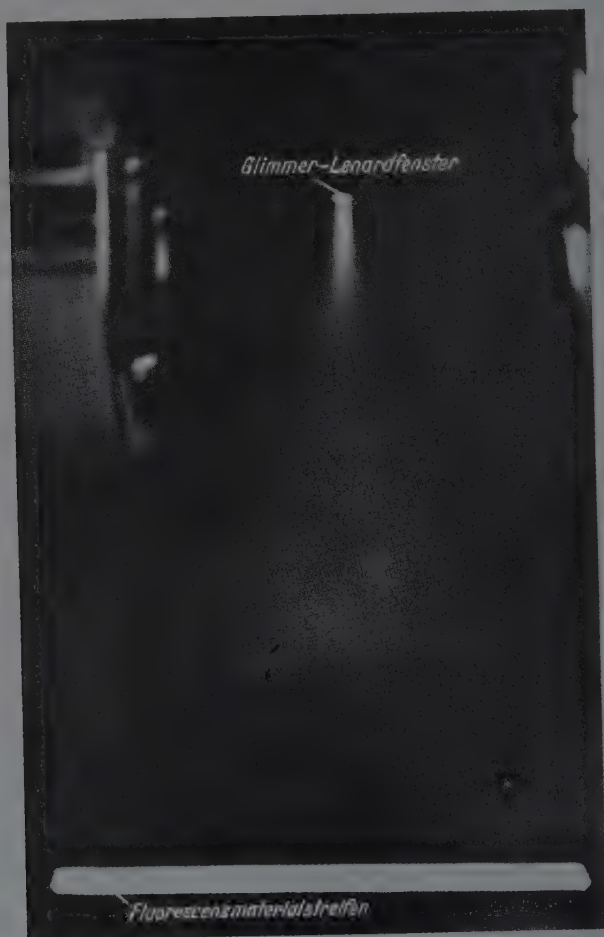


Fig. 10. Die Anregung von Luft und die Erregung eines 1 m vom Lenard-Fenster entfernten Fluoreszenzmaterialstreifens durch einen 800 kV-Elektronenstrahl der Anlage.

strahlten Oberfläche etwa $1/20 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ betragen haben. Schon wenige Stunden später zeigte der Handrücken eine kräftige Rötung. Nach 14 Tagen waren die bestrahlten und stark angeschwollenen Gewebeteile mit einer einzigen Brandblase überzogen. Trotz der kurzen Bestrahlungsdauer waren

schließlich größere Bereiche von Verbrennungen dritten Grades gegeben, die von mehrmonatigen äußerst heftigen bis zu Ohnmachtsanfällen sich steigernden Schmerzen begleitet waren¹⁾. Aus den eingetretenen Schädigungen (etwa 5000 r) und aus der Bestrahlungsdauer läßt sich nachträglich abschätzen, daß für den erfaßten Geweberaum die Schädigung etwa der Wirkung einer Radiumkanone mit einer Ladung von 100 kg Radium entsprochen hat. *Vor der Gefährlichkeit hochbeschleunigter Elektronen an Luft soll an dieser Stelle eindringlich gewarnt werden.* Diese Warnung gilt besonders auch für Entwicklungsarbeiten an der Elektronenturbine nach Steenbeck-Kerst, bei der mit einer freien Weglänge der Elektronen an Luft der Größenordnung 10 m und Eindringtiefen von mehreren Zentimetern in organisches Gewebe zu rechnen ist. Die Gefährlichkeit hochbeschleunigter Elektronenstrahlen, die bekanntlich auch für medizinisch-biologische Zwecke schon vor längerer Zeit vorgeschlagen worden sind²⁾³⁾⁴⁾, ist u. a. wegen der unmittelbar ionisierenden Wirkung der Elektronen und wegen der vollständigen Strahlungsabsorption im Gewebe physikalisch nicht überraschend.

Mit einem hohen Aufwand von Stearin, Borwasser und Blei durchgeführte *Abschirmmaßnahmen* sichern bei normaler Verwendung der Anlage vor Strahlenschädigungen durch Neutronen, γ -Strahlen und Röntgenstrahlen. Die Wirksamkeit der Abschirmungen und die täglich von den an der Anlage Beschäftigten aufgenommene Strahlendosis wird mit Hilfe der Kondensatorkammern und einer Kondimetereinrichtung der Physikalisch-Technischen Werkstätten (Freiburg i. Br.) laufend kontrolliert.

Für wirksame Hilfe bei Errichtung und Inbetriebsetzung des hier beschriebenen Generators hat der Verfasser seinen Mitarbeitern H. Reibedanz und E. Lorenz zu danken. Besonders verpflichtet bin ich dem Herrn Reichspostminister Dr. Ohnesorge und der *Forschungsanstalt der Deutschen Reichspost*, die die Aufnahme der kernphysikalischen Arbeitsrichtung und den Bau der heute besprochenen Anlage durch schon 1939 getroffene Entscheidungen ermöglicht haben.

¹⁾ Die Schilderung der biologischen Schädigung sowie des weiteren klinischen und Heilverlaufs erfolgt demnächst in der ZS. „Strahlen-Therapie“ von ärztlicher Seite (Prof. Dr. A. Pickhan). — ²⁾ R. Glocker, G. A. Kugler, H. Langendorff, Strahlenbiologische Versuche als Grundlage einer Therapie mit schnellen Kathodenstrahlen. Strahlentherapie **51**, 129, 1934. — ³⁾ W. Gentner und F. Schmidt-La Baume, Untersuchungen über biologische Wirkungen von Kathodenstrahlen. Ebenda **51**, 139, 1934. — ⁴⁾ A. Brasch u. F. Lange, Aussichten und Möglichkeiten einer Therapie mit schnellen Kathodenstrahlen. Ebenda **51**, 119, 1934.

Bestimmung des Einfangwirkungsquerschnittes von technischem Aluminium für langsame Neutronen*).

Von J. Gehlen in Heidelberg.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 27. Februar 1943.)

Der Einfangwirkungsquerschnitt von technischem Aluminium für langsame Neutronen wurde mittels zweier voneinander unabhängiger Methoden bestimmt. — Durch Absorptionsmessungen innerhalb von Paraffin ergab sich hierfür $q_{Al} = (0,43 \pm 0,07) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ und durch Vergleich mit dem bekannten Einfangwirkungsquerschnitt des Silbers $q_{Al} = (0,19 \pm 0,02) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$. — Die Halbwertszeiten der in Frage kommenden Kernprozesse wurden neu bestimmt.

I. Einleitung.

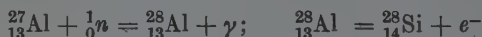
Bekanntlich ergeben sich bei Bestrahlung von Aluminium mit einem Neutronenstrahl, der sämtliche möglichen Geschwindigkeiten enthält, die folgenden drei Kernreaktionen, die alle zu künstlich radioaktiven Kernen führen:



mit einer Halbwertszeit von rund 15 Stunden,



mit einer Halbwertszeit von 10 Minuten,



mit einer Halbwertszeit von 2,3 Minuten.

Nur die letzte Reaktion jedoch, die eine Anlagerung darstellt, ist den als „langsam“ im üblichen Sinne bezeichneten Neutronen zuzuschreiben, während die beiden anderen von schnellen Neutronen verursacht werden. Weitere Reaktionen mit größerer oder kleinerer Halbwertszeit sind bisher noch nicht festgestellt worden.

Das Ziel der gegenwärtigen Arbeit ist, den Einfangwirkungsquerschnitt von technischem Aluminium für langsame Neutronen zu bestimmen, da die Kenntnis dieser Größe für bestimmte Zwecke von Interesse ist.

Den aus Streu- und Einfangwirkungsquerschnitt additiv zusammengesetzten Gesamtwirkungsquerschnitt einer solchen Kernreaktion kann man auf Grund des durch die Formel $\mu = Nq$ (N : Anzahl der Atome pro cm^3) dargestellten Zusammenhanges zwischen Absorptionskoeffizienten μ und Wirkungsquerschnitt q durch Absorptionsmessungen bestimmen.

*) D 15 gekürzt.

Solche weiter unten kurz beschriebenen Absorptionsmessungen sind als orientierende Vorversuche ausgeführt worden. Da jedoch der Streuungsanteil denjenigen der Einfangung bei weitem übertrifft, wurden zwei andere Methoden angewandt, deren grundsätzliche Verschiedenheit den Einfluß systematischer Fehler weitgehend ausschließen soll.

Untersuchtes Material. Untersucht wurde handelsübliches, technisches Aluminium, das unter der Bezeichnung „Reinaluminium H 99“ bekannt ist. Laut Angabe der Bezugsfirma enthält dieses Material höchstens 1 % Si + Fe, 0,03 % Ti und 0,1 % Cu + Zn. Eine quantitative Spektralanalyse über einen etwaigen Bor- oder Cadmiumgehalt ergab für Cadmium einen Molanteil unter 10^{-5} , der wahrscheinlich noch wesentlich kleiner ist, und für Bor einen Molanteil unter 10^{-5} *).

Kurze Andeutung der gebrauchten Methoden. Auf Grund eines Vorschlages von Heisenberg wurde die durch die Einfangung verursachte Absorption des Aluminiums in später näher zu erläuternder Weise durch Absorptionsmessungen innerhalb von Paraffin bestimmt. Die Auswertung erfolgte unter Zugrundelegung von mit dem Albedobegriff zusammenhängenden Überlegungen, wobei die Streuung nicht mehr eingeht, also der Einfangquerschnitt allein bestimmt wird.

Ferner wurde der zu untersuchende Einfangwirkungsquerschnitt durch Vergleich der β -Aktivität des Aluminiums mit derjenigen des Silbers bestimmt, dessen Einfangwirkungsquerschnitt genügend bekannt ist.

II. Versuche.

Als Neutronenquelle diente eine Radium-Berylliummischung, die in einem Glasröhrchen enthalten war. Die Anordnung für die Bestrahlung des Aluminiums war von Versuch zu Versuch verschieden und wird jeweils erläutert werden. Die Intensitätsmessungen der erzielten Aktivitäten der von Fall zu Fall benutzten Indikatoren erfolgten mit Geiger-Müller-Zählrohren.

Für die Vorversuche und für die Absorptionsmessungen mittels der Neutronenalbedo wurde ein Aluminiumzählrohr mit einer Wandstärke von 0,13 mm, einer effektiven Länge von 60 mm und einem inneren Durchmesser von 22 mm benutzt. Als Zähldraht diente ein Chromnickeldraht von 0,2 mm Dicke. Das Zählrohr war mit einem Gemisch von Argon von 6 cm Druck und Äthylalkoholdampf von 2 cm Druck gefüllt. Der Null-effekt betrug 50 bis 60 Teilchen pro Minute. Das Auflösungsvermögen der

*) Herrn Prof. Dr. Hanle, der in freundlicher Weise diese Untersuchung ausgeführt hat, sei hiermit der beste Dank ausgesprochen.

gesamten Apparatur, bestehend aus Zählrohr, dreistufigem Verstärker und Zähluhr, wurde empirisch durch die Abklingung eines Th-B-Präparates mit der bekannten Halbwertszeit von 10,6 h bestimmt.

Bei den Versuchen zum Vergleich der Aktivitäten von Silber und Aluminium wurde dagegen ein anderes Zählrohr benutzt, das später beschrieben werden wird. Das Auflösungsvermögen wurde hier in gleicher Weise bestimmt.

Bei allen Messungen wurde die Indikatorfolie in genau reproduzierbarer Weise zylinderförmig um das Zählrohr befestigt. Um die Messungen aufeinander beziehen zu können, wurde regelmäßig die Aktivität eines Standardpräparates aufgenommen.

1. *Vorversuche.* Die in der Einleitung erwähnten Absorptionsversuche zur Ermittlung des Gesamtwirkungsquerschnitts hätten am zweckmäßigsten

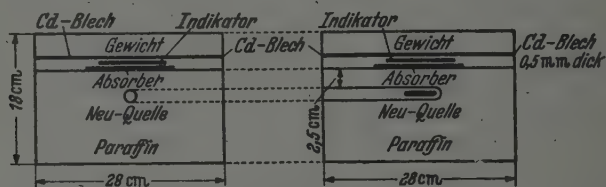


Fig. 1. Versuchsanordnung zur Bestimmung der Absorption von langsamen Neutronen in Aluminium.

mit einem möglichst parallelen Strahlenbündel langsamer Neutronen gemacht werden müssen, etwa wie bei einem „Neutronenmörser“, doch zeigten sich die dabei erreichten Aktivitäten als zu gering. Deshalb wurde die in Fig. 1 wiedergegebene Anordnung gewählt, was einer Wiederholung eines Versuchs von Wang¹⁾ in allen wesentlichen Einzelheiten gleichkommt.

Wegen der zu berücksichtigenden Winkelverteilung der Neutronen bei dieser Anordnung nach Fermi²⁾ stellt hier die Absorption nicht mehr eine Exponentialfunktion dar, sondern befolgt ein anderes, von Amaldi und Fermi³⁾ angegebenes Gesetz, das durch folgenden Ausdruck als Abhängigkeit der Absorption von der Größe $K\delta$ (Produkt des Absorptionskoeffizienten K und der Foliendicke δ) gegeben ist:

$$c(K\delta) = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} \int_0^1 e^{-\frac{K\delta}{x}} (1 + \sqrt{3}x) dx.$$

¹⁾ P. Wang, ZS. f. Phys. 110, 502 ff., 1938. — ²⁾ E. Fermi, Ric. Scient. Serie II, Vol. II, Nr. 1–2, 1936. — ³⁾ E. Amaldi u. E. Fermi, Phys. Rev. 50, 899 ff., 1936.

Diese Funktion ist in einem passenden Intervall mit einer für den gegenwärtigen Zweck ausreichenden Genauigkeit ausgewertet worden. Fig. 2 zeigt ihren Verlauf.

Diese Funktion gilt nur unter Voraussetzung dünner Absorberfolien.

Wang führt als Ergebnis seiner Absorptionsmessungen mit Aluminiumindikator und 3 mm dickem Aluminiumabsorber ohne Angabe des Fehlers an, daß der Absorber noch 89,5% der Intensität durchläßt, woraus er auf einen Massenabsorptionskoeffizienten $K = 0,037 \text{ cm}^2/\text{g}$ und daraus auf einen Wirkungsquerschnitt $q = 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ schließt, unter Hinweis auf die gute Übereinstimmung, mit dem von Dunning und Mitarbeitern¹⁾ angegebenen Wert von $1,5 \cdot 10^{-24}$. Mit dem für unsere Zwecke mit größerer Genauigkeit als in der Originalarbeit von Amaldi und Fermi dargestellten Kurvenverlauf ergibt sich dagegen für den von Wang angegebenen Absorptionswert ein $K = 0,046$, was zu einem Wirkungsquerschnitt $q = 2 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ führt.

Eine Wiederholung dieser Messungen mit Absorber und Indikator aus chemisch reinem Aluminium (Absorberdicke 3 mm) ergab für die Neutronendurchlässigkeit den Wert von $92,5 \pm 4\%$, der innerhalb der Fehlergrenze mit dem von Wang übereinstimmt. Hieraus ergibt sich ein Wirkungsquerschnitt von $q = (1,4 \pm 0,8) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$.

Es sei hervorgehoben, daß der Wert des Wirkungsquerschnitts sich in sehr empfindlicher Weise mit der Neutronendurchlässigkeit ändert, so daß solche Messungen nur bei sehr hoher Genauigkeit sinnvoll sind. Die hier beschriebenen Messungen haben deshalb mehr qualitativen Charakter. Die später beschriebenen Methoden führen zu viel kleineren Werten des Einfangwirkungsquerschnitts, so daß die Ansicht wohl berechtigt ist, daß der von Wang angegebene Wert in der Hauptsache den Streuwirkungsquerschnitt darstellt.

2. Bestimmung des Einfangwirkungsquerschnitts von Aluminium gegenüber langsamen Neutronen durch Absorptionsmessungen an Aluminium

¹⁾ J. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink u. D. P. Mitchell, Phys. Rev. 48, 265ff., 1935.

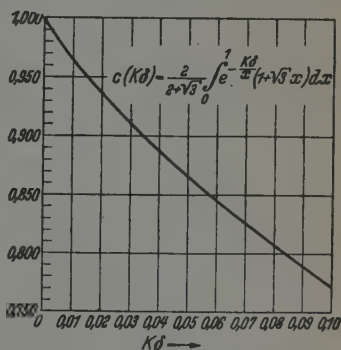


Fig. 2. Absorption langsamer Neutronen bei Berücksichtigung ihrer Winkelverteilung in Abhängigkeit von Absorptionskoeffizient mal Absorberdicke nach Amaldi und Fermi.

langsamen Neutrons und N die mittlere Stoßzahl in Paraffin bis zur Einfangung durch ein Proton, oder auch die mittlere Anzahl der freien Weglängen ist:

$$v = 1 + 0,5 \sqrt{3} \zeta (\sqrt{N + 1} - 1).$$

Nimmt man hier als Wert für die mittlere Anzahl der freien Weglängen nach den Messungen von Frisch, v. Halban und Koch ¹⁾

$$N = 200$$

und beachtet, daß $\zeta = \mu d$ ist (d Absorberdicke, μ Absorptionskoeffizient des Aluminiums), so ergibt sich dann nach μ aufgelöst:

$$\mu = \frac{v - 1}{6,6 \sqrt{3} d}.$$

Als Indikatoren dienten bei einer Versuchsreihe Dysprosiumfolien, bei einer weiteren Versuchsreihe Aluminiumfolien. Die Größe der Folien war $7,2 \cdot 5,1 \text{ cm}^2$. Das Dysprosium war als Dysprosiumoxyd in Mengen von 20 mg auf Papierfolien der obigen Größe von der Dicke 0,2 mm verrieben und mit einem Schutzanstrich aus Zaponlack versehen. Die Aluminiumindikatoren hatten eine Dicke von 0,25 mm. Wie Vorversuche zeigten, läßt sich Zaponlack nicht mit den angewandten Bestrahlungszeiten aktivieren. Überschlagsrechnungen zeigten, daß die Schwächung des durchgehenden Neutronenbündels durch den Aluminiumindikator oder durch die Papierfolie, die die Dysprosiumschicht trägt, unwesentlich ist.

Eine Versuchsreihe erfolgte mit 1 cm dickem Absorber auf jeder Seite und eine weitere Versuchsreihe mit 0,5 cm dickem Absorber, ebenfalls auf jeder Seite.

Als Verhältnis der Aktivität ohne Absorber zu derjenigen mit Absorber ergab sich folgendes:

Gesamtabsorberdicke	Dysprosiumindikator	Aluminiumindikator
1 cm	$1,27 \pm 0,02$	$1,26 \pm 0,02$
2 cm	$1,47 \pm 0,02$	$1,45 \pm 0,04$

Der Einfangwirkungsquerschnitt ergibt sich dann in bekannter Weise aus dem Absorptionskoeffizienten und es ergaben sich folgende End-

¹⁾ O. R. Frisch, H. v. Halban jun. u. Jörgen Koch, Kgl. Danske Vid. Selskab Mth. fys. Medd. 15, 10, 1937.

resultate, bei denen noch auf „unendlich dünne“ Absorberdicke linear extrapoliert wurde:

Gesamtabsorberdicke	Dysprosiumindikator	Aluminiumindikator
$d = 2 \text{ cm}$	$(0,35 \pm 0,02) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$	$(0,33 \pm 0,03) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$
$d = 1 \text{ „}$	$(0,39 \pm 0,03) \cdot 10^{-24} \text{ „}$	$(0,38 \pm 0,03) \cdot 10^{-24} \text{ „}$
$d = 0 \text{ „}$	$(0,43 \pm 0,06) \cdot 10^{-24} \text{ „}$	$(0,43 \pm 0,07) \cdot 10^{-24} \text{ „}$

Bei diesen Versuchen kann also als Endergebnis für den gesuchten Einfangwirkungsquerschnitt der Wert

$$q = (0,43 \pm 0,07) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$$

angesehen werden.

Die obigen Versuche setzen voraus, daß die 2,3-Minuten-Aktivität des Aluminiums allein durch langsame Neutronen verursacht wird, d. h. daß das Aluminium keine Resonanzstelle hat, daß sich also nicht Neutronen einer wesentlich höheren Energie anlagern können.

Sizoo und Ejkmán¹⁾ deuten neuerdings auf das Vorhandensein einer Resonanzstelle bei 80 e-Volt hin. In der gegenwärtigen Arbeit später beschriebene Versuche einer Bestrahlung eines in Cadmium eingebetteten Aluminiumindikators mit Neutronen verschiedener Geschwindigkeit ergeben jedoch nur eine intensitätsmäßig zu vernachlässigende Aktivität von 2,3 Minuten Halbwertszeit.

3. *Bestimmung des Einfangwirkungsquerschnitts von Aluminium gegenüber langsamen Neutronen durch Vergleich mit dem bekannten Einfangwirkungsquerschnitt des Silbers.* Hier erfolgte die Bestimmung der gesuchten Größe durch Vergleich der β -Aktivität einer Aluminiumfolie mit derjenigen einer Silberfolie.

Um die Verluste der niedrigeren Energien der β -Spektra möglichst herabzudrücken, wurde an Stelle des Zählrohres mit Aluminiumwand ein solches mit einer Cellophanwand von 0,01 mm Wandstärke benutzt. Es bestand aus einem mit Cellophan überspannten, aus einem Messingrohr ausgefrästen Gestell. Die Füllung bestand aus Luft von 7 bis 8 cm Druck ohne weiteren Dampfzusatz wegen der Durchlässigkeit des Cellophans für Alkohol- und Wasserdampf. Durch ein großes Vorgefäß wurde der Druck stabil gehalten. Trotz des Mangels eines eigentlichen Konstanzbereiches ließen sich bei ungefähr 1400 Volt Zählrohrspannung unschwer konstante Verhältnisse erreichen. Beiläufig sei erwähnt, daß sich das Zählrohr gegenüber kurzwelligem Licht sehr empfindlich zeigte.

¹⁾ G. J. Sizoo u. C. Ejkmán, *Physica* 8, 868ff., 1941.

Korrektur für die Verluste in der Zählrohrwand. Nach v. Borries und Knoll¹⁾ ergibt sich bei Cellophan der benutzten Dicke eine Durchlässigkeit von 38% für β -Strahlen von 70 kV Energie und eine solche von 47% für β -Strahlen von 80 kV. Es kann also angenommen werden, daß nur ein geringer Teil des β -Spektrums, dessen Höchstgrenze bei allen in Frage kommenden Aktivitäten über 1 MeV liegt, beim Durchgang durch die Zählrohrwand verloren geht.

Durch Vorversuche wurde die Absorption der gesamten β -Strahlung durch die Cellophanwand bestimmt und erwies sich als 1% der durchgehenden Strahlung. Die Endresultate sind mit dieser Korrektur versehen worden.

Indikatorfolien. Als Vergleichsfolien wurden ungefähr gleich große Folien aus dem üblichen, im Handel erhältlichen reinen Hüttensilber und aus technischem Aluminium benutzt. Die Aluminiumfolie als die weniger aktive wurde gerade noch so dick gewählt, daß ihre Aktivität bequem meßbar war, um möglichst wenig Absorption des energiearmen Teiles des β -Spektrums zu haben und die Dicke der Silberfolie durch eine Überschlagsrechnung so bestimmt, daß die Schwächung des Neutronenstrahles innerhalb der beiden Folien ungefähr die gleiche ist und ebenso diejenige der β -Teilchen.

Die Daten für die Folien waren demnach:

	Oberfläche	Dicke	Gewicht
Aluminiumfolie	10,50 · 5,95 cm ²	0,02 cm	3,2506 g
Silberfolie	10,58 · 6,03 „	0,0055 „	3,5266 g

Versuchsanordnung. Um unabhängig von der Literatur möglichst zuverlässige Daten für die Endrechnung zu erhalten, beschränkten sich die Untersuchungen nicht nur auf die Messungen der Aktivitäten und darauf folgende Bestimmung der Anfangsintensität in der Zeiteinheit bei „unendlich langer“ Bestrahlung, sondern es wurden auch die Halbwertszeiten bestimmt und außerdem Versuche über die Anregungen der beiden Elemente durch nichtthermische Neutronen gemacht, d. h. nach Abschirmung der C-Neutronen durch Cadmium.

Zur Beschreibung der räumlichen Reihenfolge wird oft eine bequeme, von Amaldi und Fermi²⁾ eingeführte Bezeichnungsweise angewandt. Hierbei bedeutet *Q* die Neutronenquelle, *P* Paraffin, während Indikator und Absorber durch ihre chemischen Symbole bezeichnet werden, wobei

¹⁾ B. v. Borries u. M. Knoll, Phys. ZS. 35, 279, 1934. — ²⁾ E. Amaldi u. E. Fermi, l. c.

der Indikator unterstrichen ist. Bei der Versuchsanordnung wurden stets die gleichen Paraffinblöcke benutzt, deren Dimensionen aus Fig. 4 ersichtlich sind.

Die Bedeutung des Schemas:



und



ist hierbei ohne weiteres klar.

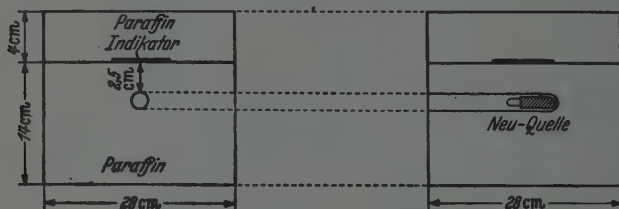
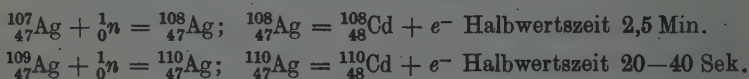


Fig. 4. Versuchsanordnung zur Aktivierung der Silber- und der Aluminiumfolie mit langsamen Neutronen.

A. Silber. Bei dem Silber kommen bei Aktivierung durch langsame Neutronen die Anlagerungen an die stabilen Isotope ^{107}Ag und ^{109}Ag nach dem folgenden Schema in Frage:



Die erste sei im folgenden die lange, die zweite die kurze Periode genannt.

Die Zähluhr wurde für die lange Periode von 10 zu 10 Sekunden abgelesen, für die kurze Periode von 5 zu 5 Sekunden und die gemittelten Meßreihen nach dem Gaußschen Algorithmus der kleinsten Quadrate ausgewertet.

Die Ergebnisse waren:

	Lange Periode	Kurze Periode
Bestrahlungszeit	60 Sekunden	2 Sekunden
Wartezeit	330 "	60 "
Meßzeit	420 "	60 "
Halbwertszeit	$(148,5 \pm 1,5) \text{ Sekunden}$	$(33,2 \pm 2) \text{ Sekunden}$
Anfangsintensität auf „unendlich lange“ Bestrahlung extrapoliert	$^{148,5}I_{\infty}^0 = 568 \pm 9$ Teilchen pro Sekunde	$^{33,2}I_{\infty}^0 = 2725 \pm 78$ Teilchen pro Sekunde

Fig. 5 und 6 geben ein Bild dieser Messungen.

Aktivierung des Silbers durch nichtthermische Neutronen. Beim Silber bestehen bekanntlich Resonanzstellen, so daß die obige Aktivität auch diejenige einschließt, die von nichtthermischen Neutronen herrührt. Um diese zu bestimmen, wurde eine Versuchsreihe ausgeführt, bei der die C-Neutronen

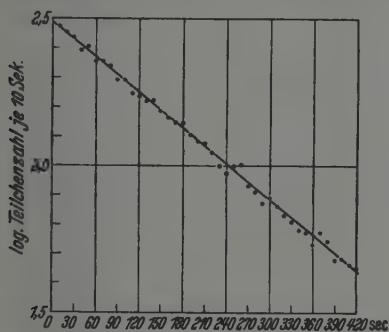


Fig. 5. Abklingung der Silberanregung mit der Halbwertszeit 2,5 Minuten.

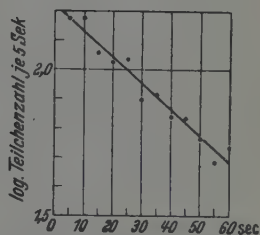


Fig. 6. Abklingung der Silberanregung mit der Halbwertszeit 33,2 Sekunden.

durch Cadmium abgeschirmt waren, nach dem Schema $QP \text{ Cd } \underline{\text{Ag}} \text{ Cd } P$. Das Cadmiumblech hatte eine Dicke von 0,5 mm, was mehr als genügt, um sämtliche C-Neutronen abzuschirmen.

Hier waren die Ergebnisse folgende:

	Lange Periode	Kurze Periode
Bestrahlungszeit	150 Sekunden	10 Sekunden
Wartezeit	240 "	50 "
Meßzeit	300 "	60 "
Halbwertszeit	nicht bestimmt	$(29,2 \pm 3)$ Sekunden
Anfangsintensität auf „unendlich lange“ Be- strahlung extrapoliert	${}_{148,5}I_{\infty}^0 = 38 \pm 1$ Teilchen pro Sekunde	${}_{33,2}I_{\infty}^0 = 260 \pm 5$ Teilchen pro Sekunde

Korrektur auf „unendlich dünne“ Folien. Zur Reduktion auf „unendlich dünne“ Folien wurden ferner noch Absorptionsmessungen gemacht. Die Indikatorfolie aus Silber wurde zu diesem Zwecke aktiviert und ihre Aktivität am Zählrohr unter Zwischenschaltung einer Absorberfolie aus Silber gleicher Dicke (0,005 cm) ausgemessen. Daraus ergab sich der Absorptionskoeffizient μ für die Absorption des β -Spektrums in Silber.

In einer begrenzten Schicht der Dicke d sei N_0 die Anzahl der pro cm Schichtdicke zerfallenden Atome. Dann ist die Anzahl N der Teilchen, die die Oberfläche verlassen:

$$N = N_0 \int_0^d e^{-\mu x} dx.$$

Das daraus berechnete N_0 ergibt mit d multipliziert die Reduktion auf Schichtdicke Null.

a) *Lange Periode.* Für das β -Spektrum der langen Silberperiode ergab sich ein Absorptionskoeffizient von

$$\mu = 95,03 \text{ cm}^{-1}.$$

b) *Kurze Periode.* Dieselbe Größe betrug für die kurze Silberperiode:

$$\mu = 58,35 \text{ cm}^{-1}.$$

Die betreffenden Korrekturen sind in der Endrechnung angewandt worden.

Anmerkung. Die hier benutzten Meßreihen wurden noch einmal zur Bestimmung der Halbwertszeit der kurzen Silberperiode ausgewertet. In enger Übereinstimmung mit dem am Anfang angegebenen Resultat ergab sich hier:

$$T = (33,5 \pm 2,5) \text{ Sekunden.}$$

Zusammenstellung der Silberaktivitäten. Es folgt hier eine Zusammenstellung der gemessenen Aktivitäten extrapoliert auf „unendlich lange“ Bestrahlung in Teilchen pro Sekunde, unter Beachtung der oben besprochenen Korrekturen.

Angeregt durch	Kurze Periode (33,2 Sekunden)			Lange Periode (148,5 Sekunden)		
		Extrapoliert auf Folien-dicke Null	Cellophan-korrektur		Extrapoliert auf Folien-dicke Null	Cellophan-korrektur
Thermische und nichtthermische Neutronen	2725 ± 79	3190	3222 ± 95	568 ± 9	732	739 ± 12
Nichtthermische Neutronen allein	260 ± 5	304	307 ± 6	38 ± 1	49	49 ± 1
Thermische Neutronen			2915 ± 100		plus	690 ± 13 2915 ± 100
Gesamtaktivität durch thermische Neutronen						3605 ± 113

Anmerkung: Das in der Literatur öfters angegebene Verhältnis von der Aktivität der kurzen zu der der langen Periode des Silbers für thermische Neutronen allein ergibt sich an der betreffenden Meßstelle nach den obigen Zahlen mit:

$$\frac{I_{33}}{I_{148,5}} = 4,24 \pm 0,17.$$

Hierbei ist jedoch zu bemerken, daß später zur Kontrolle mit chemisch ausgefällttem Silber durchgeführte, allerdings ungenauere Meßreihen zwar das von der Literatur abweichende Ergebnis für die Halbwertszeit der

kurzen Periode betätigten, für das obige Verhältnis jedoch den etwas abweichenden Wert $3,5 \pm 0,2$ ergaben. Vorsichtshalber sei also hier der Wert $3,8 \pm 0,6$

gewählt, wobei der Fehler von 0,6 als „geschätzter Fehler“ betrachtet sei.

B. Aluminium. Von den am Anfang erwähnten Aktivierungen von Aluminium durch Neutronen verschiedener Geschwindigkeiten, wie sie eine Radium-Beryllium-Neutronenquelle liefert; kommen bei nicht allzu langer Bestrahlungszeit nur die beiden letzten mit einer Halbwertszeit von 10 Minuten bzw. von 2,3 Minuten in Frage.

Verhältnis der beiden Aktivitäten. Durch einige zur Vororientierung ausgeführten Versuche mehr qualitativer Art ergab sich an der betreffenden

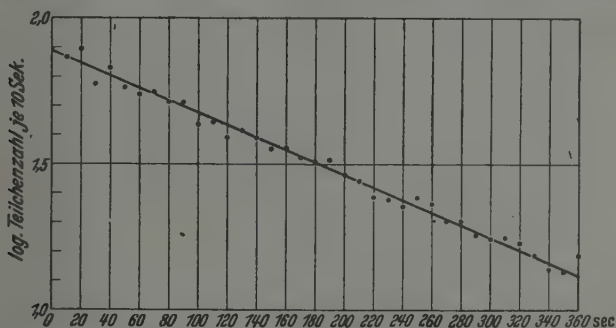


Fig. 7. Abklingung des durch langsame Neutronen aktivierten Aluminiums.

Meßstelle in Paraffin als Verhältnis der kurzen zur langen Periode bei Sättigung nach „unendlich langer“ Bestrahlung die Zahl 3. Dieser Wert ist mit einem Fehler behaftet, der 20% nicht übersteigen dürfte. Bei den eigentlichen genauen Messungen ist auf Grund dieses Ergebnisses eine Korrektur in Rechnung zu setzen. Da diese Messungen durchweg mit einer Bestrahlungszeit von 1 Minute ausgeführt wurden, beträgt diese Korrektur nicht mehr als 2 bis 3%, wie eine leichte Rechnung zeigt.

Messung mit der Vergleichsfolie aus Aluminium. Die Bestrahlung der in ihren Dimensionen schon früher beschriebenen Aluminiumfolie erfolgte mit der in Fig. 4 angegebenen Versuchsanordnung nach dem Schema *QP Al P*.

Es wurde eine Versuchsreihe ausgeführt mit einer Bestrahlungszeit von 1 Minute, einer Wartezeit von 1 Minute und einer Messungsdauer von 6 Minuten, wobei die Zähluhr von 10 zu 10 Sekunden abgelesen wurde.

Fig. 7 zeigt das Ergebnis. Die Intensität wurde in der üblichen Weise logarithmisch aufgetragen.

Für die durch langsame Neutronen verursachte kurze Periode des Aluminiums ergaben sich aus diesen Messungen folgende Daten:

Halbwertszeit. Durch Auswertung mit der Methode der kleinsten Quadrate ergab sich für die Halbwertszeit:

$$T = (140 \pm 2) \text{ Sekunden.}$$

Intensität. Als Anfangsintensität bei „unendlich langer“ Bestrahlung ergab sich als Resultat:

$$40 \pm 0,5 \text{ Teilchen pro Sekunde.}$$

Wegen der geringen Teilchenzahl erübrigt sich die oben behandelte Korrektur von 2 bis 3% für den Einfluß der 10-Minuten-Aktivität.

Korrektur auf „unendlich dünne“ Folien. Ähnlich wie beim Silber wurde auch hier die Absorption des β -Spektrums durch das Aluminium gemessen, indem die Aktivität der Aluminiumfolie nach Zwischenschaltung eines Absorbers aus Aluminium gleicher Dicke (0,02 cm), zwischen Indikator und Zählrohr, gemessen wurde. Als Absorptionskoeffizient in Aluminium des β -Spektrums ergab sich der Wert $\mu = 4,5 \text{ cm}^{-1}$.

Durch die sich daraus ergebende Korrektur erhöht sich der obige Wert auf 42 ± 1 Teilchen pro Sekunde.

Eine Korrektur für die Absorption durch die Cellophanwand des Zählrohres erübrigt sich wegen ihrer Kleinheit.

Aktivierung von Aluminium durch nichtthermische Neutronen. Wie schon erwähnt, wird das Bestehen einer Resonanzstelle des Aluminiums vermutet. Es war deshalb notwendig, durch weitere Versuche festzustellen, wie groß in unserem Falle eine etwaige Aktivität der Resonanzneutronen ist. Dazu wurde die Aktivität einer nach dem Schema $Q P \text{ Cd } \underline{\text{Al}} \text{ Cd } P$ durch Cadmium abgeschirmten Aluminiumfolie bestimmt.

Wegen der allzu schwachen Intensität bei der bisherigen Anordnung wurde zur Bestimmung des Verhältnisses der durch nichtthermische Neutronen angeregten Aktivitäten der 2,3-Min.- zur 10-Min.-Periode, dessen Kenntnis vor allem notwendig war, eine andere Anordnung gewählt mit einer wesentlich größeren Aluminiumfolie als die bisher benutzte, die sich in einer Cadmiumtasche von der Wandstärke von 0,5 mm in 1 cm Entfernung von der Neutronenquelle, diesmal jedoch in Wasser an Stelle von Paraffin, befand.

Ist G die Gesamtaktivität während der Meßzeit, so besteht dann die Beziehung:

$$G = {}_{2,3}I_{\infty}^0 \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{2,3} t_B} \right) \int_{t_W}^{t_W + t_M} e^{-\frac{\ln 2}{2,3} t} dt + {}_{10}I_{\infty}^0 \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{10} t_B} \right) \int_{t_W}^{t_W + t_M} e^{-\frac{\ln 2}{10} t} dt$$

(t_B Bestrahlungszeit, t_W Wartezeit, t_M Meßzeit).

Bei Bestrahlung mit zwei möglichst verschiedenen Zeiten ergeben sich daraus zwei Gleichungen in den beiden unbekannten Anfangsintensitäten bei „unendlich langer“ Bestrahlung $_{2,3}I_{\infty}^0$ und $_{10}I_{\infty}^0$.

Als Verhältnis dieser Größe ergab sich

$$\frac{_{2,3}I_{\infty}^0}{_{10}I_{\infty}^0} = 0,43 \pm 0,02.$$

Aus einer Meßreihe der ursprünglichen Folie ergab sich dann unter Anwendung dieses Zahlenwertes für die Anfangsintensität bei „unendlich langer“ Bestrahlung der Wert

$$_{2,3}I_{\infty}^0 = 0,5 \text{ Teilchen pro Sekunde.}$$

Da diese Korrektur innerhalb der Fehlergrenze des Endresultates von 42 ± 1 Teilchen pro Sekunde lag, wurde sie vernachlässigt.

C. Endgültige Berechnung des Einfangwirkungsquerschnitts. Ist N_0 der sekundliche Strom der Neutronen, der auf 1 cm^2 der Folie auftritt, so ist die Zahl der pro cm^2 und Sekunde von der Folie eingefangenen Neutronen gegeben durch das Produkt von N_0 mit der Anzahl der Atome, die sich in 1 cm^2 der Folie befinden, multipliziert mit dem Einfangwirkungsquerschnitt q , also

$$W = \frac{LP}{AO} q N_0$$

(L Loschmidt'sche Zahl, P Foliengewicht, A Atomgewicht, O Folienoberfläche).

Das Verhältnis der beiden Zahlen W_{Al} und W_{Ag} für Aluminium und Silber muß gleich sein dem Verhältnis der Anfangsintensitäten bei Sättigung der durch langsame Neutronen angeregten Substanzen, da bei Sättigung Gleichgewicht besteht und folglich in der Zeiteinheit ebenso viele Kerne zerfallen als angeregt werden. Also muß gelten

$$\frac{1,166 \cdot 10^{21} q_{\text{Al}} N_0}{3,105 \cdot 10^{20} q_{\text{Ag}} N_0} = \frac{42 \pm 1}{3605 \pm 113}.$$

Der Wert für q_{Al} ist einer neueren Arbeit entnommen worden, und zwar ist er nach Frisch, v. Halban und Koch ¹⁾

$$q_{\text{Al}} = (60 \pm 4) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Dies stellt zwar einen Gesamtwirkungsquerschnitt dar, doch ist die Streuung in Silber bekanntlich klein gegenüber der Anlagerung, so daß dieser Wert als Einfangwirkungsquerschnitt genommen werden kann.

¹⁾ O. R. Frisch, H. v. Halban jun. u. Jörgen Koch, l. c.

Durch Einsetzen dieses Wertes ergibt sich endgültig als Einfangwirkungsquerschnitt des technischen Aluminiums für langsame Neutronen

$$q_{Al} = (0,19 \pm 0,02) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

III. Vergleich mit anderen Messungen.

Die am Anfang erwähnte Messung von Wang ¹⁾ und Messungen anderer Autoren mit Vorrichtungen im Sinne des „Neutronenmörser“ ergaben wesentlich höhere Werte als der obige.

Die folgende Übersicht gibt ein Bild der Resultate dieser Messungen.

	$q \cdot 10^{24} \text{ cm}^2$
Dunning, Pegram, Fink, Mitchell ²⁾	1,5
Wang ¹⁾	1,6 (2,0)
Goldhaber und Briggs ³⁾	1,6
Frisch, v. Halban und Koch ⁴⁾	1,6

Im wesentlichen ist hier wohl der Streuwirkungsquerschnitt bestimmt worden, wie dies auch ausdrücklich von Goldhaber und Briggs angegeben wird. Diese Autoren, wie auch Mitchell, Murphy und Whitaker ⁵⁾ weisen auf die starke Streuung des Aluminiums hin.

Der wirkliche Einfangwirkungsquerschnitt des Aluminiums für langsame Neutronen wird also wesentlich kleiner sein als die in der vorangehenden Tabelle angegebenen Werte.

Die in dieser Arbeit angewandte Methode des Vergleichs mit dem schon bekannten Wirkungsquerschnitt eines anderen Elementes ist von einigen anderen ebenfalls benutzt worden.

Die folgende Tabelle gibt solche Messungen wieder.

	$q \cdot 10^{24} \text{ cm}^2$
Sinma und Yamasaki ⁶⁾ (Vergleich mit dem Silberisotop ¹⁰⁸ Ag)	0,1b
Rasetti ⁷⁾ (Vergleich mit ⁵⁵ Mn)	0,21
O'Neal und Goldhaber ⁸⁾ (Vergleich mit Mangan)	0,2
Fleischmann (unveröffentlichte Arbeit) (Vergleich mit Silber) nach einer freundlichen Mitteilung ⁹⁾	0,4

Die ersten drei Werte stimmen mit demjenigen der gegenwärtigen Arbeit gut überein.

¹⁾ P. Wang, l. c. — ²⁾ J. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink u. D. P. Mitchell, l. c. — ³⁾ M. Goldhaber u. G. H. Briggs, Proc. Roy. Soc. London (A) **162**, 127, 1937. — ⁴⁾ O. R. Frisch, H. v. Halban jun. u. Jörgen Koch, l. c. — ⁵⁾ A. C. G. Mitchell, E. J. Murphy u. M. D. Whitaker, Phys. Rev. **50**, 133, 1936. — ⁶⁾ K. Sinma u. F. Yamasaki, Sc. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. Tokyo **38**, 1941. — ⁷⁾ F. Rasetti, Phys. Rev. **58**, 10, 871, 1940. — ⁸⁾ R. D. O'Neal u. M. Goldhaber, ebenda **55**, 109, 1941. — ⁹⁾ ZS. f. Phys. (im Erscheinen).

IV. Diskussion.

Die Diskrepanz zwischen dem für den Einfangwirkungsquerschnitt mit der Absorptionsmethode erhaltenen Wert und demjenigen, den schon früher einige Autoren mit der Methode des Vergleichs mit einem bekannten Einfangwirkungsquerschnitt erhalten haben, ließen es ratsam erscheinen, diese letztere Methode noch einmal anzuwenden, und zwar unter Beachtung aller denkbaren Korrekturen. Wie man sieht, weicht das Resultat nicht wesentlich von demjenigen der Literatur ab.

Bestimmt man den Einfangwirkungsquerschnitt durch Messung der Absorptionseigenschaften in Paraffin, unter Ausschaltung der Streuung, so ergibt sich dagegen ein ungefähr doppelt so großer Wert.

Es könnte nun sein, daß das technische Aluminium Spuren von Cadmium, Gadolinium oder anderer seltener Erden mit hohem Einfangwirkungsquerschnitt für langsame Neutronen enthält. Eine genügend große Beimengung solcher Substanzen könnte wohl bei der Messung der Absorption einengrößeren Einfangwirkungsquerschnitt vortäuschen, der bei der Messung durch Vergleichung der β -Aktivitäten natürlich nicht in Erscheinung treten würde. Ein Überschlag mit $q_{\text{Cd}} = 3500 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ und $q_{\text{Gd}} = 30000 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ergibt, daß dann der Cadmiumgehalt ungefähr $6 \cdot 10^{-5}$ Molanteile und der Gadoliniumgehalt etwas unter 10^{-5} Molanteile betragen müßte, was zwar, was das Cadmium anbetrifft, mit dem am Anfang mitgeteilten Resultat der quantitativen Spektralanalyse des Materials in Widerspruch steht, diese Möglichkeit jedoch nicht von vornherein ausschließt, da sich diese Abschätzungen auf der Grenze zwischen der einen und der anderen Alternative bewegen. Es könnten sich ja mehrere solche Substanzen im untersuchten Material befinden, so daß für jede Komponente ein so kleiner Anteil, der der Analyse entgeht, vorhanden ist, daß das Meßresultat ungenau wird.

Es ließe sich auch an die Möglichkeit des Vorhandenseins einer unbekannten Aktivität des Aluminiums mit außerordentlich langer Halbwertszeit denken. Wegen der bei den Versuchen angewendeten allzu kurzen Bestrahlungszeit wäre dann eine solche Aktivität kaum angeklungen und würde deshalb der Messung entgehen. Der Einfluß dieser fraglichen Anregung auf unsere Rechnung würde also verloren gehen. Einer solchen unbekannten Aktivität müßte dann allerdings ein sehr hoher Einfangwirkungsquerschnitt entsprechen.

V. Zusammenfassung.

Der Einfangwirkungsquerschnitt von technischem Aluminium für langsame Neutronen wird nach einigen einleitenden Absorptionsversuchen

bestimmt, wobei zwei grundsätzlich verschiedene Methoden zu zwei verschiedenen Resultaten führen.

Durch Absorptionsmessungen in Paraffin ergibt sich der Wert

$$q_{Al} = (0,43 \pm 0,07) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2,$$

während der Vergleich mit dem bekannten Einfangwirkungsquerschnitt des Silbers zu dem Wert führt:

$$q_{Al} = (0,19 \pm 0,02) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Die Diskrepanz dieser beiden Werte könnte auf im technischen Aluminium enthaltenen Beimengungen von Cadmium oder einiger seltener Erden, wie z. B. Gadolinium, zurückzuführen sein. Ferner ließe sich diese Diskrepanz auch durch das Vorhandensein einer unbekannten, langperiodischen Anregung des Aluminiums durch langsame Neutronen erklären.

Gelegentlich dieser Messungen wurden die Halbwertszeiten der in Frage kommenden Kernprozesse unabhängig von der Literatur bestimmt und folgende Werte gefunden, von denen derjenige für die kurze Silberperiode von den meisten hierfür in der Literatur angegebenen Werte abweicht.

Als Halbwertszeiten ergaben sich folgende Werte:

Silber, kurze Periode: $T = (33,2 \pm 2)$ Sekunden,

Silber, lange Periode: $T = (148,5 \pm 1,5)$ Sekunden,

Aluminium: $T = (140 \pm 2)$ Sekunden.

Das Verhältnis der Intensitäten der kurzen zur langen Silberperiode bei Bestrahlung bis zur Sättigung durch langsame Neutronen wurde, ebenfalls abweichend von einigen Ergebnissen der Literatur, mit

$$3,8 \pm 0,6$$

bestimmt, wobei der Fehler als „geschätzter Fehler“ aufzufassen ist.

Die vorliegende Arbeit wurde in der Abteilung für Strahlungsphysik des Physikalischen Instituts der Universität Leipzig ausgeführt und im Juni 1942 zum Abschluß gebracht. Gegenüber dem Leiter dieser Abteilung, Herrn Prof. Döpel, der mir diese Arbeit ermöglichte und mich durch zahlreiche, wertvolle Ratschläge unterstützte, stehe ich in tiefer Dankesschuld. Mein Dank gebührt ferner Herrn Prof. Heisenberg für wertvolle Ratschläge. Ich möchte auch Herrn Feinmechanikermeister Paschen danken für die schnelle, geschickte und genaue Ausführung aller verwendeten Apparate und Apparateteile.

Neutronenemission des Urankerns als Folge seiner spontanen Spaltung.

Von W. Maurer und H. Pose, z. Z. Berlin-Dahlem.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 20. Februar 1943.)

Bei Messungen an größeren Uranmengen zeigte sich, daß das Uran spontan Neutronen emittiert. Die Halbwertszeit für den spontanen Neutronenzerfall ergab sich, bezogen auf U^{238} , zu $2,5 \cdot 10^{15}$ Jahre. Die Neutronenemission des Urans wird gedeutet als Folge spontaner Spaltung.

1. Einleitung.

Es ist eine in mannigfacher Hinsicht interessante Frage, ob der Prozeß der Kernspaltung auch spontan, ohne äußere, auslösende Ursache vorkommt. Als erster hat Libby¹⁾ experimentell nach einer solchen spontanen Spaltung bei Uran und Thorium gesucht. Er versuchte, aus unbestrahlten, abgelagerten Uran- und Thoriumsalzen chemisch radioaktive Spaltprodukte abzuscheiden, außerdem suchte er nach Neutronen, die gleichzeitig mit einer spontanen Spaltung auftreten sollten. Beide Versuche verliefen negativ. Als untere Grenze einer Halbwertszeit gegen spontanen Zerfall ergaben sich für U und Th die sehr großen Werte von 10^{14} und $5 \cdot 10^{13}$ Jahre.

Flerov und Petrzhak²⁾ haben diese Versuche mit einer wesentlich empfindlicheren Methode wieder aufgenommen. Sie suchten mit einer sehr großen Ionisationskammer nach stark ionisierenden Trümmern einer spontanen Uranspaltung. Sie erhielten einen kleinen positiven Effekt. Aus ihm ergab sich für spontane Uranspaltung eine Halbwertszeit von 10^{16} bis 10^{17} Jahren.

In dieser Arbeit soll berichtet werden über den Nachweis einer spontanen Neutronenemission bei Uran. Diese spontan emittierten Neutronen sind zu deuten als die gleichzeitig mit einer spontanen Uranspaltung emittierten Zerfallsneutronen. Unsere für spontane Neutronenemission gemessene Halbwertszeit beträgt $2,5 \cdot 10^{15}$ Jahre und liegt nahe bei dem Flerov und Petrzhakschen Wert.

2. Versuchsanordnung.

Die geringe Intensität der auftretenden Neutronenstrahlung machte es notwendig, die Empfindlichkeit der Anordnung möglichst weit zu treiben. Dies geschah einmal durch die Verwendung größerer Mengen Urans, die etwa 9 kg Metall entsprachen, weiterhin durch ein Borzählrohr mit einer

¹⁾ W. F. Libby, Phys. Rev. 55, 1269, 1939. — ²⁾ G. N. Flerov u. K. A. Petrzhak, Journ. of Physics USSR. 3, 275, 1940.

wirksamen Fläche von etwa 700 cm² bei einem Durchmesser von 5 cm und einer Länge von 35 cm (Fig. 1). Um die Empfindlichkeit des Zählrohres nicht durch eine unnötig dicke Borschicht herabzusetzen, wurde darauf geachtet, daß das Luftäquivalent der Borschicht die Reichweite der beim $B^{10}(n, \alpha) Li^7$ -Prozeß auftretenden α -Strahlen nur wenig überstieg. Als Gasfüllung für das Rohr wurde Argon von 7 cm Hg Druck verwendet.

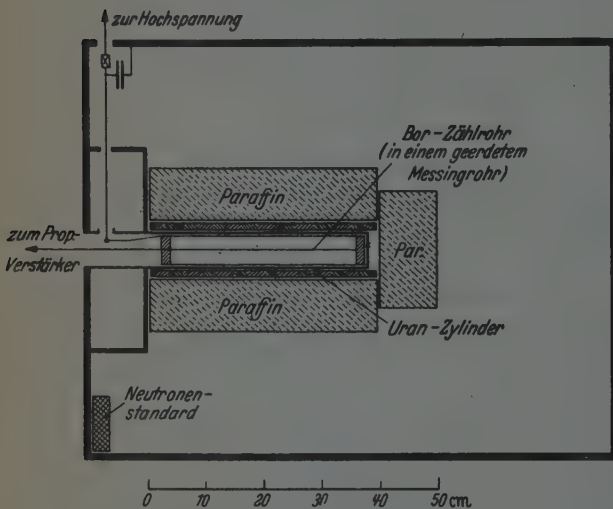


Fig. 1. Zählrohranordnung.

Das Zählrohr saß in einem geerdeten Messingrohr und war an der linken Wand des in Fig. 1 gezeigten Kastens so starr befestigt, daß die erheblichen Massen der verwandten Paraffin- und Uranmenge getragen wurden. Die Innenelektrode des Zählrohres wurde zum Eingang eines Proportionalverstärkers geführt, an dessen Endstufe ein Thyatron mit Zählwerk angeschlossen war.

Die Einsatzspannung des Zählrohres lag bei 750 Volt. Sie blieb im Verlauf der Messungen gut konstant. Als Arbeitsspannung wurden 600 Volt gewählt. Bei diesem Wert betrug die Änderung der Teilchenzahl mit der Spannung etwa 0,5% pro 1 Volt.

Die Empfindlichkeit der Anordnung wurde dauernd durch einen Neutronenstandard überprüft. Sie war über lange Zeiten gut konstant, kleine Schwankungen wurden rechnerisch berücksichtigt.

3. Messungen.

Durch die erste Reihe von Messungen wurde der Nulleffekt ermittelt, das heißt die Teilchenzahl, die vom Zählwerk angezeigt wurde, wenn das Zählrohr nur mit dem Paraffinmantel umgeben war (Zeile 1, Tabelle 1). Weiterhin wurde der Effekt gemessen, der sich ergab, wenn zwischen den Paraffinmantel und das Zählrohr der Eisenzyylinder mit der 8,82 kg Uranmetall äquivalenten Uranmenge geschoben wurde (Tabelle 1, Zeile 3). Die einzelnen Messungen erstreckten sich über eine Zeit von etwa 3 Monaten.

Die Einzelergebnisse stimmten während dieser Zeit innerhalb des statistischen Fehlers gut überein.

Tabelle 1.

1. Zählrohr + Paraffin.....	$1,24 \pm 0,02$ Teilchen/min
2. Zählrohr + Uranzylinder.....	$1,31 \pm 0,02$ „
3. Zählrohr + Uranzylinder + Paraffin.....	$11,7 \pm 0,04$ „

Man erkennt, daß durch Einbringen der Uranschicht zwischen Paraffin und Zählrohr ein Effekt gemessen wird, der den Nulleffekt um annähernd das Zehnfache übersteigt. Das Uran sendet demnach Neutronen aus, und zwar handelt es sich vorzugsweise um schnelle Neutronen, die in der Paraffinhülle verlangsamt und zurückgestreut werden. Langsame Neutronen können offenbar nur in geringer Anzahl auftreten, da die Messung mit Uran, ohne Paraffinmantel — Tabelle 1, Zeile 2 — einen Effekt ergab, der praktisch mit dem Nulleffekt (Zeile 1 der Tabelle 1) übereinstimmt.

Diese Versuchsergebnisse ließen vermuten, daß der gemessene Effekt durch eine Neutronenstrahlung, herrührend von einer spontanen Spaltung des Urankerns, verursacht wird.

(α , n)-Prozesse innerhalb des Urans. Aufgabe der weiteren Messungen war es nun, alle die Effekte auszuschließen, welche bei der vorliegenden Versuchsanordnung eine Neutronenemission zur Folge haben konnten. Als erster derartiger Effekt wäre zu nennen die Erzeugung von Neutronen durch (α , n)-Prozesse an Verunreinigungen des Urans oder am Uran selber durch dessen α -Teilchen, wobei z. B. die energiereiche α -Gruppe des U^{234} die beiden anderen Uranisotope umwandeln könnte. Beide Effekte sind allerdings nicht sehr wahrscheinlich. Wegen des schwachen gemessenen Uraneffektes muß jedoch auf die genannten Einwände genauer eingegangen werden.

Die Zahl der von den 8,82 kg Uran ausgesandten α -Teilchen beträgt etwa $2 \cdot 10^8$ α -Teilchen/sec = 6 mC α -Äquivalent. Falls der Neutroneneffekt von (α , n)-Prozessen herrühren würde, müßte eine Beimengung von einigen mC Ra Em (im Gleichgewicht mit ihren Folgeprodukten) zum Uran eine wesentliche Vergrößerung des Neutroneneffektes verursachen, insbesondere wegen der großen α -Energie von RaC. 3 bis 4 mC Ra Em wurden in den evakuierbaren Eisenzylinder, der das Uran enthielt, eingeführt. Die Registrierung ergab aber innerhalb des statistischen Fehlers den unveränderten Wert der früheren Uranmessungen. Ein meßbarer Einfluß von (α , n)-Prozessen war demnach nicht vorhanden.

Höhenstrahlneutronen. Da die beobachtete Neutronenemission des Urans sehr klein ist, ist zu zeigen, daß sie nicht durch die Neutronen der Höhenstrahlen hervorgerufen wird, d. h. also von einer Uranspaltung durch

langsame Neutronen herrührt. Die Höhenstrahlneutronen entstehen in der die Versuchsanordnung umgebenden Materie und in der Versuchsanordnung selber, d. h. im Paraffinmantel und Uran.

Der in Tabelle 1 angegebene Nulleffekt der Anordnung „Zählrohr + Paraffinmantel ohne Uran“ von $1,24 \text{ T/min}$ rührt von der radioaktiven Verseuchung des Borzählrohres und Höhenstrahlneutronen her. In üblicher Weise wurde der Verseuchungseffekt durch Panzerung des Borzählrohres mit amorphem Bor gemessen. Ein dem Uranzylinder gleicher Eisenhohlzylinder wurde mit $0,42 \text{ g Bor/cm}^2$ gefüllt und über das Zählrohr geschoben, wobei die Stirnseiten unbedeckt blieben. Die Wirksamkeit dieser Abschirmung wurde besonders gemessen. Es wurde ein so starkes Neutronenpräparat in die Nähe der Anordnung gebracht, daß die Zahl der registrierten Neutronen groß gegen den Nulleffekt war. Solche Messungen wurden mit verschiedener räumlicher Anordnung des Präparats jeweils einmal mit und ohne den Borpanzer ausgeführt. Es ergab sich, daß die Borpanzerung die von außen auf das Zählrohr allseitig auftreffenden Neutronen zu etwa 98%, d. h. praktisch vollständig abschirmte. Mit Borpanzerung ergab sich ein Effekt von $0,81 \pm 0,02 \text{ T/min}$. Dieser Betrag stellt also den α -Verseuchungseffekt des Zählrohres dar.

In der Anordnung „Zählrohr + Paraffinzylinder“ betrug der Effekt $1,24 \pm 0,02 \text{ T/min}$ (s. Tabelle 1). Der Überschuß von $0,43 \text{ T/min}$ über den Verseuchungsnulleffekt rührt von den Höhenstrahlneutronen her. Beim Einbringen des Urans in den Paraffinzylinder stieg dieser Effekt von $0,43$ auf $11,7 - 1,24 \text{ T/min}$. Eine so große Vermehrung kann nach den bisherigen Erfahrungen nicht auf induzierte Uranspaltung zurückgeführt werden. Um den Einfluß der Höhenstrahlneutronen auf den Uraneffekt zu bestimmen, wurde folgender Versuch unternommen: Eine starke Neutronenquelle befand sich außerhalb der Anordnung. Nun wurde die Anzahl der Neutronen gemessen: 1., wenn das Zählrohr nur mit dem Paraffinmantel umgeben war, und 2., wenn sich der Eisenbehälter mit dem Uran zwischen Paraffin und Zählrohr befand. Es ergaben sich die Werte der Tabelle 2.

Das Einbringen des Urans bewirkt also eine Schwächung des vom äußeren Präparat herrührenden Effekts von 490 auf 207 T/min , d. h. eine Abnahme auf rund 40%. Dader Effekt der Höhenstrahlneutronen $0,43 \text{ T/min}$ ohne Uran beträgt, ist er also bei der Uranmessung mit $0,40 \cdot 0,43 \text{ T/min} \approx 0,2 \text{ T/min}$ in Ansatz zu bringen. Neben dem inneren Verseuchungseffekt muß also der registrierte Uraneffekt wegen der Höhenstrahlneutronen um $0,2 \text{ T/min}$, d. h. insgesamt um 1 T/min verringert werden. Er beträgt also $11,7 - 1,0 = 10,7 \pm 0,05 \text{ T/min}$. Damit ist der Effekt der von außen auf die Versuchsanordnung auftreffenden Neutronen berücksichtigt.

Tabelle 2.

	I Teilchenzahl mit Präparat	II Teilchenzahl ohne Präparat	I-II Teilchenzahl allein mit Präparat
1. Zählrohr + Paraffin	491 ± 3 T/min	1,24 T/min	490 T/min
2. Zählrohr + Paraffin + + Uran im Fe-Behälter.....	219 ± 2 T/min	11,7 T/min	207 T/min

Bei den durch die Höhenstrahlung im Uran hervorgerufenen Zerplatzprozessen werden auch im Uran selbst Neutronen frei. Es wäre denkbar, daß die beobachtete Neutronenemission des Urans ganz oder teilweise durch derartige Vorgänge zustande kommen könnte. Wenn man die naheliegende Annahme macht, daß die neutronenerzeugende Höhenstrahlkomponente „massenproportional“ absorbiert wird, kann man unter Benutzung der bekannten Häufigkeit von Blau-Wambacherschen Sternen in photographischen Schichten überschlagen, daß in den hier verwandten 8,8 kg Uran pro Minute ungefähr ein schnelles Neutron entstehen sollte. Da die im nächsten Abschnitt besprochene Ansprechwahrscheinlichkeit unserer Anordnung für Neutronen $\sim 1/1000$ beträgt, können die Neutronen aus Zerplatzprozessen im Uran keinen merkbaren Beitrag zum registrierten Uraneffekt liefern¹⁾. Die im Abschnitt 6 zu besprechenden Registrierungen mit 7,6 kg Blei und 3,5 kg Thor an Stelle der 8,8 kg Uran bestätigen diese Überschlagsrechnung. Es ergab sich in der Anordnung „Zählrohr + Paraffinmantel“ und mit und ohne Blei bzw. Thor praktisch immer derselbe Effekt. Die im Blei bzw. Thor natürlich vorhandene Absorption der im Paraffinmantel entstehenden langsamen Neutronen wurde experimentell ermittelt und rechnerisch berücksichtigt. Diese Versuche zeigten, daß im Blei und Thor keine Neutronenemission nachweisbar war, was mit obiger Schätzung übereinstimmt.

Man könnte daran zweifeln, ob die „massenproportionale“ Extrapolation der mit leichteren Elementen gefundenen Häufigkeit von Blau-Wambacherschen Sternen auf das Uran erlaubt ist. Falls bei dem relativ instabilen Uran die Erzeugung von Höhenstrahlneutronen sehr viel stärker als massenproportional erfolgt, wäre der beobachtete Neutroneneffekt vielleicht hierauf zurückzuführen. Die Absorption der Neutronen auslösenden Höhenstrahlkomponenten müßte dann um 4 Zehnerpotenzen größer sein als bei den benachbarten Elementen. Um das zu entscheiden, wäre eine Wiederholung der Messungen in verschiedenen Höhen notwendig. Es ist beabsichtigt, die Uranregistrierungen in einem Bergwerk zu wiederholen.

¹⁾ Diese Zahlenangaben wurden einer Arbeit von E. Bagge, Ann. d. Phys. 39, 512, 535, 1941 entnommen.

Als einzige vernünftige Erklärung für die beobachtete Neutronenaktivität des Urans bleibt damit die Annahme einer spontanen, von außen nicht induzierten Neutronenaktivität. Der Zusammenhang mit der von Flerov und Petrzhak ¹⁾ gefundenen spontanen Uranspaltung wird durch die folgenden Abschnitte noch deutlicher.

4. Zahl der Neutronen pro Gramm Uran und Sekunde.

Zur Bestimmung der absoluten Zahl der Neutronen, die von 1 g Uran pro Sekunde ausgesandt werden, wurde gleichzeitig mit dem Uran ein schwaches (Rn + Be)-Präparat registriert. Dies hatte eine Stärke von 0,24 mC und bestand aus einem Glasröhrchen von der Länge des Uranbehälters. Es befand sich in einer Rille zwischen Uranzylinder und Paraffinmantel. Wegen des zur Zählrohrachse kreissymmetrischen Aufbaues genügt es zum Vergleich, das Präparat auf eine Mantellinie des mit Uran gefüllten Eisenzylinders zu legen. Genau genommen müßte es im Uran liegen, was sich aber technisch nicht durchführen ließ. Im übrigen ergaben Versuche mit einer etwas geänderten Anordnung, daß der Effekt von der Stellung des Präparats im Innern nur sehr schwach abhängt.

Der Vergleich der Effekte mit Uran und Uran + (Rn + Be)-Präparat zeigte, daß die 8,82 kg Uran eine Neutronenaktivität besitzen, die $1,3 \cdot 10^{-2}$ mC (Rn + Be) äquivalent ist. Setzt man für 1 mC (Rn + Be) eine Neutronenzahl von 15000 n/sec an²⁾, so bedeutet das bei unserer Uranmenge eine Emission von 201 Neutronen pro sec; gemessen wurden 0,178 Neutronen pro sec (s. Abschn. 3). Die Ansprechwahrscheinlichkeit der Anordnung für Neutronen betrug damit $8,9 \cdot 10^{-4}$. Unter der Annahme, daß je ausgesandtes Neutron ein Urankern zerfällt, ergibt sich eine Halbwertszeit für die spontane Spaltung von $2,5 \cdot 10^{15}$ Jahre $\pm 25\%$, bezogen auf die Summe der Uranisotopen.

5. Versuche mit anderen Elementen.

Es wurde auch bei Pb, Th, Au und Pt nach einer natürlichen Neutronenaktivität ohne Erfolg gesucht. Die unteren Grenzen der Halbwertszeiten betragen für Pb $2 \cdot 10^{16}$ Jahre, für Th 10^{16} Jahre, für Pt und Au $2 \cdot 10^{15}$ Jahre. Libby fand als untere Grenze für Thor 10^{14} Jahre.

6. Diskussion der Ergebnisse.

In der bereits eingangs erwähnten Arbeit hat Libby ³⁾ versucht, aus etwa 200 g abgelagertem, unbestrahltem Uranylнитrat auf chemischem

¹⁾ G. N. Flerov u. K. A. Petrzhak, Journ. of Physics USSR. 3, 275, 1940. — ²⁾ Vgl. E. T. Booth, J. R. Dunning u. F. G. Slack, Phys. Rev. 55, 876, 1939. — ³⁾ Siehe Zitat 1, S. 285.

Wege aktives Jod und andere von der Uranspaltung her bekannte aktive Folgeprodukte abzuschcheiden. Da seine Versuche so angelegt waren, daß er eine Halbwertszeit von mehr als 10^{14} Jahren nicht finden konnte, ist sein negatives Ergebnis verständlich. Dasselbe gilt für die von ihm gesuchte spontane Neutronenemission.

Mit der jetzt aus den Messungen von Flerov und Petrzhak bekannten Halbwertszeit sieht man, daß es fraglich ist, ob sich auch aus sehr großen, abgelagerten Uranmengen aktive Präparate gewinnen lassen. Vor allen Dingen weiß man wenig über die Häufigkeit der bei der spontanen Uranspaltung auftretenden Elemente. Versuche in dieser Hinsicht sind geplant.

In befriedigender Weise ergänzen sich die vorliegenden Untersuchungen mit den Messungen von Flerov und Petrzhak. Die Verfasser verwandten eine Ionisationskammer mit Proportionalverstärker von 6000 cm^2 Oberfläche, auf der sich etwa 10 bis 20 mg Uran pro cm^2 , das heißt insgesamt etwa 15 g befanden. Sie fanden mit dieser Anordnung stündlich 25 bis 30 Teilchen, und zwar mit einer Energieverteilung, wie sie von der induzierten Uranspaltung her bekannt ist. Berücksichtigt man, daß je Spaltung mehrere Neutronen frei werden können, so stimmt die von ihnen gefundene Halbwertszeit von 10^{16} bis 10^{17} Jahren befriedigend überein mit der von uns für spontane Neutronenemission gefundenen Halbwertszeit von $2,5 \cdot 10^{15}$ Jahren. Diese nahe Übereinstimmung zeigt sehr deutlich, daß die von uns gefundenen Neutronen die sind, welche gleichzeitig mit der spontanen Spaltung auftreten. Aus dem Vergleich der Halbwertszeiten für Neutronenemission und dem Wert für Spaltung nach Flerov und Petrzhak ergibt sich, daß die Anzahl der pro Spaltung ausgesandten Neutronen zwischen 4 und 40 liegen sollte, wobei selbst der erste Wert noch reichlich hoch erscheint. Dieser, natürlich recht ungenaue Wert stimmt mit dem überein, was man über die induzierte Uranspaltung weiß. Es wäre von Interesse, die Energieverteilung der bei der spontanen Spaltung gefundenen Neutronen zu messen und mit der bei der induzierten Uranspaltung gefundenen Verteilung zu vergleichen. Die Ausbeute an spontan emittierten Neutronen sollte gerade noch zu einer Messung ausreichen. Entsprechende Versuche sind in Vorbereitung.

In ihrer Arbeit über den Mechanismus der Uranspaltung schätzen Bohr und Wheeler¹⁾ die mittlere Lebensdauer für spontane Spaltung von U^{238} zu 10^{22} Jahren ab. Die Unsicherheit dieser Abschätzung kann mehrere Zehnerpotenzen betragen. Man vergleiche hierzu die folgende Notiz von S. Flügge.

¹⁾ N. Bohr u. J. A. Wheeler, Phys. Rev. 56, 426, 1939.

Die Frage nach dem Uranisotop, welches spontan spaltet, ist experimentell nicht zu beantworten, weil es keine getrennten Uranisotope in ausreichender Menge gibt. Denkbar wäre auch, daß nicht das Uran spaltet, sondern eines seiner Folgeprodukte. Flerov und Petrzhak übersättigten das Uran in ihrer Ionisationskammer mit der zwölffachen Gleichgewichtsmenge an UX_1 , fanden aber keinen größeren Effekt.

Eine andere Erklärungsmöglichkeit bietet die Annahme, daß Uran tatsächlich verzweigt zerfällt, d. h. neben den α -Teilchen auch bisher noch nicht gefundene β -Teilchen aussendet. Durch den β -Zerfall würden Elemente 93 entstehen, und zwar, was für die Spaltbarkeit wichtig ist, möglicherweise in angeregtem Zustande. Je nachdem man von U^{238} , U^{235} oder U^{234} ausgeht, würde unter der Annahme, daß das entstehende Element 93 sofort zerfällt, das Verzweungsverhältnis etwa 10^7 , 10^{11} oder 10^8 betragen. Werte dieser Größenordnung lassen sich experimentell kaum feststellen.

Wieweit die spontane Spaltung von bisher unbekannten Uranisotopen herrühren könnte, läßt sich aus Untersuchungen von Nier¹⁾ entnehmen, der obere Grenzen für die Häufigkeiten der Uranisotope 231 bis 242 angibt. Niers Werte liegen in der Größe zwischen 1 : 12000 bis 1 : 65000. Mit der hier gefundenen Halbwertszeit von etwa 10^{16} Jahren für U^{238} würde ein Isotop der Häufigkeit 1 : 10^6 immer noch eine Halbwertszeit von 10^{10} Jahren liefern, könnte also durchaus noch auf der Erde vorhanden sein. Die von Nier angegebenen oberen Grenzen für die Häufigkeiten unbekannter Uranisotope schließen diese Erklärung somit nicht aus. Wie aus den Ausführungen von Flügge hervorgeht, wären für die Uranisotope 231, 232 und 233 Halbwertszeiten von 10^{10} Jahren noch verständlich.

Beim spontanen Uranzerfall sollten sich in alten Uranerzen die stabilen Endprodukte der Zerfallsreihen allmählich anreichert haben. Bei dem Alter der Erde von 10^9 Jahren und einer Halbwertszeit für spontane Spaltung von 10^{16} bis 10^{17} Jahren ist aber erst der 10^7 - bis 10^8 -te Teil der Uranmasse in stabile andere Elemente zerfallen. Solche geringen Beimengungen kommen aber überall bereits als Verunreinigungen vor, und entziehen sich in den meisten Fällen dem chemischen Nachweis. Es ist aber nicht unwahrscheinlich, daß sich massenspektroskopisch kleine Verschiebungen der Isotopenverteilung feststellen lassen.

Der Auergesellschaft danken wir für die freundliche Überlassung größerer Mengen von Uran- und Thorpräparaten.

Berlin-Dahlem, Max Planck-Institut, März 1942.

¹⁾ A. O. Nier, Phys. Rev. 55, 150, 1939.

Spontane Neutronenemission von Uran und Thorium.

Von H. Pose, z. Z. Berlin-Dahlem.

(Eingegangen am 20. Februar 1943.)

Zur Vermeidung des Einflusses der Höhenstrahlung wurden Messungen über die spontane Neutronenemission des Urans im Bergwerk angestellt. Es ergab sich für U^{238} eine Halbwertszeit von $3,1 \cdot 10^{15}$ Jahren. Weiterhin konnte eine schwache Neutronenstrahlung des Thoriums festgestellt werden. Als Halbwertszeit wurde für Th^{232} $1,7 \cdot 10^{17}$ Jahre gefunden.

Die in der vorstehenden Arbeit beschriebenen Messungen von Maurer und dem Verfasser¹⁾ zeigen eindeutig, daß das Uran spontan Neutronen emittiert. Die Deutung dieser Neutronenemission als Folge einer spontanen Spaltung des Urankerns wird außer durch theoretische Erwägungen insbesondere deshalb sehr wahrscheinlich, weil die Zahl der emittierten Neutronen zu einer Halbwertszeit für den Zerfall des Urankerns führt, die mit der von Flerov und Petrzhak²⁾ für die spontane Spaltung gefundenen gut verträglich ist.

Wenn auch die mit Maurer durchgeführten Messungen bereits eine erhebliche Sicherheit der quantitativen Angaben über die Zahl der Neutronen erreichten, so war doch eine Reihe von Schwierigkeiten vorhanden, deren eindeutige Überwindung nicht in vollem Umfange gelungen war. Die an der Erdoberfläche immer noch in gewisser Anzahl vorhandenen langsamen Neutronen der Höhenstrahlung beeinflussen den Nulleffekt und rufen andererseits Spaltungen des Urankerns hervor. Weiterhin ist es nur durch Vergleichsmessungen möglich, den Einfluß des Urans und der zusätzlich zur Verlangsamung der Neutronen notwendigen Paraffinpanzer zu ermitteln, denn beide beeinflussen die Anzahl der von außen her auftreffenden langsamen Höhenstrahlneutronen und führen andererseits zur Verlangsamung schneller Höhenstrahlneutronen.

Bei den Messungen äußern sich diese Einflüsse in folgender Weise. Der Nulleffekt des Borzählrohres wird einmal dadurch gemessen, daß das Zählrohr ohne weitere Absorber die Zahl der vorhandenen Teilchen registriert. Dieser Nulleffekt setzt sich zusammen aus einer Anzahl von Ausschlägen, die, infolge des natürlichen Gehalts an radioaktiven Elementen im Material des Zählrohres und im Bor, durch α -Teilchen hervorgerufen

¹⁾ Vgl. die vorstehende Arbeit von W. Maurer u. H. Pose. — ²⁾ G. N. Flerov u. K. A. Petrzhak, Journ. of Physics USSR. 3, 275, 1940.

werden. Hierzu kommt eine Anzahl von Ausschlägen, die durch langsame Höhenstrahlneutronen verursacht werden. Setzt man nun zur Messung einen Mantel aus Uran und — zur Verlangsamung der Neutronen — einen Paraffinmantel um das Zählrohr, so wird dadurch die Zahl der in das Zählrohr gelangenden Höhenstrahlneutronen geändert. Diese Änderung läßt sich ermitteln, wenn man eine Vergleichsmessung mit einer außen angebrachten künstlichen Quelle langsamer Neutronen ausführt. Da die Energieverteilung der Höhenstrahlneutronen aber eine weitgehend andere ist als die der zum Vergleich verwandten Ra-Be-Neutronen, und da die Höhenstrahlteilchen durch Zerplatzprozesse im Uran oder im Paraffin Neutronen bilden können, ist eine sichere Ermittlung dieser Einflüsse an der Erdoberfläche nicht möglich. Diese störenden Einflüsse der Höhenstrahlung lassen sich dadurch vermeiden, daß man die Messungen unter einer Absorberschicht genügender Dicke, am einfachsten im Bergwerk, ausführt.

Für derartige Messungen stand in einem alten Kalibergwerk in Aschersleben ein geeigneter Schacht zur Verfügung. Die Sohle befand sich in 485 m Tiefe. Die bei Maurer und Pose beschriebene Anordnung wurde dort aufgestellt, und es konnten die notwendigen Messungen innerhalb von 14 Tagen durchgeführt werden.

Der Nulleffekt erwies sich bei den Messungen als außerordentlich konstant. Während die Messungen im Institut Schwankungen des Nulleffektes zeigten, die außerhalb der durch den statistischen Fehler bedingten Grenzen lagen, traten derartige Abweichungen bei den Messungen im Bergwerk nicht auf. Wie in der vorstehenden Arbeit gezeigt wurde, änderte sich der Nulleffekt, wenn das Zählrohr mit Absorbern, Paraffin oder Uran, umgeben wurde. Derartige Änderungen waren bei den Messungen im Schacht nicht zu beobachten. Die Werte für den Nulleffekt zeigt Tabelle 1, Nr. 1, 4, 6 und 12. Man erkennt, daß ein Einfluß der Panzerung des Zählrohres nicht vorhanden ist, wie es auch zu erwarten ist, wenn äußere Neutronenquellen fehlen.

Die Meßreihen 2 und 7 zeigen den Uraneffekt. Die Teilchenzahl liegt tiefer als bei den Messungen von Maurer und Pose. Dies ist dadurch bedingt, daß die geometrische Anordnung von Uran und Paraffin anders gewählt war. Wegen der im folgenden zu besprechenden Thor-Messungen mußte ein wesentlich weiterer Paraffinmantel gewählt werden, um die notwendigen Thormengen zwischen Zählrohr und Paraffin unterbringen zu können. Die Meßreihen mit Uran zeigen, daß die Neutronenstrahlung des Urans mit erheblicher Sicherheit gemessen werden kann.

Tabelle 1. Einzel-Meßreihen.

Lfd. Nr.	Meßanordnung	Teilchenzahl/min
Nulleffekt		
1.	Zählrohr ohne Absorber	$0,77 \pm 0,03$
4.	" " "	$0,78 \pm 0,01$
6.	Zählrohr + Paraffin + Blei	$0,78 \pm 0,02$
Uraneffekt		
2.	Zählrohr + Uran + Paraffin	$7,36 \pm 0,07$
7.	" " "	$7,45 \pm 0,08$
Thoreffekt		
3.	Zählrohr + Thor + Paraffin	$0,87 \pm 0,03$
5.	" " "	$0,93 \pm 0,03$
11.	" " "	$0,87 \pm 0,02$
12.	Zählrohr + Thor	$0,78 \pm 0,02$

Eine Reihe weiterer Messungen wurde mit Thor-Metallpulver angestellt. In ähnlicher Weise wie beim Uran wurde ein doppelwandiger Messingzylinder mit 10 kg Thor zwischen Zählrohr und Paraffinmantel angeordnet. Die Nummern 3, 5 und 11 der Tabelle 1 zeigen die Ergebnisse von Meßreihen mit dieser Anordnung. Man erkennt, daß Thor zum Nulleffekt einen kleinen zusätzlichen Neutroneneffekt liefert. Wie Tabelle 2 zeigt, liegt dieser Effekt, trotz seiner geringen Größe weit außerhalb des durch die statistische Schwankung der Teilchenzahl bedingten Fehlers.

Tabelle 2. Mittelwerte.

Nulleffekt	$0,77 \pm 0,01$	Teilchen/min
Nulleffekt + Uraneffekt	$7,41 \pm 0,05$	
Uraneffekt allein	$6,64 \pm 0,05$	
Nulleffekt + Thoreffekt	$0,89 \pm 0,01$	
Thoreffekt allein	$0,12 \pm 0,02$	
Nulleffekt + Thor, ohne Paraffin	$0,78 \pm 0,02$	
Thor, ohne Paraffin allein	$0,01 \pm 0,02$	

Bei der Sicherstellung eines so geringen Effektes erhebt sich die Frage, wieweit die γ -Strahlung der 10 kg Thor Anlaß zu Entladungen des Zählrohres geben kann. Die Zahlenwerte der Meßreihe 12 in Tabelle 1, die mit Thor ohne Paraffinmantel gewonnen wurden, zeigen, daß sich praktisch der Nulleffekt ergibt. Ein Einfluß der γ -Strahlung des Thors tritt danach nicht auf. Zu dem gleichen Ergebnis führte ein orientierender Versuch, bei dem sich zwischen der Uranschicht und dem Paraffinmantel eine Cadmiumschicht befand. In diesem Falle wurde praktisch der Nulleffekt gemessen. Hieraus erhellt, daß die geringe Zunahme der Teilchenzahl bei der Thor-Messung tatsächlich von Neutronen herrührt. Nach Ausweis der Messungen

scheint demnach eine schwache spontane Neutronenaktivität des Thors gesichert zu sein.

Die quantitative Auswertung der Meßergebnisse geschah in ähnliche Weise wie bei Maurer und Pose. Ein Röhrchen von der Länge des Zählrohres, gefüllt mit $\text{Rn} + \text{Be}$, wurde zwischen Uran bzw. Thor und den Paraffinmantel gelegt, und nun die Anzahl der Neutronen gemessen. Die Zahl der von dem Röhrchen emittierten Neutronen wurde durch Messung der γ -Strahlung des Röhrchens ermittelt, wobei die Angaben von Booth, Dunning und Slack¹⁾ benutzt wurden, die für 1 mC ($\text{Rn} + \text{Be}$) eine Neutronenzahl von 15000 pro sec fanden.

Aus den Messungen folgt, wenn jedem Neutron ein zerfallender Kern entspricht, für Uran eine mittlere Lebensdauer von $4,5 \cdot 10^{15}$ Jahren und eine Halbwertszeit von $3,1 \cdot 10^{15}$ Jahren. Die Zahlenwerte sind bezogen auf die Summe der Uran-Isotope, also praktisch auf U^{238} . Der Fehler dieser Werte, der im wesentlichen bedingt ist durch die Vergleichsmessung mit dem ($\text{Rn} + \text{Be}$)-Präparat, ist kleiner als 10%. Weiterhin sind diese Werte abhängig von der Sicherheit, mit der die Neutronenausbeute von ($\text{Rn} + \text{Be}$)-Präparaten bekannt ist. Schließlich kann die Verschiedenheit der Energieverteilung der ($\text{Rn} + \text{Be}$)- und der Uran-Neutronen eine geringe Unsicherheit in die Zahlenangaben hineinbringen.

Für Thor wurde eine mittlere Lebensdauer von $2,4 \cdot 10^{17}$ Jahren, was einer Halbwertszeit von $1,7 \cdot 10^{17}$ Jahren entspricht, errechnet. Die Werte beziehen sich auf die Summe der Thor-Isotope. Der statistische Fehler dieser Werte beträgt 20%. Die geringe Größe des gemessenen Effektes und die Unsicherheit, mit der die Neutronenergiebigkeit des Vergleichspräparates behaftet ist, können den Fehler des Ergebnisses in schwer kontrollierbarer Weise beeinflussen.

Die Ergebnisse dieser Messungen zeigen auch hinsichtlich der Halbwertszeit des Urans für Neutronenemission eine befriedigende Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Maurer und Pose. Der bei diesen Messungen gefundene Wert von $3,1 \cdot 10^{15}$ Jahren liegt etwas höher als der frühere von $2,5 \cdot 10^{15}$ Jahren, doch ist die Genauigkeit des letzten Wertes geringer. Die Abweichung beider Werte voneinander liegt innerhalb des Fehlers, der für den kleineren Wert 25% beträgt. Wieweit der Unterschied der beiden Werte dadurch bedingt ist, daß die früheren Messungen infolge des unkontrollierbaren Einflusses der Höhenstrahlung zuviel Neu-

¹⁾ E. T. Booth, J. R. Dunning u. F. H. Slack, Phys. Rev. **55**, 876, 1939.

tronen lieferten, läßt sich nicht entscheiden. Die Abweichung der beiden Werte voneinander liegt im Sinne eines derartigen Einflusses.

Der Vergleich der Halbwertszeit mit dem von Flerov und Petrzhak¹⁾ für spontane Spaltung gefundenen Wert von 10^{16} bis 10^{17} Jahren zeigt, daß der niedrigere Wert von 10^{16} Jahren wahrscheinlicher ist, denn er kommt dem hier gefundenen Wert näher. Das würde bedeuten, daß bei jeder Spaltung im Mittel etwa drei Neutronen frei werden.

Der Zweck der vorstehenden Messungen, die Ergebnisse von Maurer und Pose hinsichtlich der Neutronenemission des Urans qualitativ zu sichern und quantitativ weiterzuführen, ist somit erreicht. Es gelang die Halbwertszeit des Urans für die spontane Neutronenemission wesentlich sicherer zu bestimmen. Weiterhin konnte eine spontane Neutronenemission beim Thorium festgestellt werden.

Der Auergesellschaft sei auch an dieser Stelle für die Überlassung größerer Mengen Urans und Thormetalls gedankt.

Berlin-Dahlem, Max Planck-Institut, Juni 1942.

¹⁾ G. N. Flerov u. K. A. Petrzhak, l. c.

Zur spontanen Spaltung von Uran und seinen Nachbarelementen¹⁾.

Von S. Flügge, Berlin-Dahlem.

(Eingegangen am 20. Februar 1943.)

Die Frage nach der spontanen Spaltbarkeit der schwersten Atomkerne ist wohl zuerst in der grundlegenden Arbeit von Bohr und Wheeler²⁾ angeschnitten und versuchsweise quantitativ behandelt worden. Es sind hierbei zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder ist Z^2/A groß genug, daß überhaupt keine Potentialschwelle während des Ablaufs der Spaltung zu überwinden ist. Da der kritische Parameter

$$x = 0,0209 Z^2/A \quad (1)$$

hierzu > 1 sein muß, tritt dies erst für $Z^2/A = 48$ ein, was ein beträchtliches Stück jenseits der Grenze des periodischen Systems liegt. In diesem Falle ist zu erwarten, daß die Spaltung sofort bei Entstehung des betreffenden Kernes erfolgt, d. h. innerhalb von etwa 10^{-21} sec. Oder aber, es ist $x < 1$, dann existiert eine Potentialschwelle, deren Höhe für $1 - x \ll 1$ durch die Formel

$$E_f = \left(\frac{A}{235}\right)^{2/3} [386 (1 - x)^3 - 175,8 (1 - x)^4] \text{ VeM} \quad (2)$$

berechnet werden kann, wie in der genannten Arbeit von Bohr und Wheeler abgeleitet ist. Dann haben die während der Spaltung bewegten Massen einen „Tunnel“ zu durchqueren, und eine Übertragung des bekannten wellenmechanischen Gedankenganges von Gamow auf diese Frage führt zu der ebenfalls von Bohr und Wheeler angegebenen Abschätzungsformel für die Lebensdauer t von Atomkernen gegenüber einem solchen Zerfall:

$$t = 10^{-21} \text{ sec} \cdot \exp \left(\frac{\sqrt{2 M E_f R \cdot \alpha}}{\hbar} \right). \quad (3)$$

Hierin treten auf: die Höhe E_f der Schwelle, die Masse des betreffenden Atomkerns M und die Breite der Schwelle, die von der Größenordnung des Kernradius R sein dürfte. Da diese Breite nicht gut definiert ist, wurde $\alpha \cdot R$ dafür geschrieben, wobei α ein Faktor ist, der schätzungsweise etwas größer als 1 sein dürfte mit einer Unsicherheit von rund 20% nach der einen oder anderen Seite.

¹⁾ Vgl. hierzu die vorstehenden Arbeiten von W. Muller und J. Rose, sowie von H. Pose. — ²⁾ Phys. Rev. 56, 426, 1939.

In der Arbeit von Bohr und Wheeler wurde mit $\alpha R \sim 1,3 \cdot 10^{-12}$ cm für Uran die Lebensdauer zu etwa $t = 10^{-21} \cdot 10^{51} = 10^{30}$ sec abgeschätzt. Die Unsicherheit von $\pm 20\%$ im Exponenten bedeutet hier eine solche von ± 10 Zehnerpotenzen in der Lebensdauer. Es hat also keinen Sinn, aus Gleichung (3) quantitative Schlüsse hinsichtlich des Absolutwertes der Lebensdauer zu ziehen.

Nachdem nun aber für t am normalen Isotopengemisch des Urans eine wenigstens größenordnungsmäßige Messung vorliegt, nämlich $t = 10^{16}$ Jahre $= 10^{23,5}$ sec¹⁾, ist es möglich, die Konstante α auszurechnen, die ja für alle benachbarten Kerne den gleichen Wert haben dürfte. Es ergibt sich dann ein etwas kleinerer Wert als bei Bohr und Wheeler, nämlich $\alpha R = 1,2 \cdot 10^{-12}$ cm für ^{238}U . Rechnet man mit diesem Wert und setzt R proportional zu $A^{1/3}$, wie es das Tröpfchenmodell erfordert, so ist es möglich, die Lebensdauer verschiedener Isotope dieser Region des Periodischen Systems gegenüber spontaner Spaltung zu berechnen und einigermaßen sichere Vergleichszahlen zu erhalten. Dabei ergaben sich im einzelnen folgende Resultate:

1. *Uran*. Es ergaben sich die Lebensdauern $t_{234} = 9,1 \cdot 10^{19}$ sec, $t_{235} = 8,7 \cdot 10^{20}$ sec, $t_{238} = 8,8 \cdot 10^{23}$ sec. Bei Berücksichtigung der relativen Häufigkeiten dieser drei Isotope wie 1/17000 : 1/139 : 1 ergeben sich folgende Beteiligungen an der Gesamtaktivität: ^{234}U zu 6%, ^{235}U zu 82% und ^{238}U zu 12%. Das durch thermische Neutronen spaltbare Isotop 235 überwiegt also auch beim spontanen Zerfall. Das Isotop 234 trägt sicher weniger bei als 238, mit dem es hinsichtlich seiner α -Labilität im Gleichgewicht steht. Die α -Labilität nimmt also von 238 nach 234 hin mehr zu als die Spaltungslabilität.

Es wäre natürlich sehr interessant, die hier gemachte Aussage über die Aktivitäten mit getrennten Uranisotopen nachzuprüfen, sobald dies möglich sein wird.

2. *Thorium, Ionium, Protactinium*. Es liegt nahe, die Frage aufzuwerfen, ob man bei den anderen Elementen in der Umgebung des Urans eine beobachtbare spontane Spaltungsaktivität erwarten kann. Es ergeben sich hier auf der gleichen Basis die folgenden Lebensdauern:

Thorium,	$Z = 90, A = 232: t = 8,5 \cdot 10^{25}$ sec
Ionium,	$Z = 90, A = 230: t = 8,1 \cdot 10^{23}$ sec
Protactinium,	$Z = 91, A = 231: t = 8,9 \cdot 10^{20}$ sec.

¹⁾ Vgl. die vorstehende Arbeit von Maurer und Pose.

Bei Thorium, über das man in beliebigen Mengen verfügen kann, ist also die Halbwertszeit um 2 Zehnerpotenzen länger, der zu erwartende Effekt also nur etwa 1% desjenigen bei Uran. Damit dürfte man aber bereits beträchtlich unter die Grenze der Nachweisbarkeit kommen¹⁾. Ionium und Protactinium haben beide Lebensdauern gegen α -Zerfall von einigen 10^4 Jahren. Sie sind daher nur in kleinen Mengen bis zu etwa 1 g zu erhalten. Bei Ionium sollte der Effekt von der gleichen Größenordnung werden wie bei Uran, bei Protactinium sogar 1000mal größer. Trotzdem dürfte auch hier in keinem Falle infolge der sehr beschränkten verfügbaren Mengen die Grenze der Meßbarkeit erreicht werden.

3. *Element 93*. Ein gewisses Interesse besitzt schließlich noch die Frage nach der spontanen Spaltbarkeit der beim Neutroneneinfang an Uran entstehenden Kette von Elementen:



Für die Massenzahl 239 erhält man bei $Z = 92$ eine Lebensdauer von $8,1 \cdot 10^{24}$ sec, für $Z = 93$ von $7,8 \cdot 10^{20}$ sec und für $Z = 94$ von $8,3 \cdot 10^{16}$ sec. Keines dieser Isotope sollte daher eine merkbare Spaltung zeigen.

Wie man sieht, bedeutet ein Wachsen von Z um eine Einheit eine Verkürzung der Lebensdauer um ziemlich genau 4 Zehnerpotenzen, während eine Verringerung des Atomgewichts A um eine Einheit die Lebensdauer um 1 Zehnerpotenz verkürzt. Dies kann als Faustregel auch der spontanen Spaltbarkeit anderer Isotope in diesem Gebiet zugrunde gelegt werden.

Berlin-Dahlem, Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie, 27. Januar 1942.

¹⁾ *Anmerkung bei der Korrektur*. Inzwischen von H. Pose in der hier vorausgesagten Größenordnung gefunden, vgl. die vorstehende Arbeit.

Laminare und turbulente Strömungen mit besonderer Berücksichtigung des Einflusses von festen Wänden.

Von Ernst Mohr in Breslau.

Mit 14 Abbildungen. (Eingegangen am 30. November 1942.)

Einleitung.

Die folgenden Zeilen handeln von laminaren und turbulenten Strömungen, wobei der Einfluß von festen Wänden, speziell die Frage, wie dort die Randbedingungen zu formulieren sind, im Vordergrund steht. Dabei zeigt sich, daß gerade durch eine solche gleichzeitige Behandlung beider Strömungsarten jede derselben, von der anderen aus gesehen, in neuem Lichte erscheint, und sich so ganz von selbst eine einheitliche Betrachtungsweise anbahnt. So z. B. hinsichtlich des Wandeinflusses, wo die bisherigen Experimente an ausgebildeten üblichen Rohrströmungen zwei ganz verschiedene Resultate ergaben, nämlich Haften im laminaren und Gleiten im turbulenten Falle. Sieht man jedoch etwas genauer hin, so bemerkt man, daß man auch im Falle der laminaren Strömungen auf ein Gleiten nicht gut verzichten kann, und daß sich der betreffende Gleitansatz direkt aus dem Maxwell'schen Mechanismus der Reibung angewandt auf die Wand ergibt; und umgekehrt gibt diese Betrachtung einen Fingerzeig, wie der entsprechende Ansatz für turbulente Strömungen, der bislang noch aussteht, lauten kann.

Unter den folgenden drei Gesichtspunkten werden wir die Strömungen, und zwar zuerst die laminaren und dann die turbulenten, hauptsächlich betrachten:

1. Einfluß von festen Wänden (Gleitansatz),
2. Entstehung von Wirbeln,
3. Versuch einer schrittweisen Auflösung der Bestimmungsgleichungen.

Wir geben in einem vorbereitenden Teil kurz die Grundlage an, auf der wir später aufbauen werden.

Vorbereitungen.

1. Laminare Strömungen.

Wo wir im folgenden die Bestimmungsgleichungen für die unter der Wirkung der Zähigkeit stattfindenden Flüssigkeitsbewegungen, von uns kurz auch als laminare bezeichnet, heranziehen, mag es im allgemeinen

genügen, wenn wir uns auf zweidimensionale Strömungen beschränken, die wir uns oft räumlich vorstellen; und für die wir dann entsprechend auch die üblichen räumlichen Bezeichnungen beibehalten: Z. B. bezeichnen wir den Inhalt eines Flüssigkeitsteilchens mit $d\tau$, ein Oberflächenelement mit $d\sigma \dots$; ferner den orientierten Oberflächeninhalt mit $d\sigma = d\sigma n$, wo $n = (\alpha, \beta)$ die Normale ist, und im Falle einer festen Wand oder eines Flüssigkeitskörpers stets ins Innere der Flüssigkeit bzw. nach außen weisen soll. Falls ein äußeres Kraftfeld vorhanden ist, soll dieses ein Potential pro Masseneinheit haben, welches wir uns zum Druck p geschlagen denken. Dividieren wir dann die Bewegungsgleichungen durch die konstante Dichte ρ und sprechen $\chi + p/\rho$ wieder als Druck P an, so lauten die Navier-Stokes'schen Bestimmungsgleichungen für laminare Strömungen in der üblichen Bezeichnungsweise¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &\equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \operatorname{div} (\nu \operatorname{grad} u) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{dv}{dt} &\equiv \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} \\ &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \operatorname{div} (\nu \operatorname{grad} v) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \operatorname{div} w &\equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{aligned} \right\} (1)$$

wo $\nu = \mu/\rho$ die (ebenfalls konstante) kinematische Zähigkeit (μ = gewöhnliche Zähigkeit) von der Dimension Geschwindigkeit mal Länge ist.

Δ , div , grad sind die bekannten Operationen, also z. B. $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Für den „Wirbel“ $\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ und die „Quellung“ $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ werden wir auch die Bezeichnungen ω und q gebrauchen; hingegen soll der zum Wirbel gehörige Vektor wie üblich mit rot w bezeichnet werden, wenn $w = (u, v)$. Die beiden ersten Gleichungen in (1) sind die Bewegungsgleichungen für die beiden rechtwinkligen Achsen x und y , die dritte die sogenannte Kontinuitätsgleichung. Auf die Randbedingungen gehen wir hier noch nicht

¹⁾ H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch von Elise Helly, 2. Aufl., S. 4 und 652, 1931. Leipzig u. Berlin, Teubner.

näher ein; eine notwendige Bedingung ist jedenfalls die, daß eine Wand undurchdringlich, d. h. dort

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = \alpha u + \beta v = 0 \quad (2)$$

ist, sofern die Wand als ruhend betrachtet wird. Oft ist es gut, diese Gleichungen auf dimensionslose Veränderliche umzuschreiben, was wir durch die entsprechenden gestrichenen Größen $x', y', u', v' \dots$ andeuten, ohne daß wir jedoch die neuen Gleichungen jedesmal anschreiben. Hierbei tritt an Stelle von ν dann $\nu' = \frac{\nu}{U \cdot L} = \frac{1}{\Re}$ (U passende Geschwindigkeit, L passende Länge), wo ν' die Zähigkeit dimensionslos mißt, und \Re die bekannte Reynoldssche Zahl ist. Halten wir uns für einen Augenblick einmal an die übliche Randbedingung, wonach die Flüssigkeit infolge der Reibung am Körper haftet, so ergeben die dimensionslosen Gleichungen (1) zusammen mit den dimensionslosen Randbedingungen im Unendlichen und am Körper und unter der Voraussetzung geometrischer Ähnlichkeit eine einparametrische Schar von Lösungen mit ν' als Parameter, wobei jeder Einzelwert von ν' immer eine ganze Klasse von zueinander mechanisch ähnlichen Strömungen vertritt.

Wäre keine Reibung vorhanden, so ergäbe sich eine sogenannte Potentialströmung, die vom bewegten Körper aus gesehen im Unendlichen vom Charakter eines Dipols wäre, d. h. die Geschwindigkeit würde mit r als Radius wie $1/r^2$ abklingen, in Zeichen $w \sim 1/r^2$. Wirkt jedoch die Reibung, und bedenken wir, daß diese stets bestrebt ist, vorhandene Geschwindigkeitsunterschiede auszugleichen, so erhellt, daß wir wohl annehmen dürfen und im folgenden auch stets annehmen wollen, daß w mindestens wie $1/r^2$ abklingt:

$$w \sim \frac{1}{r^2}. \quad (3)$$

Wie man sieht, geht in die Bewegungsgleichungen die Zähigkeit ν nur „volumenmäßig“ in Form der Zähigkeitskraft $\nu(\Delta u, \Delta v)$ ein. Will man den Reibungswiderstand des Körpers, so hat man das zugehörige Spannungsfeld heranzuziehen, dem diese Volumenkraft entspringt. Hier verdankt man den entscheidenden

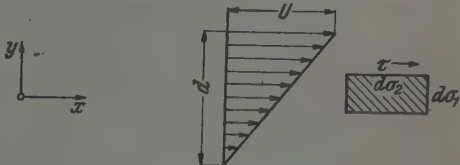


Fig. 1.

Ansatz Newton: dieser stellte fest, daß im Falle einer eindimensionalen Strömung wie in Fig. 1 der Schub τ in Strömungsrichtung proportional

dem jeweiligen Geschwindigkeitsanstieg U/d und allgemein — sofern das u -Profil nicht mehr linear ist, die Strömung aber nach wie vor eindimensional erfolgt — dem lokalen Geschwindigkeitsanstieg du/dy , von uns auch oft kurz mit u_y bezeichnet, ist, wobei der Proportionalitätsfaktor die schon früher erwähnte Zähigkeitskonstante μ ist, also

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu u_y \quad \text{bzw.} \quad \frac{\tau}{\varrho} = \nu \frac{\partial u}{\partial y} = \nu u_y. \quad (4)$$

Wie man sieht, ist dieser Ansatz rein phänomenologisch. Darüber, wie nun eigentlich der Schub τ zustande kommt, erfährt man nichts. Erst Maxwell konnte im Falle, daß die Flüssigkeit ein (ideales) Gas ist, diesen Ansatz rationell begründen, worauf wir später noch etwas eingehen werden. Zur Kenntnis des ganzen Spannungsfeldes fehlt uns noch die der y -Achse parallele Spannung für die andere Begrenzung $d\sigma_1$ des schraffierten Teilchens in Fig. 1. Ihre Angabe ist nur möglich, wenn man über Newton hinaus, so wie es Maxwell tat, auf den Mechanismus der Reibung genauer eingeht. Ohne uns weiter dabei aufzuhalten (vgl. indessen Abschnitt 5), erwähnen wir nur, daß die Maxwellsche Betrachtungsweise es nahelegt, jenen anderen Schub zu 0, d. h. das betreffende Spannungsfeld als unsymmetrisch anzunehmen, und dementsprechend für eine beliebige Strömung als Spannungsmatrix die folgende zugrunde zu legen:

$$\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}; \quad (5)$$

doch steht die endgültige Entscheidung, ob dieser Ansatz zutrifft, bis heute noch aus¹⁾. Dabei ergibt in (5) die erste Zeile die Spannung für das Element $d\sigma_1$, die zweite für das Element $d\sigma_2$. Im Spezialfall der Strömung von Fig. 1 lautet die Matrix (5):

$$\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}$$

¹⁾ a) E. Mohr, Turbulente Strömungen in phänomenologischer Betrachtung. Breslau, F. Hirt, 1941. Sammelheft zum 113. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für Vaterländische Kultur (1940), S. 86—118, speziell S. 91—94, sowie von demselben Verf.: b) Über den Navier-Stokesschen Spannungsansatz für zähe Flüssigkeitsströmungen, Luftfahrtforschung 18, Lief. 9, S. 327—330, 1941; und schließlich vergleiche man auch noch die Stellungnahme von E. Fues in der Arbeit: c) E. Fues, Gibt es Wirbelreibung? ZS. f. Phys. 118, 409, 1941, sowie die Entgegnung des Verf. in der in derselben Zeitschrift erschienenen Note: d) Bemerkungen zu der Arbeit von E. Fues, Gibt es Wirbelreibung? 119, 575, 1942.

und enthält den obigen Ansatz (4) von Newton. Man bemerkt, daß die Matrix (5), vom Faktor μ abgesehen, gerade die Funktionalmatrix der Funktionen u, v in Abhängigkeit von x, y , speziell also die zugehörige Determinante die Funktionsdeterminante $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ ist.

Nach (5) ergibt sich für ein Flächenelement mit der Normalen $\mathbf{n} = (\alpha, \beta)$ als Spannungswirkung \mathbf{p} jenes Teiles, in welchen \mathbf{n} weist $\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}\right)$

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} &= \mu \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y}, \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

d. h.

$$\mathbf{p} = \mu \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}}, \quad (6a)$$

und ähnlich durch den Differentiationsprozeß

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &= \mu (\Delta u, \Delta v) = \mu \Delta \mathbf{w} \end{aligned} \quad (7)$$

die schon bekannte Zähigkeitskraft. Würden wir zu der Matrix (5) die dazu gespiegelte hinzunehmen, so erhielten wir die üblicherweise angenommene symmetrische Spannungsmatrix (bis auf den Faktor 2μ die Deformationsmatrix); alsdann würde sich wohl die Spannung (6) bzw. (6a) ändern und damit auch der Reibungswiderstand, jedoch nicht die Volumenkraft (7) (da μ konstant und $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ist) und daher auch nicht das Geschwindigkeitsfeld, sofern man, wie das üblich ist, die kinematische Haftbedingung zugrunde legt. Es sei jedoch erwähnt, daß alle Überlegungen, die wir an (5) knüpfen werden, sich in derselben Weise auch an die symmetrische Matrix anschließen lassen. Für die Dissipation ergibt sich aus (5)

$$D = \mu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (8)$$

oder in invarianter Form¹⁾

$$D = \mu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right| \right. \\ \left. = \mu \left\{ \omega^2 - 2 \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right\} \right\}. \quad (8a)$$

D ist genau dann gleich Null, wenn die Flüssigkeitsbewegung das Bild einer starren Translation zeigt.

Differenzieren wir in (1) die erste Gleichung nach x , die zweite nach y und beachten die Kontinuitätsgleichung, so erhalten wir durch Subtraktion für den Wirbel ω die bekannte Gleichung

$$\frac{d\omega}{dt} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \\ = \operatorname{div} (v \operatorname{grad} \omega) = v \Delta \omega. \quad (9)$$

Ist die Flüssigkeit ideal, d. h. $\nu = 0$, so vereinfacht sie sich dahin, daß die substantielle Änderung $d\omega/dt$ verschwindet, d. h. ω an dem betreffenden Teilchen haftet:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \omega = \text{const.} \quad (10)$$

Speziell folgt daraus, daß, wenn zur Zeit $t = 0$ ein Teil der Strömung wirbelfrei war, derselbe auch im weiteren Verlauf wirbelfrei bleibt. Für die grundsätzliche Auffassung wie für die spätere Ausdehnung auf reibende Flüssigkeiten ist es jedoch gut, dasselbe Resultat auch ohne die Benutzung des substantiellen Differentialquotienten abzuleiten. Ausgangspunkt hierfür ist dann die lineare Differentialgleichung

$$u \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} + 1 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0, \quad (11)$$

in welcher die Strömung, d. h. u, v , als *bekannt* vorausgesetzt werden, und die wir uns in einem x, y, t -Raum in gewohnter Weise so veranschaulichen: Wir denken uns in jenem Raum die Vektorlinien (sogenannte charak-

¹⁾ In der unter Anm. 1a), S. 304-zitierten Arbeit von E. Mohr ist in der Formel (63a) bei der Dissipation (dort mit W bezeichnet) offenbar ein Fehler unterlaufen. — Auf ein weiteres Versehen hat mich Herr Dr. Nikuradse in freundlicher Weise aufmerksam gemacht: die dortigen Schubkurven in Fig. 13 und 14 für rauhe Rohre tragen irrtümlich dieselben Reynoldsschen Zahlen wie jene für das glatte Rohr in Fig. 12; statt dessen gehören zu der Fig. 13 die durch $\bigcirc \bullet \bigcirc \ominus \oplus \square$ markierten Punkte, für die der Reihe nach $10^{-3} \operatorname{Re}$ die Werte hat 22,7; 49; 106; 186; 427; 680; 970; und ähnlich zu der Fig. 14 die Punkte $\bigcirc \bullet \bigcirc \ominus \oplus$ und die $10^{-3} \operatorname{Re}$ -Werte 11,3; 22,2; 43; 108; 197; 430.

teristische Kurven der Differentialgleichung) gezogen, die zu dem Feld mit der Richtung $(u, v, 1)$ gehören, d. h. in der xy -Ebene die Bahnlinien der Strömung ergeben (sogenannte charakteristische Grundkurven), und an jedem Feldpunkt den zugehörigen ω -Wert angeheftet. Alsdann sagt die Differentialgleichung (11) aus, daß ω längs jeder solchen Vektorlinie sich nicht ändert. Da nun durch jeden Punkt genau eine Linie geht und diese in genau einem Punkte der xy -Ebene entspringt, so sehen wir, daß ω eindeutig bestimmt ist durch die Werte, die es in der xy -Ebene besitzt, mit anderen Worten: Durch seine Anfangswerte für $t = 0$. Speziell ist $\omega = 0$, wenn für den betreffenden Flüssigkeitsbereich $\omega = 0$ für $t = 0$ war, in Übereinstimmung mit dem schon oben erhaltenen Resultat¹⁾. Wie gesagt hat diese ausführlichere Art der Ableitung den Vorzug, daß sie einen klaren Einblick in die bestimmenden Bedingungen gibt, welche hier in einer (zeitlichen) Anfangsbedingung bestehen. Auch zeigt sie eindringlich, daß u, v als bekannt vorausgesetzt werden müssen, und doch ein Problem vorliegt, wiewohl ω durch u, v bereits bestimmt ist; denn hier handelt es sich ja nicht darum, aus der *expliziten Kenntnis* von u, v Aussagen über den Wirbel ω zu gewinnen (was dann allerdings ziemlich gegenstandslos wäre), sondern vielmehr aus der *theoretischen Kenntnis* von u, v einen allgemeinen Schluß auf das Verhalten von ω zu ziehen, wie er durch (10) zum Ausdruck kommt, was von vornherein keineswegs bekannt und daher wirklich eine neue Erkenntnis (seinerzeit von Helmholtz geschöpft) war.

2. Turbulente Strömungen.

Ausgangspunkt für die turbulenten Strömungen ist für uns der an ausgebildeten, d. h. eindimensionalen Rohrströmungen abgezogene universelle Schubverlauf

$$\frac{\tau}{\bar{\tau}} = F\left(\frac{u_y}{\bar{u}_y}\right), \quad (12)$$

welcher an die Stelle des Newtonschen Verlaufes (4) für laminare Strömungen tritt; τ = Schub, $\bar{u}_y, \bar{\tau}$ die Werte von u_y, τ in einem bestimmten Abstand von der Rohrachse, z. B. $r/2$, wo r der Rohrradius²⁾. Passen wir mit Boussinesq (12) in der Schreibweise dem Newtonschen Ansatz an:

$$\tau = A \frac{\partial u}{\partial y} = A u_y \quad \text{bzw.} \quad \frac{\tau}{\varrho} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon u_y, \quad (13)$$

¹⁾ Da jedoch hierbei u, v stillschweigend als stetig bzw. stetig differenzierbar vorausgesetzt wurden, so steht es noch offen, ob nicht Wirbel in Form einer Unstetigkeitsfläche entstehen! — ²⁾ Vgl. hierzu die unter Anm. 1a), S. 304 zitierte Arbeit von E. Mohr, S. 96.

wo jetzt die Austauschgröße A die Rolle der Zähigkeit μ übernimmt, so haben wir für (12) zu schreiben

$$\frac{\tau}{\bar{\tau}} = \frac{F\left(\frac{u_y}{\bar{u}_y}\right) u_y}{\left(\frac{u_y}{\bar{u}_y}\right) \bar{u}_y} = A\left(\frac{u_y}{\bar{u}_y}\right) \frac{u_y}{\bar{u}_y}$$

oder

$$\tau = \frac{\bar{\tau}}{\bar{u}_y} A\left(\frac{u_y}{\bar{u}_y}\right) u_y \quad \text{bzw.} \quad \frac{\tau}{\rho} = \frac{\bar{\tau}}{\rho \bar{u}_y} A\left(\frac{u_y}{\bar{u}_y}\right) u_y. \quad (14)$$

Der Verlauf von F ist in Fig. 2 angedeutet; ebenso der von A in Fig. 3, welcher bis auf eine affine Dehnung auch den Verlauf von Boussinesqs

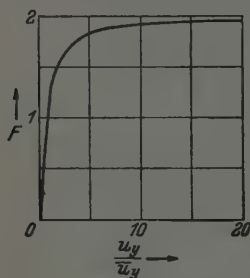


Fig. 2.

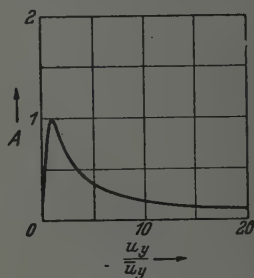


Fig. 3.

Austauschgröße A bzw. der kinematischen Austauschgröße $A/\rho = \varepsilon$ angibt. Mit den Bezeichnungen $\iota = \bar{\tau}/\bar{u}_y$, $\lambda = \bar{u}_y$, $\iota/\rho = \kappa$ ergibt sich dann durch Vergleich von (13) mit (14)

$$A = \iota A\left(\frac{u_y}{\bar{u}_y}\right) \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon = \kappa A\left(\frac{u_y}{\bar{u}_y}\right), \quad (15)$$

wo ι, λ bzw. κ, λ als zwei für die Strömung charakteristische Parameter anzusehen sind, welche hier die Rolle des einen Parameters μ oder ν bei laminaren Strömungen übernehmen. In dieser Auffassung von ι, λ bzw. κ, λ denken wir uns dann die Ausdehnung unseres Spannungsansatzes auf zwei Dimensionen durch die zu (5) ganz analoge unsymmetrische Matrix

$$A \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (16)$$

vorgenommen, wo jetzt A bzw. ε aus (15) durch die sinngemäße invariante Ausdehnung

$$A = \iota A\left(\frac{+\sqrt{\text{rot}^2 w}}{\lambda}\right), \quad \varepsilon = \kappa A\left(\frac{+\sqrt{\text{rot}^2 w}}{\lambda}\right) \quad (17)$$

entsteht. Alsdann ergeben sich ähnlich wie früher die Bestimmungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &\equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \operatorname{div} (\varepsilon \operatorname{grad} u), \\ \frac{dv}{dt} &\equiv \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} \\ &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \operatorname{div} (\varepsilon \operatorname{grad} v), \\ \operatorname{div} \mathbf{w} &\equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} (18)$$

Hinzu kommen noch Randbedingungen, auf die wir erst später eingehen können. Eine rein kinematische Bedingung ist natürlich wieder (2). Dabei ist vorausgesetzt, daß die ganze Strömung turbulent ist, eine Annahme, die zu machen uns gedanklich jedenfalls nicht hindert, unbeschadet der Schwierigkeiten, die ihrer Verwirklichung vielleicht mitunter entgegenstehen, sofern unter turbulent eben verstanden wird, daß die Spannungen durch (16) und (17) bzw. die Strömung durch (18) gegeben sind. Bemerkt sei noch, daß hier das Hinzufügen der gespiegelten Matrix zu (16) im Gegensatz zu laminaren Strömungen bereits in den Volumenkräften sich kundtut, indem ε nicht konstant ist, mit anderen Worten: Hier könnte ein Entscheid darüber, ob die Spannungsmatrix symmetrisch oder unsymmetrisch ist, prinzipiell durch genaues Ausmessen eines turbulenten Geschwindigkeitsfeldes erbracht werden. Für die Dissipation D gilt dieselbe Formel (8) bzw. (8a) wie früher, nur daß μ durch A zu ersetzen ist; wieder ist sie genau dann gleich Null, wenn das Strömungsfeld das Bild einer starren Translation zeigt.

3. Wärmeströmungen.

Ein Blick auf die Gleichung (9) wie auf die Bewegungsgleichungen in (1) und (18) zeigt eine enge Verwandtschaft mit dem Problem der Wärmeleitung bei Konvektion¹⁾. In diesem Sinne werden wir später Strömungsvorgänge oft wärmemäßig umdeuten, wofür das nötige Rüstzeug jetzt noch bereitgestellt werde. Die Aufgabe, um die es sich handelt, lautet: Ein Körper wird irgendwie angeheizt und in idealer, laminarer oder turbulenter Weise umströmt; die Kenntnis der Strömung $\{\mathbf{w}\}$ vorausgesetzt,

¹⁾ Vgl. z. B. Frank-v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 2. Auflage, S. 591–592. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn, 1935.

wird dann unter geeigneten Anfangs- und Randbedingungen (letztere am Körper und im Unendlichen) nach der Temperaturverteilung gefragt. Wir gehen daran, die Aufgabe zu präzisieren und führen dazu die Bezeichnungen ein: ϑ = Temperatur, l = Wärmeleitfähigkeit, c = spezifische Wärme; schließlich sei $\varrho c J$ die in der Volumen- und Zeiteinheit erzeugte Wärme; l ist nicht negativ, d. h. ≥ 0 , c stets > 0 ; für $l/\varrho c$ werde noch k^2 geschrieben. Dann ist der Vektor s der Wärmeströmung

$$s = -l \operatorname{grad} \vartheta + \varrho c \vartheta w \quad (19)$$

und es gilt die Differentialgleichung

$$\varrho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \varrho c J - \operatorname{div} s,$$

d. h. durch Einsetzen des Ausdruckes (19) die Gleichung

$$\varrho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \varrho c J + \operatorname{div} (l \operatorname{grad} \vartheta) - \operatorname{div} (\varrho c \vartheta w). \quad (20)$$

Nunmehr nehmen wir an, daß c konstant ist. $k^2 = l/\varrho c$ hingegen werden wir später, je nachdem die Strömung ideal, laminar oder turbulent ist, mit 0 , ν oder ε identifizieren, was erlaubt ist, da auch 0 , ν bzw. ε nicht negativ sind, und dementsprechend hier als variabel behandeln: Wir können ja in Gedanken ohne weiteres dem Medium die Eigenschaft zusprechen, daß seine Wärmeleitfähigkeit von der Strömung und Strömungsform abhängt, und dies um so mehr, als es sich bei uns ja stets nur um ein *Wärme-gleichnis* handelt. Alsdann können wir für das letzte Glied in (20) rechts schreiben

$$\operatorname{div} (\varrho c \vartheta w) = \varrho c \operatorname{div} (\vartheta w)$$

und für $\operatorname{div} (\vartheta w)$ weiter

$$\operatorname{div} (\vartheta w) = \vartheta \operatorname{div} w + \operatorname{grad} \vartheta \cdot w, \quad (21)$$

d. h. wegen $\operatorname{div} w = 0$

$$\operatorname{div} (\vartheta w) = \operatorname{grad} \vartheta \cdot w = w \cdot \operatorname{grad} \vartheta = u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y}. \quad (22)$$

Damit schreibt sich (20) nach Division mit ϱc ausführlicher wie folgt:

$$\frac{d\vartheta}{dt} \equiv \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = J + \operatorname{div} (k^2 \operatorname{grad} \vartheta). \quad (23)$$

Die Randbedingungen setzen wir so an: An jeder Stelle der Körperoberfläche werde eine bestimmte Wärmemenge pro Zeiteinheit abgeführt, so daß also dort eine Beziehung gilt:

$$l \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = f(x, y; t) \text{ an der Körperwand; } \quad (24)$$

im Unendlichen habe die Flüssigkeit die Temperatur 0 :

$$\vartheta = 0 \text{ im Unendlichen. } \quad (25)$$

Die Anfangsbedingung laute dahin, daß für $t = 0$ ein bestimmtes Temperaturfeld herrsche: $\vartheta = \vartheta_0$ für $t = 0$, wobei speziell $\vartheta_0 = 0$ sein kann. Die Randbedingung (25) muß noch weiter präzisiert werden, und zwar wird in den späteren Anwendungen ϑ stets mindestens wie $1/r^2$ abklingen:

$$\vartheta \sim 1/r^2 \text{ im Unendlichen.} \quad (25a)$$

Schließlich noch eine letzte Abänderung: Statt der Randbedingung (25) wird im folgenden die umfassendere Bedingung $\vartheta = \vartheta_\infty(t)$ auftreten, wo $\vartheta_\infty(t)$ die im Unendlichen herrschende Temperatur ist, welche noch von der Zeit abhängen kann. An Stelle von (25a) tritt dann

$$\vartheta - \vartheta_\infty(t) \sim 1/r^2. \quad (25b)$$

Mit dieser Abänderung schreiben wir nochmals die Rand- und Anfangsbedingungen an:

Randbedingungen

$$\text{am Körper:} \quad l \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = f(x, y, t) \quad \text{oder} \quad k^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \frac{1}{\varrho c} f(x, y, t),$$

$$\text{im Unendlichen:} \quad \vartheta = \vartheta_\infty(t), \quad \text{genauer} \quad \vartheta - \vartheta_\infty(t) \sim 1/r^2,$$

$$\text{Anfangsbedingung:} \quad \vartheta = \vartheta_0 \quad \text{für} \quad t = 0.$$

Für das so formulierte Problem können wir nun leicht den wichtigen Nachweis erbringen, daß, wenn eine Lösung existiert (was von uns als physikalisch gegeben angenommen wird), auch nur eine existiert (Eindeutigkeitssatz)¹⁾. Gäbe es nämlich zwei Lösungen ϑ_1, ϑ_2 , so wäre ihre Differenz $\vartheta_1 - \vartheta_2$, die wieder mit ϑ bezeichnet sei, eine Lösung der folgenden Aufgabe:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \operatorname{div} (k^2 \operatorname{grad} \vartheta) - \operatorname{div} (\vartheta \mathbf{w}). \quad (26)$$

Randbedingungen

$$\text{am Körper:} \quad l \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0 \quad \text{oder} \quad k^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0,$$

$$\text{im Unendlichen:} \quad \vartheta = 0, \quad \text{genauer} \quad \vartheta \sim 1/r^2,$$

$$\text{Anfangsbedingung:} \quad \vartheta = 0 \quad \text{für} \quad t = 0.$$

Nunmehr multiplizieren wir (26) mit ϑ , formen das linke Glied $\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ in $\frac{1}{2} \frac{\partial \vartheta^2}{\partial t}$ um, und die beiden rechten Glieder nach einer schon in (21) angewandten Regel in die rechten Seiten der folgenden Gleichheiten:

$$\vartheta \operatorname{div} (k^2 \operatorname{grad} \vartheta) = \operatorname{div} (\vartheta \cdot k^2 \operatorname{grad} \vartheta) - \operatorname{grad} \vartheta \cdot k^2 \operatorname{grad} \vartheta,$$

$$\vartheta \operatorname{div} (\vartheta \mathbf{w}) = \operatorname{div} (\vartheta \cdot \vartheta \mathbf{w}) - \operatorname{grad} \vartheta \cdot \vartheta \mathbf{w}.$$

¹⁾ Der Beweis ist dem entsprechenden Eindeutigkeitsbeweis bei Abwesenheit von Konvektion in R. H. Weber u. R. Gans, Repertorium der Physik, 1. Bd., 2. Teil, S. 317–318, Teubner, Leipzig u. Berlin, 1916, nachgebildet.

In der letzten Gleichheit können wir aber nun auf Grund von (22) $\text{grad } \vartheta \cdot \mathbf{w}$ durch $\text{div}(\vartheta \mathbf{w})$ ersetzen, und erhalten mithin

$$\vartheta \text{div}(\vartheta \mathbf{w}) = \frac{1}{2} \text{div}(\vartheta^2 \mathbf{w}).$$

Mit diesen Umformungen lautet dann die aus (26) entstehende Gleichung

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \vartheta^2}{\partial t} = \text{div}(k^2 \vartheta \text{grad } \vartheta) - k^2 \text{grad}^2 \vartheta - \frac{1}{2} \text{div}(\vartheta^2 \mathbf{w}). \quad (27)$$

Ist nun K die Körperkontur, K_∞ ein sie umschließender Kreis, der sich später ins Unendliche ausdehnen soll, in Zeichen $K_\infty \rightarrow \infty$, so denken wir uns (27) über den von K und K_∞ eingeschlossenen Zwischenraum Z integriert, und die beiden Integrale über die Divergenzen rechts nach dem Gaußschen Satz in Oberflächenintegrale verwandelt:

$$\begin{aligned} \int_Z \text{div}(k^2 \vartheta \text{grad } \vartheta) d\tau &= \int_K k^2 \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial n} d\sigma + \int_{K_\infty} k^2 \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial n} d\sigma, \\ \int_Z \text{div}(\vartheta^2 \mathbf{w}) d\tau &= \int_K \vartheta^2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{K_\infty} \vartheta^2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \end{aligned}$$

wo die Normale \mathbf{n} ins Äußere, von Z aus gesehen, weist. Beachten wir nun: Die über K_∞ zu erstreckenden Integrale verschwinden im Limes $K_\infty \rightarrow \infty$, da nach Voraussetzung dort ϑ genügend stark abklingt; das erste Integral über K ist gleich Null, da dort $k^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0$ ist; das zweite verschwindet ebenfalls, da am Körper $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$ ist. Somit erhalten wir

$$\frac{1}{2} \int \frac{\partial \vartheta^2}{\partial t} d\tau = - \int k^2 \text{grad}^2 \vartheta d\tau$$

oder

$$\frac{1}{2} \int \frac{\partial \vartheta^2}{\partial t} d\tau + \int k^2 \text{grad}^2 \vartheta d\tau = 0. \quad (28)$$

Setzen wir nun

$$\Theta = \frac{1}{2} \int \vartheta^2 d\tau, \quad J = \int k^2 \text{grad}^2 \vartheta d\tau,$$

so sind die Größen Θ, J nicht negativ und außerdem verschwindet Θ für $t = 0$. Das erste Integral in (28) wird dann $\partial \Theta / \partial t$, wofür man auch, was hier erlaubt ist, $d\Theta/dt$ schreiben darf. Damit geht (28) über in

$$\frac{d\Theta}{dt} + J = 0,$$

woraus wir noch wegen $J \geq 0$ auf $d\Theta/dt \leq 0$ schließen. Wir wollen zeigen, daß Θ identisch verschwindet. Beweis anschaulich: Die Kurve $\Theta(t)$ beginnt im Ursprung und soll wegen $\Theta \geq 0$ nicht unter die t -Achse sinken, andererseits wegen $d\Theta/dt \leq 0$ nie zunehmen, d. h. nie über die t -Achse gelangen, was beides offenbar nur möglich ist, wenn die Kurve mit der t -Achse zu-

sammenfällt. Exakter: Wäre $\Theta \neq 0$, so gäbe es eine Stelle $t_1 > 0$, an der $\Theta > 0$ wäre; auf Grund des Mittelwertsatzes, angewandt auf das Intervall $0 \dots t_1$, gäbe es dann auch eine Zwischenstelle $t'_1 > 0$, für die $d\Theta/dt > 0$ wäre, im Widerspruch zu $d\Theta/dt \leq 0$. Also ist $\Theta \equiv 0$ und damit auch $\vartheta \equiv 0$. Beachten wir, daß dieser Beweis auch noch für $k^2 = 0$, d. h. verschwindende Wärmeleitfähigkeit gilt, in welchem Falle von vornherein $J = 0$ ist; ihm entspricht im Bereich der Strömungen der Fall, daß die Flüssigkeit eine ideale, d. h. für sie die Reibung $= 0$ ist.

Derselbe Nachweis gilt auch, wenn am Körper statt der früheren Randbedingung (24) die folgende verlangt wird:

$$\vartheta = g(x, y; t) \text{ an der Körperwand,} \quad (29)$$

welche ausdrückt, daß jede Stelle der Körperoberfläche auf einer vorgeschriebenen Temperatur gehalten wird. Woraus dann weiter folgt, daß dieser Nachweis auch für die aus beiden Randbedingungen entspringende „gemischte“ Randwertaufgabe zu Recht besteht:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial n} &= f(x, y; t) \text{ für einen Teil der Wand,} \\ \vartheta &= g(x, y; t) \text{ für den anderen Teil der Wand.} \end{aligned} \right\} \quad (29a)$$

Alle drei durch (24), (29) und (29a) gegebenen Randwertaufgaben werden später vorkommen.

Hauptteil.

Laminare Strömungen.

Einfluß von festen Wänden (Gleitansatz).

4. Bemerkungen zur Hafthypothese; die grundlegende Untersuchung von Kundt und Warburg.

Es ist bekannt, mit welcher Sicherheit man aus den Experimenten des Pariser Arztes Dr. Poiseuille (1840), welcher Flüssigkeiten durch feine Kapillaren strömen ließ, auf die Tatsache des Haftens der Flüssigkeit an der Wand als Folge der Reibung oder Zähigkeit schließen kann und auch geschlossen hat¹⁾. Eine Versuchsreihe von Poiseuille wird weiter unten diskutiert. Auch die mittels Gasen, besonders Luft, angestellten Strömungen bestätigen diese Vorstellung vom Haften an der Wand. Über diesen Stand-

¹⁾ Vgl. hierzu C. Schaefer, Einführung in die theoretische Physik, 1. Bd., 3. Aufl., S. 923—926, W. de Gruyter, Berlin u. Leipzig 1929, sowie auch das unter Anm. 1, S. 302 zitierte Buch von H. Lamb, S. 661—662.

punkt sind erst Kundt und Warburg in einer für uns bahnbrechenden Arbeit aus dem Jahre 1875 hinausgedrungen¹⁾: sie stellten nämlich fest, daß bei Gasen, z. B. für eine Strömung wie in Fig. 1 gezeichnet, auf Grund der Maxwell'schen Theorie der Reibung eine Änderung der auf die obere Wand auszuübenden Kraft nicht bemerkbar sein dürfte, solange man die Dichte nur soweit verringert, daß $d > 12 \lambda$ ist (λ die mittlere Weglänge); in Wahrheit aber beobachteten sie eine deutliche Abnahme jener Kraft bereits bei einer Verdünnung, für die $d = 300 \lambda$ war. Den dadurch gegebenen Widerspruch konnten sie lösen, indem sie nachwiesen, daß bei jener Verdünnung die scheinbare Abnahme der Schubkraft, d. h. auch der Reibung, durch ein Gleiten an der Wand verursacht ist, welches sie auch theoretisch begründen konnten. Danach ergab sich für den sogenannten Gleitungskoeffizienten ein endlicher Wert, welcher dem Druck umgekehrt proportional, genauer von der Größenordnung λ/d , ist. Alle von ihnen auf Grund dieser Vorstellung gezogenen Folgerungen konnten sie durch ihre Experimente glänzend bestätigen, womit dann zugleich die Unabhängigkeit der Reibung μ vom Druck vom normalen Atmosphärendruck bis herunter zu 1 mm Druck Quecksilber bewiesen war. Andererseits zeigte ihre Berechnung die Kleinheit des Gleitungskoeffizienten bei mäßiger Verdünnung, was die Ursache war, daß dieser vor ihnen nicht bemerkt wurde. Ist das Gas soweit verdünnt, daß $d < 12 \lambda$, so zeigt die Reibung ein komplizierteres Verhalten, welches jedoch wieder verschwindet, wenn ein solcher Grad der Verdünnung erreicht ist, daß der weitaus größte Teil der Moleküle von der einen Wand zur anderen fliegt, ein Fall, den später Knudsen (1900) experimentell besonders eingehend untersucht hat.

Angesichts der Tatsache, daß der Gleitungskoeffizient von der Größenordnung λ/d , also jetzt allgemein λ/L ist, L eine passende Bezugslänge im früher gebrachten Sinne, scheint es, als ob innerhalb der Strömungslehre,

¹⁾ A. Kundt u. E. Warburg, Poggendorfs Ann. 155, 335—365, 525—550, 1875, wo zum ersten Male sowohl theoretisch als auch experimentell ein Gleiten, d. h. ein Geschwindigkeitssprung zwischen Wand und Gas festgestellt wurde. Ganz ähnlich stellen sie im zweiten uns hier nicht weiter interessierenden Teil ihrer Arbeit (ebenda 156, 177—211), welcher die Wärmeleitung betrifft, einen Temperatursprung fest. — Den Hinweis auf diese wichtige Arbeit verdanke ich Herrn Prof. Dr. C. Schaefer, Breslau, mit dem ich alle Partien der vorliegenden Arbeit zum Teil mehrfach und bis ins einzelne durchsprechen durfte. Hierfür sowie für viele andere Anregungen und Hinweise, die ich im Laufe dieser Gespräche empfang und die mich veranlaßten, an zahlreichen Stellen meine ursprüngliche Fassung zu ändern und durch eine sachgemäßere zu ersetzen, möchte ich auch an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. C. Schaefer nochmals meinen wärmsten Dank aussprechen.

d. h. für die in ihr zu behandelnden und interessierenden Strömungen, der Gleitkoeffizient ohne weiteres, wie das ja auch üblich ist, zu 0 angenommen, d. h. das Haften an festen Wänden als erfüllt angesehen werden darf; mit anderen Worten: Man glaubt hier mit der Haftbedingung vollständig auszukommen (und dies nicht ganz mit Unrecht, wenn man an die bisherigen Experimente und Erfolge denkt) und weist die Fälle, wo die Größenordnung von λ/L merklich wird, der Physik zu, da sie nur unter besonderen Bedingungen, wie z. B. durch hinreichende Verdünnung bei Kundt und Warburg zustande kommen, die in der Strömungslehre nie zutreffen. Immerhin sei erwähnt, daß, um z. B. λ/d in Fig. 1 genügend groß zu machen, keineswegs zur Verdünnung gegriffen werden muß: es kann ja unter normalem Druck d so klein sein, daß λ/d merklich wird. In der Tat werden wir später im Anschluß an das Experiment von Poiseuille einen solchen Fall angeben, welcher größenordnungsmäßig ganz mit jenem übereinstimmt, in welchem Kundt und Warburg mittels Verdünnung $d = 300 \lambda$ erreicht haben. Indessen könnte man auch hier noch einwenden, daß Strömungen durch derart dünne Kapillaren mehr die Physik, denn die Strömungslehre interessieren. So berechtigt eine solche Trennung in Physik und Strömungslehre auch sein mag, so wird man auf der anderen Seite billigerweise doch verlangen dürfen, daß die von beiden Teilen gewonnenen Ergebnisse und Anschauungen sich stetig aneinanderschließen, nie aber einander ausschließen, eine Gefahr, die an der vorhin erwähnten Kapillarströmung bereits auftaucht. Hierzu ist aber nötig, daß die eventuell von der Strömungslehre im Laufe ihrer Praxis getroffenen und als zulässig erkannten Vereinfachungen ihren Sinn und ihre Grenze von einem einheitlichen Standpunkt aus erfahren, der natürlich nur von der Physik erobert werden kann. Diesen Standpunkt haben aber nun bereits Kundt und Warburg in der genannten Arbeit bezogen, so daß wir leichtes Spiel haben, und nur noch zuzusehen brauchen, welche Konsequenzen sich von diesem Standpunkt aus für die Strömungslehre ergeben.

Ehe wir jedoch diesen Faden weiterspinnen, schalten wir eine Betrachtung ein, in der wir versuchen, klarzumachen, daß es auch innerhalb der Strömungslehre bereits Erscheinungen gibt, denen gegenüber das strenge Festhalten an der Haftbedingung zum mindesten hart anmutet.

1. In Fig. 4 werde in einem Rohre die Flüssigkeit zwischen zwei Kolben, die wir uns starr verbunden denken (in der Figur nicht gezeichnet), unter Aufwendung einer Kraft vorwärtsbewegt, wobei wir annehmen dürfen, daß die äußere Reibung zwischen Kolben und Wand 0 ist. Frage: Welche Strömung stellt sich ein? Gemäß der Haftbedingung müßte die Flüssigkeit

einerseits am Kolben, andererseits an der Rohrwand haften, d. h. es würden sich an den Punkten, wo Kolben und Wand sich treffen, die Geschwindigkeiten unstetig ändern und damit unendlich große Schube ergeben. Diesen Sachverhalt drücken wir kurz so aus: Indem wir Geschwindigkeiten wie u, v, \dots als auf der 0ten Differentiationsstufe, entsprechend ihren ersten Differentialquotienten wie $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots$ als auf der 1ten Differentiationsstufe befindlich bezeichnen; können wir sagen: Auf Grund der Haftbedingung ist die Strömung bereits auf der 0ten Stufe in jenen Punkten unstetig oder



Fig. 4.



Fig. 5.

singulär. Daß diese Punkte irgendwie singulär sein müssen, leuchtet natürlich von vornherein ein, da ja die Oberflächennormale n des Flüssigkeitskörpers in jenen Punkten ebenfalls unstetig ist. Geben wir jedoch dem Kolben die in Fig. 5 angedeutete Gestalt, so fällt die Unstetigkeit bezüglich n weg, während die bezüglich der Geschwindigkeiten nach wie vor bestehen bleibt.

2. Da die Haftbedingung rein kinematisch ist, läßt sie keinen Raum für den Einfluß des Materials der Wand bzw. des durch eine Flüssigkeit bewegten Körpers. So ist z. B. keineswegs von vornherein einzusehen, warum nicht in der Strömung in Fig. 1 in dem Fall, daß die untere ruhende Wand besonders gut geglättet ist, doch ein merkliches Gleiten dort statthabe.

3. Denken wir an die Umströmung eines Körpers, so ist eine oft geäußerte Meinung die, daß unmittelbar nach Beginn der Bewegung Potentialströmung herrsche, d. h. also Gleiten statthabe. Alsdann kann aber das Einsetzen der Reibung nicht plötzlich das Haften erzwingen!

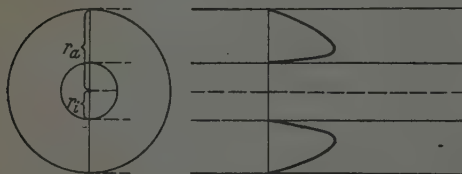


Fig. 6.

4. Läßt man bei der ausgebildeten Strömung durch ein Rohr mit kreisringförmigem Querschnitt (Fig. 6) den inneren Radius r_i nach 0 gehen, $r_i \rightarrow 0$, so ergibt sich nach der Haftbedingung eine Strömung,

für welche die Tangente und damit also auch der Schub an der inneren Wandung beliebig groß wird, und die schließlich so aussieht: Außerhalb der Achse die bekannte Poiseuille-Strömung, in der Achse aber Haften, also wieder eine Strömung mit einer Unstetigkeit 0ter Stufe!

Auf einzelne dieser Punkte werden wir im folgenden noch zurückkommen. Jedenfalls möchten wir in dieser Zwischenbetrachtung ein Signal sehen, den Standpunkt von Kundt und Warburg auch für die Strömungslehre geltend zu machen. Der sicheren und ruhigen Durchführung wegen verschaffen wir uns zu diesem Zwecke rasch nochmals selbst die nötige Grundlage, indem wir auf den Vorgang an der Wand im Lichte des Maxwell'schen Mechanismus genauer eingehen, ohne uns auf Kundt und Warburg zu stützen, von denen wir wohl den Willen und das große Ziel übernehmen, jedoch im einzuschlagenden Weg wie im Resultat etwas abweichen werden.

5. Die molekulare Austauschbewegung im Inneren und an der Wand nach Maxwell.

Rekapitulieren wir kurz die Erkenntnis Maxwells, wobei wir uns an die einfache Strömung der Fig. 7 halten und nur größenordnungsmäßig rechnen werden, was wir durch das Zeichen \sim andeuten¹⁾. Danach kommt

der Schub τ in Strömungsrichtung zwischen zwei übereinander hinweggleitenden Flüssigkeitsschichten dadurch zustande, daß in Fig. 7 die schraffierte Schicht einen Teil ihrer langsameren

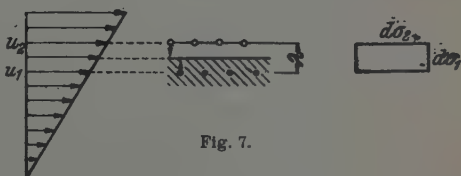


Fig. 7.

Moleküle von der mittleren makroskopischen Geschwindigkeit u_1 gegen die rascheren der darüberliegenden Schicht von der Geschwindigkeit u_2 als Folge der Brownschen Molekularbewegung (Diffusion) eintauscht und hierdurch also makroskopische Bewegungsgröße gewinnt, d. h. im Sinne von Newtons Grundgesetz einen Schub τ erleidet. Mit c, λ als mittleren Werten für die molekulare Geschwindigkeit und die freie Weglänge hat man dann für die Masse dm der in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit in der einen oder anderen Richtung fliegenden Moleküle $dm \sim \rho c$ und mithin für den Transportüberschuß an Bewegungsgröße, d. h. den Schub

$$\tau = dm (u_2 - u_1) \sim \rho c (u_2 - u_1) = \rho c \lambda \frac{u_2 - u_1}{\lambda}. \quad (80)$$

Entwickelt man hier $\frac{u_2 - u_1}{\lambda}$ in eine Taylor-Reihe nach λ und bricht nach dem ersten Gliede ab, so erhält man in erster Näherung

$$\tau \sim \rho c \lambda \frac{du}{dy}. \quad (81)$$

¹⁾ Eine genauere Rechnung findet man z. B. in dem unter Anm. 1, S. 313 zitierten Werk von C. Schaefer, 2. Bd., S. 415–420.

In dieser Maxwell'schen Auffassung ist also der Schub nur „scheinbar“, indem er lediglich den Ersatz für einen gewissen Impulstransport darstellt, der durch die Diffusion bedingt ist. Beachtet man diese Wirkung der Diffusion, so ist es interessant zu sehen, wie diese, die in das Kontinuumsbild, das man sich von der Flüssigkeit macht, zunächst gar nicht eingeht, indirekt in Form jener Spannung zum Vorschein kommt, sobald man auf die Flüssigkeit die Kontinuumsmechanik anwenden will: In der Tat enthält ja ein kontinuumsmäßig abgegrenztes Teilchen nach der Zeiteinheit gar nicht mehr alle früheren Moleküle, indem während dieser Zeit infolge der Diffusion in der Umgebung seiner Begrenzung eine gewisse Zahl von Molekülen von außen eingetreten und eine ungefähr gleichgroße Zahl von innen ausgetreten ist, wodurch der Rand etwas „verwaschen“ wird. Dies bedeutet aber, daß man auf dieses Teilchen zunächst die Kontinuumsmechanik gar nicht anwenden kann! Um dies zu erreichen, müssen wir vielmehr die Korrektur anbringen, welche durch den Austausch von Molekülen bedingt ist und welche eben zu der oben berechneten scheinbaren Spannung führt. Mit anderen Worten: Der Wille, die Flüssigkeitsbewegung mathematisch im Sinne eines Kontinuums zu beschreiben, zwingt uns, einen durch die Diffusion bedingten scheinbaren Schub einzuführen.

Bedenken wir nun, daß, solange die makroskopische Geschwindigkeit u gegen die molekulare c klein, genauer $\left(\frac{u}{c}\right)^2 \ll 1$ ist, der Austauschmechanismus in erster Näherung derselbe wie bei der ruhenden Flüssigkeit und somit an allen Stellen sich gleich ist, so können wir in allen Beziehungen, wo das Zeichen \sim vorkommt, durch Hinzufügen eines konstanten reinen Zahlfaktors ζ dieselben in Gleichheiten verwandeln, d. h. das Zeichen \sim durch das Zeichen $=$ ersetzen und demgemäß z. B. für (31)

$$\tau = \zeta \rho c \lambda \frac{du}{dy} \quad (32)$$

oder

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (32a)$$

schreiben, wo

$$\mu = \zeta \rho c \lambda \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mu}{\rho} = \nu = \zeta c \lambda$$

und ζ z. B. für ideale Gase streng berechnet werden kann (nach Boltzmann ist $\zeta = 0,350271$), und ebenso c und λ und damit auch μ . (32a) ist der schon früher und damals rein phänomenologisch eingeführte Newton'sche Schubansatz mit μ als Zähigkeit. Im Falle, daß die Flüssigkeit ein Gas ist, liegt also dieser Rechnung die Annahme zugrunde, daß die Geschwindigkeitsverteilung eine Maxwell'sche ist. Die wirkliche Verteilung

ist natürlich ein klein wenig anders, indem durch die aufgezwungene makroskopische Bewegung jene Maxwellsche Verteilung etwas „verzerrt“ wird, wodurch zusätzliche Spannungen hervorgerufen werden, welche zu einer symmetrischen Matrix gehören. Doch erscheinen unter der oben angegebenen Voraussetzung $\left(\frac{u}{c}\right)^2 \ll 1$ diese Spannungen uns in erster Näherung gegenüber den durch die unsymmetrische Matrix (5) gegebenen vernachlässigbar. Schließlich wollen wir hier ganz flüchtig noch einen Grund angeben, warum uns das zu der Strömung in Fig. 1 oder in Fig. 7 gehörige Spannungsfeld, wie schon früher gesagt, unsymmetrisch erscheint: Überträgt man nämlich konsequent die obige Maxwellsche Transportbetrachtung auf die andere Begrenzungsfläche $d\sigma_1$ des Teilchens, indem man sich fragt, wieviel, von der *bewegten* Fläche aus gesehen, makroskopische Bewegungsgröße von der y -Richtung transportiert wird, so erhält man, wenn wir recht sehen, den Schub 0, da ja $v \equiv 0$ ist!

Versuchen wir nun, in derselben Weise die Wechselwirkung zwischen Flüssigkeit und Wand zu verstehen! Fig. 8 veranschaulicht ganz roh ein Wandstück mit seinen Rauigkeiten, deren Höhlungen von makroskopisch ruhender Flüssigkeit erfüllt sind, sowie eine darüber mit der Geschwindigkeit u_0 hinweggleitende Flüssigkeitsschicht.

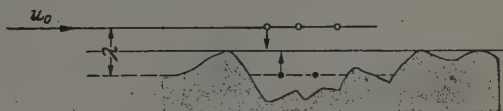


Fig. 8.

Die gestrichelte Linie

deutet die idealisierte oder mathematische Oberfläche an, wie sie in die rechnerische Behandlung eingeht. Dann können wir offenbar bezüglich dieser Linie dieselbe Überlegung anstellen wie früher, und erhalten an Stelle (von 30) für den Wandschub

$$\tau_0 = (dm)_0 u_0 \sim \rho c u_0,$$

wo nun aber der durch das Zeichen \sim bedingte Proportionalitätsfaktor, er heiße ζ_0 , im allgemeinen ein anderer als früher sein wird, indem jetzt auch noch die Wand hereinspielt. Genauer kann der Austausch an der Wand gegenüber dem im Innern höchstens schwächer, jedoch nicht stärker sein, d. h. es wird $(dm)_0 \leq dm$ bzw. $\zeta_0 \leq \zeta$. So erhalten wir die (32) entsprechende Beziehung

$$\tau_0 = \zeta_0 \rho c u_0 \quad (33)$$

oder

$$\tau_0 = g u_0, \quad (33a)$$

wo

$$g = \zeta_0 \rho c \quad \text{mit} \quad \zeta_0 \leq \zeta \quad (33b)$$

der Koeffizient der gleitenden oder äußeren Reibung ist, von uns kurz als *Gleitreibung* bezeichnet. Für den schon früher erwähnten *Gleitungskoeffizienten* μ/g ergibt sich aus (32a) und (33b)

$$\frac{\mu}{g} = \frac{\zeta}{\zeta_0} \lambda \quad \text{mit} \quad \frac{\zeta}{\zeta_0} \geq 1, \quad (34)$$

speziell also

$$g \leq \frac{\mu}{\lambda} \quad (34a)$$

oder, wenn wir alles dimensionslos ausdrücken, d. h. verabredungsgemäß $\mu = \nu' \varrho U L$, $g = g' \varrho U$, $\lambda = \lambda' L$ setzen,

$$\frac{\nu'}{g'} = \frac{\zeta}{\zeta_0} \lambda' \quad \text{mit} \quad \frac{\zeta}{\zeta_0} \geq 1 \quad (35)$$

und speziell

$$g' \leq \frac{\nu'}{\lambda'}. \quad (35a)$$

Denken wir wieder an ein Gas, so hat der Quotient ζ_0/ζ , der die „Abschwächung“ oder auch „Entartung“ des molekularen Austausches durch die Wand ergibt, für eine bestimmte Wand einen festen Wert, und es wird der Gleitungskoeffizient von der Größenordnung $\lambda' = \lambda/L$ ganz in Übereinstimmung mit Kundt und Warburg. Daß diese statt des Faktors ζ/ζ_0 , der bei uns stets ≥ 1 ist, einen etwas verschiedenen Faktor mit einem Wert < 1 , bedingt durch die Art, wie sie das Geschwindigkeitsprofil in unmittelbarer Wandnähe berechneten, herausbekommen haben, sei nur nebenbei erwähnt.

Wieder ist der so berechnete Schub „scheinbar“, indem er lediglich den Ersatz für einen gewissen Impulstransport durch die gestrichelte Linie bildet, der durch die Diffusion bedingt ist. Und wieder ist derselbe Schub bereits durch den Willen gegeben, die gestrichelte Fläche als mathematische Begrenzung einzuführen, welche so zu einer „Ersatzwand“ wird: Denn zunächst ist ja dies gar nicht möglich, indem über diese Fläche infolge der Diffusion ständig Moleküle nach der einen oder anderen Seite wechseln, und dadurch insgesamt Bewegungsgröße hereintragen. Um dies zu erreichen, müssen wir vielmehr noch die Korrektur anbringen, welche durch jenen Austausch bedingt ist und eben zu jenem scheinbaren Wandschub führt, welcher von uns als auf die Ersatzwand wirkend gedeutet werden muß. Dabei beachte man, daß uns hier, wo wir uns innerhalb der Hydro-mechanik bewegen, die eigentliche Wechselwirkung zwischen Gas (oder

Flüssigkeit) und dem Material der Wand gar nicht interessiert, sondern lediglich jene Wirkung, welche sich als Folge davon an der gestrichelten idealen Begrenzung im Mittel schließlich ergibt, und zum Unterschied von der erstgenannten rein mechanischer Natur ist.

In dieser Auffassung erscheint der Schubansatz (33) oder (33a) an der Wand ganz folgerichtig als die durch die Wand verursachte Entartung des entsprechenden Ansatzes (32) oder (32a) für das Flüssigkeitsinnere, dessen Rolle er an der Wand übernimmt bzw. fortsetzt. Mathematisch äußert sich diese Entartung in einem Absinken auf die nächsttiefere Differentiationsstufe: an Stelle von du/dy in (32a) tritt u_0 in (33a).

Hinterher steht nichts im Wege, den Ansatz (33a) ähnlich wie den Newtonschen rein phänomenologisch auf Grund von Versuchen festzulegen: Die Bindung durch die Ungleichheit, (34a) wird dann allerdings hinfällig, anderseits können wir den Grenzübergang $g \rightarrow \infty$ ohne weiteres ausführen, der zu $u_0 = 0$, d. h. der Haftbedingung führt. Weiter zeigt diese Betrachtung, daß wir auch den Fall $(dm)_0 = 0$, d. h. $g = 0$ zulassen müssen, d. h. einen ideal glatten Körper, ein Ideal, dem wir uns in der Wirklichkeit allerdings nur sehr beschränkt, in Gedanken jedoch beliebig stark nähern können. Ferner sieht man: Je schwächer der molekulare Austausch im Innern erfolgt, desto schwächer auch an der Wand, mit anderen Worten, je kleiner μ ist, desto kleiner ist auch g . Dabei können wir uns wenigstens in Gedanken (und im Falle eines Gases in gewissem Umfang z. B. durch eine entsprechend große Abkühlung) dem Grenzfall $\mu \rightarrow 0$ beliebig nähern, in welchem dann die Wand trotz ihrer geometrischen Aufrauhungen glatt wirkte. Ist das Wandmaterial einheitlich, wie es im allgemeinen der Fall sein wird, so ist g eine Konstante, die nur von dem Wandmaterial und der Natur der Flüssigkeit abhängt, eine Annahme, die wir, solange nichts anderes gesagt wird, im folgenden stets zugrunde legen.

Wie schon bemerkt, hat der Zahlfaktor ζ für alle Gase denselben konstanten Wert¹⁾. Dasselbe dürfen wir von ζ_0 annehmen, solange die Wand festgehalten wird und damit auch von dem „Abschwächungsfaktor“ ζ_0/ζ , welcher als Maß für die Rauigkeit der Wand anzusehen ist. Wie steht es nun damit für Flüssigkeiten? Da ihr molekulares Verhalten

¹⁾ Natürlich nur soweit, als man bei Gasen von einer Zähigkeit als Ergebnis des Austausches *unabhängiger* Moleküle sprechen kann, eine Annahme, deren Zutreffen hier überall vorausgesetzt wird. Was jenseits der dadurch abgegrenzten Sphäre geschieht, z. B. im Bereich extrem großer Vakuums, steht hier nicht mehr zur Diskussion, ebensowenig die Frage des stetigen Anschlusses, der übrigens für diesen Fall bis heute noch nicht restlos befriedigend durchgeführt ist.

wesentlich komplizierter als das der Gase ist, scheint für sie ζ , und damit auch ζ_0 , von vornherein keineswegs als von der Natur der Flüssigkeit unabhängig zu sein. Doch taucht die Frage auf, ob dies wenigstens auf den Abschwächungsfaktor ζ_0/ζ zutrifft, der dann nur noch von der Wand abhinge und daher mit dem für die Gase übereinstimmen müßte.

Wir beachten: g ist eine endliche Größe; ergibt also der Newtonsche Ansatz (32a) an der Wand einen Schub, so muß dieser Schub sich auch aus dem Wandansatz (33a) ergeben, d. h. an der Wand notwendig ein Gleiten statthaben. Es ist also kein Schub ohne ein Gleiten möglich. Dies ist die grundlegende Erkenntnis, zu der seinerzeit Kundt und Warburg gelangt sind.

6. *Wirkt sich die Erkenntnis von Kundt und Warburg für die Strömungslehre aus?*

Auf diese Frage möchten wir antworten: Ja, nämlich für alle jene Strömungen, wo genügend oder gar beliebig große Schube auftreten! Als Beispiel betrachten wir die schon früher herangezogene Strömung durch ein Rohr mit kreisringförmigem Querschnitt (Fig. 6) in dem Grenzfall, daß der innere (jetzt dimensionslose) Radius r'_i nach 0 geht, $r'_i \rightarrow 0$. Da hierbei der innere Wandschub beliebig groß wird, muß sich schließlich am inneren Mantel eine merkliche Gleitgeschwindigkeit einstellen, welche übrigens monoton nach 1 strebt, wenn u_0 auf die maximale Geschwindigkeit U bezogen wird. D. h. im Grenzfall ergibt sich jetzt im Gegensatz zu früher die volle Poiseuille-Strömung, also ohne die damals durch die Haftbedingung verursachte Unstetigkeit 0ter Stufe, deren Aufhebung man auch mathematisch nur mit Befriedigung feststellen kann. Die Tatsache, daß man bereits bei dieser Strömung nicht mehr in der Lage ist, auf Grund der Haftbedingung den Vorgang einfach zu beschreiben, zeigt uns eindringlich, daß man auch innerhalb der Strömungslehre auf den Gleitansatz (32a) nicht gut verzichten kann, sondern denselben sich, und sei es auch nur in Gedanken, stets gegenwärtig halten muß, da man sonst Gefahr läuft, sich den Weg unnötig zu versperren, und ferner den Anschluß an die Physik zu verlieren. Außerdem gestattet erst dieser Ansatz rückwärts die sichere Handhabung der Haftbedingung, indem er die Grenzen ihrer Anwendbarkeit zeigt. Danach erscheint die Haftbedingung lediglich als eine rechnerische Erleichterung, über deren Zulässigkeit von Fall zu Fall zu entscheiden ist.

Ein weiteres Beispiel, in welchem uns die Haftbedingung nicht mehr anwendbar erscheint, möchten wir in den Strömungen von Fig. 4 und 5

erblicken: Auch hier werden durch die Berücksichtigung des Gleitansatzes die damals in Abschnitt 4 aufgezeigten Unstetigkeiten 0ter Stufe wieder aufgehoben und auf eine höhere Differentiationsstufe verwiesen (im Falle von Fig. 4 auf die erste, im Falle von Fig. 5 wahrscheinlich sogar auf die zweite Stufe). Da bei diesen Strömungen an der Rohrwand jedenfalls Wandgeschwindigkeiten von der Größenordnung der Kolbengeschwindigkeit und damit außerordentlich große Schube auftreten, müssen die Flächen, längs denen dies statthat, ähnlich wie im Falle der Strömung durch ein kreisringförmiges Rohr (hier natürlich gemeint für ein Mantelstück von der Längeneinheit) genügend klein sein, derart, daß sich gerade die entsprechende Gegenkraft zu der Kolbenkraft ergibt (bei der genannten Rohrströmung sinkt die Gegenkraft des inneren Mantels im Limes $r'_i \rightarrow 0$ sogar auf 0). Ferner weisen wir noch auf den folgenden Umstand hin: Da wir jetzt Gleiten zulassen, könnte es auf den ersten Anblick scheinen, als ob in Fig. 4 und 5 die Flüssigkeitsbewegung einfach in einer starren Translation bestünde, mit anderen Worten, nur Wandschube durch reines Gleiten, nicht aber innere Schube durch Geschwindigkeitsunterschiede aufträten, wiewohl dies angesichts der Diffusion und des Prinzips der Stetigkeit unwahrscheinlich genug ist. Der angenommene Fall erweist sich jedoch unmöglich, sobald wir uns folgendes Experiment denken: Wir isolieren die Rohrwand adiabatisch; ferner betrachten wir jenen Zustand, in welchem die Kolbenbewegung bereits gleichförmig geworden ist, was notwendig eintreten muß, da die einwirkende Kraft konstant ist, und andererseits notwendig ein Wandschub auftritt; alsdann muß die geleistete Arbeit sich in Erwärmung der Flüssigkeit umsetzen, was unmöglich ist, da die Bewegung als eine starre nach früherem die Dissipation 0 hat.

Weitere Beispiele, in denen die Anwendbarkeit der Haftbedingung uns zum mindesten in Frage gestellt erscheint, sind die Umströmung der Hinterkante eines Tragflügels, durch welche der sogenannte Prandtl'sche Anfahrwirbel zustande kommt, wenigstens unmittelbar nach Beginn der Bewegung, und überhaupt die Umströmung eines Körpers durch Luft, falls dieser besonders gut geglättet ist.

Abgesehen von solchen praktischen Fällen, in denen wir auf den Gleitansatz nicht verzichten möchten, darf dieser Ansatz auch in theoretischer Hinsicht die Aufmerksamkeit des Strömungsingenieurs beanspruchen, so z. B. in der Frage des für die Strömungslehre so wichtigen Grenzüberganges zu verschwindender Zähigkeit $\mu \rightarrow 0$, der von ihm aus in neuem Lichte erscheint, wie wir später sehen werden (Abschnitt 14).

7. Über die experimentelle Bestimmung der Gleitreibung.

Überprüfen wir vom Standpunkt der Beziehung (34) aus ein Experiment von Dr. Poiseuille, welches sich auf Wasser bezieht! Ist $(p_1 - p_2)$ der auf die Rohrlänge L entfallende Druckabfall, r der Radius, so gilt für die sekundliche Durchflußmenge¹⁾

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{L} \left\{ 1 + 4 \frac{\mu/g}{r} \right\},$$

wo der in der Klammer auf 1 folgende Summand den durch das Gleiten bedingten Einfluß E darstellt, für den wir nach (34a) die Beziehung haben

$$E = 4 \frac{\mu/g}{r} \geq 4 \frac{\lambda}{r}.$$

In einem bestimmten Falle war nun

$$\begin{aligned} r &\approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ cm}, & p_1 - p_2 &\approx 1 \text{ at} = 10^6 \text{ g/cm sec}^2, \\ L &\approx 2,5 \text{ cm}, & \mu &\approx 10^{-2} \text{ g/cm sec}. \end{aligned}$$

Da für eigentliche Flüssigkeiten die freie Weglänge λ von der Größenordnung eines halben Moleküldurchmessers und daher $\lambda \approx \frac{1}{2} 10^{-7} \text{ cm}$ ist, so erhalten wir

$$Q \approx 0,00025 \{1 + E\} \text{ cm}^3/\text{sec},$$

wo

$$E \geq 10^{-4}.$$

Da der Einfluß E so außerordentlich gering und jedenfalls experimentell heute kaum feststellbar ist, so versteht man den Grad von Sicherheit, mit dem man auf strenges Haften, d. h. $g \rightarrow \infty$, schließen zu dürfen glaubte. Wir wollen noch die mittlere Geschwindigkeit \bar{u} , den Wandschub τ_0 , die Größenordnung des Gleitkoeffizienten g und damit auch der Wandgeschwindigkeit u_0 , sowie die Reynoldssche Zahl $\text{Re} = \frac{\bar{u} \cdot r}{\nu}$ angeben:

$$\begin{aligned} \bar{u} &\approx 20 \text{ cm/sec}, & g &\leq 2 \cdot 10^5 \text{ g/cm}^2 \text{ sec}, \\ \tau_0 &\approx 4 \cdot 10^2 \text{ g/cm sec}^2, & u_0 &\geq 2 \cdot 10^{-3} \text{ cm/sec}, \end{aligned}$$

$$\text{Re} \approx 4.$$

Alsdann denken wir uns mit denselben Daten wie vorhin den Versuch von Poiseuille wiederholt, jedoch an Stelle von Wasser Luft genommen. Der Ausfluß geschehe in die Atmosphäre. Dann ist der mittlere Druck im

¹⁾ Vgl. z. B. das unter Anm. 1, S. 313 zitierte Werk von C. Schaefer, 1. Bd., Formel (58), auf S. 926.

Rohr 1,5 at, und mithin die zugehörige freie Weglänge $\lambda = \frac{1}{1,5} \lambda_0$, wo λ_0 die Weglänge für normalen Druck und von der Größenordnung 10^{-5} cm ist. Damit ergibt sich für den Einfluß E

$$E \geq 4 \cdot \frac{\lambda}{r} = 4 \cdot \frac{\frac{2}{3} \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{4}{3} \cdot 10^{-2}, \quad \text{d. h. rund } 1\%,$$

und weiter¹⁾

$$\bar{u} \approx 10^3 \text{ cm/sec}, \quad g \geq 20 \text{ g/cm}^2 \text{ sec},$$

$$\tau_0 \approx 4 \cdot 10^2 \text{ g/cm sec}^2, \quad u_0 \leq 20 \text{ cm/sec},$$

$$\text{Re} \approx 13,3,$$

welche Daten deutlich zeigen, daß sich hier der Einfluß des Gleitens bemerkbar macht und die Gleitreibung g oder auch der Gleitungskoeffizient μ/g experimentell bestimmen läßt. Z. B. erhielten Kundt und Warburg bei ihren Versuchen für Luft unter Atmosphärendruck und bei 15 bis 200°C in runder Zahl für $\frac{\mu}{g} = \frac{\xi}{\xi_0} \lambda$ den Wert 10^{-5} cm, also einen Wert, der in der Tat von der Größenordnung der freien Weglänge ist. Da λ/r ungefähr $\frac{1}{3} 10^{-2}$ ist, so entspricht weiter diese Strömung gerade der früher erwähnten von Kundt und Warburg, welche bei einer Verdünnung, die genau demselben Verhältnis von λ/r entsprach, eine scheinbare Abnahme der Reibung, d. h. ein Gleiten an der Wand, festgestellt haben.

Durch strenge Messung der Wandgeschwindigkeit u_0 kann man mittel der Beziehung $\tau_0 = g u_0$ auf die Gleitreibung schließen, und für sie eine Tabelle anfertigen, welche zwei Eingänge hat, einen für das Gas und einen für das Wandmaterial. Handelt es sich um die Strömung um einen beliebigen Körper, dessen Wand einheitlich ist, so gehört zu ihm jene Gleitreibung g , welche sich ergibt, wenn man aus demselben Wandmaterial ein Rohr bzw. eine Kapillare anfertigt, und für sie auf die geschilderte Weise g bestimmt bzw. falls dies schon vorher getan wurde, jener Tabelle entnimmt.

Wie steht es nun um die Bestimmung von g für Flüssigkeiten? Genauer gesagt: Gibt es Strömungen wirklicher Flüssigkeiten, an denen man g ablesen kann? Wir möchten diese Frage nicht ohne weiteres verneinen und weisen zu diesem Zwecke auf die schon öfters herangezogene Strömung durch ein kreisringförmiges Rohr hin, die wir ja rechnerisch vollständig beherrschen: Da hier für eine gegebene Strömung, sofern der innere Radius r_i genügend klein ist, Wandgeschwindigkeiten auftreten, die vergleichbar mit der maximalen Geschwindigkeit sind, wird eine Bestimmung von g möglich

¹⁾ Der kleine Re-Wert zeigt, daß die Strömung auch jetzt noch laminar ist.

sein, sobald es gelingt, eine solche Strömung zu realisieren und an ihr die Wirkung jener Wandgeschwindigkeit auf irgendeine Weise zu messen¹⁾.

8. Formulierung des allgemeinen Gleitansatzes nebst weiteren Bemerkungen.

Hier wollen wir nun die früher noch offengelassenen Randbedingungen zu den Navier-Stokesschen Bestimmungsgleichungen angeben. Für eindimensionale Strömungen bestehen diese in der einen Bedingung (wir lassen jetzt den Zeiger 0 weg)

$$\tau = g u \quad (36)$$

oder

$$\mu \frac{du}{dy} = g u, \quad (37)$$

welche wir also jetzt nur sinnvoll, d. h. invariant auf beliebige Strömungen ausdehnen müssen: τ ist der in der Wand wirkende Schub, d. h. mit Einbeziehung der Richtung die tangentielle Komponente p_t der Wandspannung p

$$p_t = p - (p \cdot n) n,$$

wo n die nach innen weisende Normale ist, $n = (\alpha, \beta)$; ganz ähnlich ist u einschließlich der Richtung die von selbst tangentielle Komponente w_t der Geschwindigkeit w , so daß $w_t = w$; dadurch geht (36) über in

$$p_t = g w,$$

in welcher Form nun der Ansatz nicht mehr an die Besonderheit, daß die Strömung eindimensional verlaufe, gebunden ist, und daher bereits die gewünschte Ausdehnung darstellt. Da weiter nach (6a)

$$p = \mu \frac{\partial w}{\partial n}$$

ist, erhalten wir, wenn wir jetzt alles in w ausdrücken:

$$\mu \left[\frac{\partial w}{\partial n} - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \cdot n \right) \bar{n} \right] = g w, \quad (38a)$$

oder in Koordinaten:

$$\left. \begin{aligned} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial n} - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \cdot n \right) \alpha \right] &= g u, \\ \mu \left[\frac{\partial v}{\partial n} - \left(\frac{\partial w}{\partial n} \cdot n \right) \beta \right] &= g v, \end{aligned} \right\} \quad (38b)$$

oder noch ausführlicher entsprechend (37):

$$\left. \begin{aligned} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha \left\{ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta \frac{\partial v}{\partial n} \right\} \right] &= g u, \\ \mu \left[\frac{\partial v}{\partial n} - \beta \left\{ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta \frac{\partial v}{\partial n} \right\} \right] &= g v, \end{aligned} \right\} \quad (g \neq 0). \quad (38c)$$

¹⁾ Um an dieser Strömung ein Gleiten sicherzustellen, müßte man nach einer Bemerkung von Herrn Prof. Dr. C. Schaefer vorher noch den Einfluß feststellen, der durch den Fehler bei der Messung des inneren und äußeren Radius bedingt ist.

Für ein Wandgebiet, in welchem $g \neq 0$, enthalten diese Beziehungen speziell die frühere Undurchdringlichkeitsbedingung $n \cdot w = 0$.

Ist aber für ein Wandstück $g = 0$, d. h. dasselbe ideal glatt, so trifft der letzte Schluß nicht zu, so daß wir jene Bedingung besonders hinzufügen müssen: In der Tat vereinfachen sich in diesem Falle die beiden Gleichheiten (38c) wegen $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ zu der einen

$$\beta \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha \frac{\partial v}{\partial n} = 0,$$

so daß wir noch eine weitere Bedingung frei haben, als welche wir eben die verlorengegangene Bedingung an der Wand

$$\alpha u + \beta v = 0$$

nehmen müssen. Für ein solches Wandstück haben wir also an Stelle (38c) die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \beta \frac{\partial u}{\partial n} - \alpha \frac{\partial v}{\partial n} &= 0 \\ \alpha u + \beta v &= 0 \end{aligned} \right\} (g = 0). \quad (39)$$

Wir geben (39) noch eine andere Form, die wir später benötigen: Dazu zerlegen wir das Wandstück in zwei solche Teile I und II, daß für sie $\alpha \neq 0$ bzw. $\beta \neq 0$ ist, und schreiben dann für beide Teile die Randbedingungen getrennt wie folgt an:

$$\left. \begin{aligned} \text{I: } u &= -\frac{\beta}{\alpha} v, \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial n}, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \text{II: } \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial v}{\partial n}, \\ v &= -\frac{\alpha}{\beta} u, \end{aligned} \right\} \quad (39a)$$

welche an den Stellen, wo I und II sich treffen, offenbar miteinander übereinstimmen.

Wir wollen noch anschreiben, wie die Randbedingungen (38c) sich an einer bestimmten Wandstelle vereinfachen, wenn wir in sie den Koordinatenursprung legen und die x -Achse in die Tangente, die y -Achse in die ins Innere der Flüssigkeit weisende Normale fallen lassen (Fig. 9): dann ist $n = (0, 1)$, ferner $v = 0$, wodurch die zweite Gleichheit in die Identität $0 = 0$ entartet und die erste sich zu

$$\mu \frac{\partial u}{\partial n} = g u \quad (40)$$

vereinfacht. Ist nun z. B. $u \geq 0$ und setzen wir für die absolute Geschwindigkeit das neue Zeichen w , wo also $w = +\sqrt{u^2 + v^2}$, so folgt weiter

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{u \frac{\partial u}{\partial n} + v \frac{\partial v}{\partial n}}{+\sqrt{u^2 + v^2}},$$

d. h. an der Wand $\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n}$, da dort $v = 0$. Mit τ als Wandschub erhalten wir so aus (40)

$$\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial n} = gw. \quad (41)$$

Dieselbe Gleichheit (41) ergibt sich auch für $u \leq 0$.

Schließlich gestattet uns der Gleitansatz auch eine größere Freiheit in der Herstellung allgemeinerer Lösungen der Bestimmungsgleichungen, als das bei der Haftbedingung möglich wäre, und zwar geschieht dies ganz ähnlich, wie in der Theorie der idealen Strömungen verfahren wird. Betrachten wir zunächst die Kanalströmung in Fig. 10, wo das Profil bekanntlich eine Parabel ist und eine Wandgeschwindigkeit $\neq 0$ oder $= 0$ besitzt, je nachdem die Gleit- oder Haftbedingung zugrunde gelegt wird.

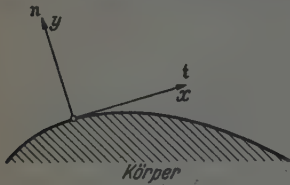


Fig. 9.

Wollen wir nun die eine Hälfte der Strömung (in Fig. 10 schraffiert) für sich erzeugen, so müssen wir im Falle des Haftens die gestrichelte Wand mit der dort herrschenden maximalen Geschwindigkeit bewegen, im Falle des Gleitens jedoch als ideal glatt annehmen, da ja dort der Schub 0 herrscht;



Fig. 10.



Fig. 11.

weiter darf dann die Wand als ruhend angenommen werden. Ähnlich steht es, wenn der Schnitt nicht in die Achse gelegt wird: Im Falle des Gleitens erhält dann die gestrichelte und wieder als ruhend angenommene Wand eine Gleitreibung g , die aus der dort herrschenden Gleichung $\tau = gw$ zu berechnen ist. Dabei machen wir natürlich immer stillschweigend die Annahme, daß die Bestimmungsgleichungen genau eine Lösung besitzen, für sie also ein Eindeutigkeitssatz gilt. Bis hierher leisten beide Auffassungen, die des Haftens und die des Gleitens, gleichviel. Gehen wir aber jetzt zu räumlichen Rohrströmungen über, so können wir im Falle des Gleitens in derselben einfachen Weise einen beliebigen Ausschnitt (in Fig. 11 schraffiert) erzeugen, wobei jetzt das aus $\tau = gw$ längs des neuen Umrisses berechnete g eben ortsveränderlich, d. h. die neue Wand uneinheitlich ist. Im Falle des Haftens wäre jedoch die Erzeugung viel schwieriger, da man hierfür annehmen müßte, daß jeder Punkt des neuen Querschnittes mit der dort herrschenden Strömungsgeschwindigkeit bewegt würde.

Entstehung der Wirbel.

9. Ein Wärmegleichnis.

Hier wollen wir kurz auf die Entstehung der Wirbel eingehen. Um die Vorstellungen zu fixieren, betrachten wir die ebene Flüssigkeitsbewegung, die entsteht, wenn ein Zylinder aus der Ruhe heraus bewegt wird. Wie die Erfahrung zeigt, entstehen hierbei an der Hinterseite des Körpers Wirbel, welche mit einem Widerstand verknüpft sind.

Daß Wirbel entstehen müssen, zeigen sofort die Bestimmungsgleichungen: Wäre dem nämlich nicht so, so herrschte also überall Potentialströmung; diese könnte dann aber nicht mehr der Gleitbedingung genügen, indem durch sie eine Überbestimmtheit in die betreffende mathematische Aufgabe gebracht wäre, und zwar einschließlich der noch willkürlichen Gleitreibung g in der Gleitbedingung¹⁾. Das bedeutet, daß man also zu der Potentialströmung rückwärts nicht ein solches g finden kann, daß die Gleitbedingung $\mu \frac{\partial w}{\partial n} = gw$ erfüllt wird. Es mag genügen, wenn wir uns beim Beweis auf Körper beschränken, die nirgends ideal glatt sind, für die also $g > 0$ ist. Erinnern wir uns dann, daß w im Innern kein Maximum annehmen kann²⁾. Bestimmen wir also auf der Oberfläche die Stelle maximaler Geschwindigkeit w , so kann dort $\partial w / \partial n$ nicht > 0 sein, muß also ≤ 0 sein. Dann wäre aber dort der Schub τ einerseits gleich $gw > 0$, andererseits gleich $\mu \frac{\partial w}{\partial n} \leq 0$, was ein Widerspruch ist.

Nachdem wir so die Existenz von Wirbeln eingesehen haben, wünscht man auch ihre Entstehung und Fortbewegung genauer kennenzulernen. Dies kann selbstverständlich nur durch eine tatsächliche Integration der Bestimmungsgleichungen geschehen, was bis heute noch nicht gelungen ist (ein Versuch, diese Gleichungen schrittweise aufzulösen, wird weiter unten in Abschnitt 10 und 11 angedeutet). Indessen können wir, ähnlich wie wir dies früher schon für ideale Strömungen getan haben, die Strömung als bereits bekannt voraussetzen und versuchen, alsdann aus der Differential-

¹⁾ Beschränkt man sich auf die Haftbedingung, so ist die Überbestimmtheit fast evident: Denn erfolgt die Anströmung mit der Geschwindigkeit \bar{u} in der x -Richtung, so folgt bereits aus $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ am Rand zusammen mit $v = 0$ im Unendlichen, daß $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \equiv 0$, d. h. wegen der Kontinuitätsgleichung $u \equiv \bar{u}$, $v \equiv 0$ ist, was einen Widerspruch ergibt. — ²⁾ Vgl. das unter Anm. 1, S. 302 zitierte Werk von H. Lamb, S. 42.

gleichung (9) nebst den für sie zu erfüllenden äußeren Bedingungen für die Wirbelstärke ω möglichst viel herauszulesen: Gelingt in dieser Hinsicht ein allgemeiner Schluß, so ist dieser als eine ähnliche Erkenntnis zu bewerten, wie damals der einfache (und seinerzeit von Helmholtz gezogene) Schluß (10) für ideale Strömungen. Doch scheint auch in dieser Hinsicht nichts bekannt zu sein. Immerhin läßt sich doch einiges sagen, was geeignet ist, uns die Entstehung und weitere Fortbewegung der Wirbel näherzubringen.

In der Tat zeigt der Vergleich von (9) mit (23), daß wir den ganzen Vorgang in ein Wärmebild umsetzen können, demgemäß wir jetzt ω als Temperatur auffassen. Behalten wir dies im Auge und erinnern uns weiter an das im Anschluß an (11) für ideale Flüssigkeiten Gesagte, so stellen wir fest, daß jetzt über die damals schon ausgenutzte Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ (wo etwa Ruhe herrschen soll) hinaus noch eine Randbedingung für ω nötig ist. Ist $\bar{\omega}$ der Randwert, d. h. die Körpertemperatur, so kann $\bar{\omega}$ nicht $= 0$ sein, da sonst wegen des Eindeutigkeitssatzes $\omega = 0$ wäre, was, wie wir oben gesehen haben, infolge der Gleitbedingung unmöglich ist. D. h. aber, der Körper wird angeheizt, und damit auch die vorbeiströmende Flüssigkeit oder, wenn wir auf die Flüssigkeitsbewegung zurückübersetzen, *es entstehen Wirbel, und zwar von der Wand her*; und ebenso, wie durch die Anströmung eine Unsymmetrie in die Temperaturverteilung gebracht wird, indem im Rücken des Zylinders höhere Temperaturen entstehen werden als vorne, so wird die Flüssigkeit im Rücken mehr Wirbel als vorne besitzen, wie sich dies anschaulich auch in dem stark durchwirbelten „Kielwasser“ zeigt.

Auf etwas andere Weise können wir uns vom Körper aus gesehen die Entstehung der Wirbel folgendermaßen veranschaulichen: Wir denken uns zur Zeit $t = 0$ (Ruhe) den ganzen Flüssigkeitsbereich in Volumenelemente nach Art von Pflastersteinen aufgeteilt. Nach der kurzen Zeit dt sind dann diese Pflastersteine unter inhaltstreuer Verformung etwas weiter gerückt derart, daß sie den ganzen Flüssigkeitsbereich wieder lückenlos pflastern. Wirkt nun keine Reibung und mithin die Wand nur als undurchdringlich, so ist die Strömung eine Potentialströmung, und es hat sich beim Übergang von der alten in die neue Pflasterung kein Stein im Mittel gedreht. Wirkt aber die Reibung, so müssen bei jenem Übergang infolge der Gleitbedingung bereits die der Wand unmittelbar anliegenden Steine etwas gedreht werden (und zwar an der Rückseite etwas stärker als an der Vorderseite), und als Folge davon auch die diesen wieder benachbarten Steine ..., wobei die Verdrehung nach außen immer schwächer werden wird.

Versuch einer schrittweisen Auflösung der Navier-Stokesschen Bestimmungsgleichungen.

10. Aufstellung eines äquivalenten Gleichungssystems.

Verkörpern wir unsere Vorstellungen auch weiterhin an der in Abschnitt 9 behandelten Flüssigkeitsbewegung! Vom Körper aus haben wir dann eine Anströmung aus dem Unendlichen, die in der x -Richtung mit der Geschwindigkeit $u_\infty = u_\infty(t)$ erfolge. Sei die Wand zunächst nirgends ideal glatt, d. h. $g > 0$. Die Bestimmungsgleichungen einschließlich der äußeren Bedingungen lauten dann

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &\equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{du_\infty}{dt} + \nu \Delta u, \\ \frac{dv}{dt} &\equiv \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (42a)$$

Randbedingungen

am Körper:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu}{g} \left[\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha \left(n \cdot \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right] &= u, \\ \frac{\mu}{g} \left[\frac{\partial v}{\partial n} - \beta \left(n \cdot \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right] &= v; \end{aligned} \right\} \quad (42b)$$

im Unendlichen:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_\infty(t), \text{ genauer } u - u_\infty(t) \sim 1/r^2, \\ v &= 0, \text{ genauer } v \sim 1/r^2, \\ P &= 0, \text{ genauer } P \sim 1/r; \end{aligned} \right\} \quad (42c)$$

Anfangsbedingung:

$$\left. \begin{aligned} \text{für } t = 0 \text{ Ruhe, d. h. } u &= 0, \\ v &= 0, \\ P &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (42d)$$

Hierzu bemerken wir noch: Das Glied du_∞/dt in der ersten Bewegungsgleichung ist die (scheinbare) Führungskraft, welche dadurch hereinkommt, daß wir das Bezugssystem in den bewegten Körper gelegt haben; da diese ein Potential hat, nämlich $-\frac{du_\infty}{dt} x$, so hätten wir sie wieder auch zum Druck schlagen und mit dem neuen Druck $P^* = P - \frac{du_\infty}{dt} x$ wie im ruhenden Bezugssystem arbeiten können. Indessen wollen wir, wie wir es getan haben, das zeitabhängige Glied du_∞/dt für sich stehen lassen. Auf die in (42c) angesetzte Größenordnung für P kommen wir noch zurück (vgl. Fußnote 1, S. 338). — Es ist bekannt, wie schwierig diese Gleichungen zu integrieren sind, was bekanntlich seinen Grund darin hat, daß die Bewegungsgleichungen nicht linear, sondern quadratisch sind. Unser Ziel

ist nun, ein äquivalentes Gleichungssystem aufzustellen und für dieses eine schrittweise Auflösung zu versuchen.

Dazu differenzieren wir in (42a) die erste Gleichung nach x , die zweite nach y und addieren, wobei wir den die Quellung q enthaltenden Teil jeweils für sich in eine Zeile und den Rest in die darunterstehende Zeile setzen:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \nu \Delta q \\ - \Delta P. \end{array} \right.$$

Da aber die q enthaltende Zeile wegen der Kontinuitätsgleichung

$$q = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

für sich verschwindet

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} = \nu \Delta q,$$

bleibt als Gleichung für den Druck¹⁾

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = - \Delta P.$$

Analog leiten wir für $\partial P / \partial n$ an der Körperoberfläche eine Bedingung ab, indem wir in (42a) die erste Gleichung mit α , die zweite mit β multiplizieren, addieren, und mittels der Umformung

$$\alpha \Delta u + \beta \Delta v = -n \cdot \text{rot rot } \mathbf{w} + \partial q / \partial n$$

den die Quellung enthaltenden Bestandteil wieder für sich in eine Zeile setzen:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \\ \alpha \frac{du}{dt} + \beta \frac{dv}{dt} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \nu \frac{\partial q}{\partial n} \\ - \frac{\partial P}{\partial n} + \alpha \frac{du_{\infty}}{dt} - \nu (n \cdot \text{rot rot } \mathbf{w}). \end{array} \right.$$

Wieder verschwindet die erste Zeile für sich

$$0 = \nu \frac{\partial q}{\partial n},$$

¹⁾ Einer freundlichen Mitteilung von Herrn Prof. Dr. Hamel, Berlin, dem seinerzeit der erste Entwurf dieser Arbeit vorgelegt wurde, verdanke ich den Hinweis auf dessen Arbeit „Ein allgemeiner Satz über den Druck bei der Bewegung volumenbeständiger Flüssigkeiten“, Monatsh. Math. Phys. 43, 345–363, 1936, wo auf S. 346 dieselbe Gleichung für den Druck steht, jedoch in ganz anderer Weise, und ohne die Heranziehung unserer weiter unten stehenden Randbedingung (43) ausgenutzt wird. Im übrigen konnte ich an mancherlei Stellen dem Rat von Herrn Prof. Dr. Hamel folgen und meine ursprüngliche Abfassung verbessern, wofür ihm auch an dieser Stelle bestens gedankt sei.

so daß als Randbedingung für $\partial P / \partial n$ übrig bleibt

$$\alpha \frac{du}{dt} + \beta \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial n} + \alpha \frac{du_{\infty}}{dt} - \nu (\mathbf{n} \cdot \text{rot rot } \mathbf{w}).$$

Hier schreiben wir die linke Seite in der Form $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{w}/dt$ und formen sie unter Ausnutzung der Undurchdringlichkeitsbedingung $\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = 0$ wie folgt weiter um: Durch Differenzieren derselben ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) &= \frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{w}}{dt} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{w}}{dt} &= - \frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $d\mathbf{n}$ die Änderung, die \mathbf{n} während dt erfährt, d. h. mit s als Bogenlänge

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \frac{ds}{dt} = -\kappa \mathbf{t} \mathbf{w},$$

wo κ die Krümmung und \mathbf{t} der Tangentenvektor ist (Fig. 9). Hieraus

$$- \frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot \mathbf{w} = \kappa \mathbf{w} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}) = \kappa w^2.$$

Damit erhalten wir für $-\partial P / \partial n$:

$$\kappa w^2 - \alpha \frac{du_{\infty}}{dt} + \nu (\mathbf{n} \cdot \text{rot rot } \mathbf{w}) = - \frac{\partial P}{\partial n}, \quad (48)$$

welche Gleichheit wir als neue Bedingung für P betrachten, die zu den schon oben angegebenen tritt.

Sehen wir noch zu, wie die Bestimmung für P für $t = 0$ lautet! Da dann die Flüssigkeit ruht, so hat man für P die Bestimmung

$$\left. \begin{aligned} \Delta P &= 0, \\ \text{Randbedingungen am Körper: } \frac{\partial P}{\partial n} &= \alpha \frac{du_{\infty}}{dt}, \\ \text{im Unendlichen: } P &= 0, \text{ genauer } P \sim 1/r. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Damit also $P = 0$ herauskommt, müssen wir noch annehmen, daß du_{∞}/dt für $t = 0$, kurz $(du_{\infty}/dt)_0$, verschwindet, mit anderen Worten: die Beschleunigung nicht plötzlich erfolgt. Wir kommen darauf noch zurück. Es sei bemerkt, daß unter der gemachten Voraussetzung $(du_{\infty}/dt)_0 = 0$ die als gültig angenommene Größenordnung $P \sim 1/r$ hinreicht, um in bekannter Weise auf $P = 0$ schließen zu können.

Indem wir jetzt an Stelle der Kontinuitätsgleichung die neue Bestimmung von P heranziehen, erhalten wir ein neues System von drei Gleichungen für u, v, P , von dem wir zeigen wollen, daß es, seine Lösbarkeit

vorausgesetzt, dem früheren System (42) äquivalent ist. Wir schreiben das neue System ausführlich an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &\equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{du_{\infty}}{dt} + \nu \Delta u, \\ \frac{dv}{dt} &\equiv \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} &= -\Delta P. \end{aligned} \right\} \quad (45a)$$

Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \text{am Körper:} \quad &\frac{\mu}{g} \left[\frac{\partial u}{\partial n} - \alpha \left(n \cdot \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right] = u, \\ &\frac{\mu}{g} \left[\frac{\partial v}{\partial n} - \beta \left(n \cdot \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right] = v, \\ &\kappa w^2 - \alpha \frac{du_{\infty}}{dt} + \nu (n \cdot \text{rot rot } w) = -\frac{\partial P}{\partial n}; \end{aligned} \right\} \quad (45b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{im Unendlichen:} \quad &u = u_{\infty}(t), \text{ genauer } u - u_{\infty}(t) \sim 1/r^2, \\ &v = 0, \text{ genauer } v \sim 1/r^2, \\ &P = 0, \text{ genauer } P \sim 1/r. \end{aligned} \right\} \quad (45c)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Anfangsbedingung: für } t = 0 \text{ Ruhe, d. h. } &u = 0, \\ &v = 0, \\ &P = 0. \end{aligned} \right\} \quad (45d)$$

Denken wir uns diese neuen Gleichungen gelöst und fassen speziell die Bestimmung von P ins Auge, so können wir den Weg, der uns zu dieser führte, Schritt für Schritt auch rückwärts durchlaufen und gelangen so zu der folgenden Bestimmung für die Quellung:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} = \nu \Delta q;$$

Randbedingungen

$$\text{am Körper:} \quad \nu \frac{\partial q}{\partial n} = 0, \text{ d. h. } \frac{\partial q}{\partial n} = 0,$$

$$\text{im Unendlichen:} \quad q = 0, \text{ genauer } q \text{ mindestens } \sim 1/r^2,$$

$$\text{Anfangsbedingung:} \quad q = 0 \text{ für } t = 0,$$

welche vom Typ der Wärmeleitung ist, offenbar die Lösung $q = 0$ besitzt und daher auf Grund des Eindeutigkeitssatzes auch nur diese. $q = 0$ ist aber in der Tat die Kontinuitätsgleichung, womit die gewünschte Äquivalenz eingesehen ist¹⁾.

¹⁾ Wir erwähnen noch, daß diese Äquivalenz auch noch für $\nu = 0$, d. h. ideale Flüssigkeiten, gilt. Dann fallen alle die mit ν behafteten Glieder weg, und es treten in (45b) keine Randbedingungen für u, v auf, da die Bedingung für

Ist ein Wandstück des Körpers ideal glatt, so haben wir in (45b) für u, v an Stelle des Gleitansatzes die früher angegebenen Bedingungen (39a) zu setzen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I: } u = -\frac{\beta}{\alpha} v, \\ \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial n}, \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{II: } \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial v}{\partial n}, \\ \quad v = -\frac{\alpha}{\beta} u, \end{array} \right\} \quad (45e)$$

wo das Wandstück aus zwei solchen Teilen I und II aufgebaut gedacht ist, daß für sie $\alpha \neq 0$ bzw. $\beta \neq 0$ ist. Speziell ist in diesen wieder die Undurchdringlichkeitsbedingung $n \cdot w = 0$ enthalten. Da aber bei dem obigen Äquivalenzbeweis die Randbedingungen für u und v nur insoweit ausgenutzt wurden, als sie jene Bedingung $n \cdot w = 0$ enthielten, so sieht man unmittelbar, daß jener Beweis auch jetzt noch verfängt.

11. Versuch einer schrittweisen Auflösung des neuen Systems.

Das neue Gleichungssystem (45) lösen wir schrittweise auf, indem wir von der Ruhe ausgehen

$$\begin{matrix} (0) & (0) & (0) \\ u, & v, & P, \end{matrix} \quad \text{wo} \quad \begin{matrix} (0) & (0) & (0) \\ u = & v = & P = 0 \end{matrix}$$

und in einem ersten Schritt

$$\begin{matrix} (1) & (1) & (1) \\ u, & v, & P \end{matrix}$$

wie folgt bestimmen:

$$\begin{matrix} (1) & (1) \\ u, & v \end{matrix}$$

die Undurchdringlichkeit $n \cdot w = 0$ bereits in der für den Druck berücksichtigt ist, welche jetzt so lautet:

$$\kappa w^2 - \alpha \frac{d u_{\infty}}{d t} = - \frac{\partial P}{\partial n}. \quad (+)$$

Und ferner läßt sich die Äquivalenz auch auf den Fall ausdehnen, daß vom Körper eine Unstetigkeitsfläche ausgeht. Sei n ihre Normale und der Sprung einer Größe beim Durchtritt allgemein durch $[\]_1^2$ angedeutet; sei ferner s die Bogenlänge, w_n die Normalgeschwindigkeit der Fläche. Eine erste Bedingung für den Druck ist dann die, daß er zu beiden Seiten der Fläche derselbe ist, was wir — endlichen Druck vorausgesetzt — offenbar auch so ausdrücken können:

$$0 = \left[\frac{\partial P}{\partial s} \right]_1^2. \quad (++)$$

Die zweite Bedingung, welche in dem äquivalenten System jetzt noch hinzukommt, lautet am Körper wie früher, d. h. ist hier die Bedingung (+), während sie an der Unstetigkeitsfläche auf demselben Wege, der zu (+) führte, nur daß die Bedingung $n \cdot w = 0$ durch $[n \cdot w]_1^2 = 0$ zu ersetzen ist, sich in der Form ergibt:

$$- \frac{d w_n}{d s} [w]_1^2 + \kappa [w^2]_1^2 = - \left[\frac{\partial P}{\partial n} \right]_1^2. \quad (+++)$$

aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} &= -\frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} + \frac{du_\infty}{dt} + v \Delta u^{(1)}, \\ \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} &= -\frac{\partial P^{(0)}}{\partial y} + v \Delta v^{(1)}.\end{aligned}$$

Randbedingungen
am Körper:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\mu}{g} \left[\frac{\partial u^{(0)}}{\partial n} - \alpha \left(n \cdot \frac{\partial w^{(0)}}{\partial n} \right) \right] &= u^{(1)}, \\ \frac{\mu}{g} \left[\frac{\partial v^{(0)}}{\partial n} - \beta \left(n \cdot \frac{\partial w^{(0)}}{\partial n} \right) \right] &= v^{(1)},\end{aligned} \right\} \quad (46)$$

im Unendlichen:

$$\begin{aligned}u^{(1)} &= u_\infty(t), \quad \text{genauer} \quad u^{(1)} - u_\infty(t) \sim \frac{1}{r^2}, \\ v^{(1)} &= 0, \quad \text{genauer} \quad v^{(1)} \sim \frac{1}{r^2};\end{aligned}$$

Anfangsbedingungen: für $t = 0$ Ruhe, d. h.

$$u^{(1)} = 0, \quad v^{(1)} = 0,$$

und mit Hilfe der so berechneten $u^{(1)}, v^{(1)}$ den Druck P aus der Gleichung

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + 2 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} = -\Delta P^{(1)}.$$

Randbedingungen

$$\text{am Körper:} \quad \kappa w^2 - \alpha \frac{du_\infty}{dt} + v (n \cdot \text{rot rot } w) = -\frac{\partial P^{(1)}}{\partial n},$$

$$\text{im Unendlichen:} \quad P^{(1)} = 0, \quad \text{genauer} \quad P^{(1)} \sim \frac{1}{r},$$

ähnlich — indem wir den oberen Zeiger um 1 vorstellen — in einem zweiten Schritt die Näherung $u^{(2)}, v^{(2)}, P^{(2)}, \dots$, und allgemein in einem k -ten Schritt die Näherung

$$u^{(k)}, \quad v^{(k)}, \quad P^{(k)}.$$

Indem wir uns so von Annäherung zu Annäherung tummeln, erhalten wir — Konvergenz vorausgesetzt — im Grenzfall $k \rightarrow \infty$ Lösungen

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} u^{(k)}, \quad v = \lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)}, \quad P = \lim_{k \rightarrow \infty} P^{(k)} \quad (\text{für } k \rightarrow \infty)$$

des Gleichungssystems (45) und damit auch des Systems (42). Wie man sieht, sind bei jedem Schritt (lineare) Differentialgleichungen vom Typ der Wärmeleitung — welche im Falle von u, v mit der Randbedingung (29) verknüpft sind — zu lösen, für die also die Eindeutigkeit gesichert ist. In diesem Sinne ist, was die Rechnung anbetrifft, die Aufgabe „linearisiert“. Auch stellt jede Näherung eine Umströmung des Körpers dar. Wir bemerken ferner, daß bereits $w^{(1)}$ nicht mehr $= 0$ ist, da es der Randbedingung im Unendlichen genügt, mit anderen Worten, das Auflösungsverfahren kommt sicher in Gang.

Ist der Körper längs eines Wandstückes ideal glatt, so müssen wir für u, v die in (45c) angegebenen Bedingungen heranziehen, und setzen alsdann in unserem Näherungsverfahren in Analogie zu (46):

$$\begin{aligned} \text{I: } u^{(1)} &= -\frac{\beta^{(0)}}{\alpha} v, & \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} &= \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial v^{(0)}}{\partial n}, \\ \frac{\partial v^{(1)}}{\partial n} &= \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial n}, & \text{II: } v^{(0)} &= -\frac{\alpha^{(0)}}{\beta} u. \end{aligned}$$

Natürlich könnten wir in unserem Auflösungsverfahren statt von der Ruhe auch von einer beliebigen Strömung ausgehen. Um dann die weitere „Entwicklung“ dieser Strömung zu erhalten, könnten wir ferner in Analogie zu dem bekannten Eulerschen Verfahren, gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung zu integrieren, wie folgt vorgehen: Wir zerlegen die Zeitachse in genügend kleine Schritte, und bestimmen z. B. im ersten Schritt von der Länge Δt die Strömung näherungsweise so, daß wir auf das Intervall $0 \dots \Delta t$ unser Auflösungsverfahren anwenden mit $w^{(0)}$ und $P^{(0)}$ als Ausgangszustand (wo also $w^{(0)}$ und $P^{(0)}$ als von t unabhängig behandelt werden) und uns in demselben auf die erste Näherung $w^{(1)}, P^{(1)}$ beschränken, . . . , dann in einem zweiten Schritt ebenso verfahren, indem wir $w^{(1)}, P^{(1)}$ zur Zeit Δt als Ausgangszustand zugrunde legen usw.

12. Das Druckfeld bei plötzlicher Beschleunigung.

Hätten wir die Voraussetzung $(du_{\infty}/dt)_0 = 0$ nicht gemacht, so hätten wir in der Bestimmung (44) statt $P = 0$ die Lösung

$$P = \left(\frac{du_{\infty}}{dt} \right)_0 \varphi \quad (47)$$

erhalten, wo φ durch

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \alpha. \quad (47a)$$

bestimmt ist. φ können wir uns deuten als Geschwindigkeitspotential jener stationären Bewegung, die entsteht, wenn der Körper durch die reibungslose Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit 1 in der x -Richtung bewegt wird¹⁾. D. h., obwohl für $t = 0$ die Flüssigkeit noch ruht, müßten wir annehmen, daß zur selben Zeit bereits ein nicht verschwindendes Druckfeld besteht. Dies befremdet auf den ersten Blick, so daß wir näher darauf eingehen müssen.

Dazu betrachten wir einmal die zugehörige Potentialströmung, sehen also von der Reibung ab. Für diese lautet das Potential

$$\tilde{\varphi} = u_{\infty}(t) \{x - \varphi\}$$

mit demselben φ wie in (47) und (47a). Berechnen wir nun mittels der Bernoullischen Gleichung den zugehörigen Druck \tilde{P} , wobei wir beachten müssen, daß in unserem Bezugssystem die Führungskraft du_{∞}/dt wirkt. Dann lautet dieselbe bis auf eine hier unwesentliche Konstante

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \text{grad}^2 \tilde{\varphi} = - \left\{ \tilde{P} - \frac{du_{\infty}}{dt} x \right\}$$

und ergibt also für $t = 0$ den Druck

$$\tilde{P} = \left(\frac{du_{\infty}}{dt} \right)_0 \varphi,$$

d. h. ein nicht verschwindendes Druckfeld, welches überdies mit dem in (47) berechneten übereinstimmt. Mit anderen Worten: Dieselbe Diskontinuität begegnet uns bereits auch bei der zugehörigen Potentialströmung und ist einfach bedingt durch die Diskontinuität der Beschleunigung, welche ja voraussetzungsgemäß plötzlich einsetzt.

Dieses Resultat ist sehr einleuchtend: Wenn die Beschleunigung plötzlich einsetzt, haben wir in unserem Auflösungsverfahren von dem Druckfeld

$$P = \left(\frac{du_{\infty}}{dt} \right)_0 \varphi$$

auszugehen, in welchem Ansatz nun auch unser früherer ($du_{\infty}/dt = 0$) offenbar als Spezialfall enthalten ist. Alsdann wird die Strömung wesentlich durch diesen Druckverlauf bestimmt, welcher übereinstimmt mit dem

¹⁾ Da dieses φ im Unendlichen vom Charakter eines Dipols, d. h. $\sim 1/r$ ist, so trifft also dasselbe bezüglich des Druckes P zu, wodurch die früher gemachte Annahme gerechtfertigt erscheint.

Druckverlauf für die entsprechende Potentialströmung im Zeitpunkt $t = 0$.

Wir schreiben die Gleichungen für u, v nochmals an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} &= -\frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} + \frac{d u_{\infty}}{dt} + \nu \Delta u^{(1)}, \\ u^{(1)} &= 0 \text{ am Körper,} \\ u^{(1)} &= u_{\infty}(t) \text{ im Unendlichen,} \\ u^{(1)} &= 0 \text{ für } t = 0, \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} &= -\frac{\partial P^{(0)}}{\partial y} + \nu \Delta v^{(1)}, \\ v^{(1)} &= 0 \text{ am Körper,} \\ v^{(1)} &= 0 \text{ im Unendlichen,} \\ v^{(1)} &= 0 \text{ für } t = 0, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

und bemerken, daß diese erste Näherung w bereits Wirbel als Folge der Randbedingungen am Körper enthält, welche sich hier beim ersten Schritt auf strenges Haften reduzieren. Etwas anders gewendet können wir w ansehen als jenes Strömungsfeld, welches in erster Annäherung an die Stelle der Potentialströmung tritt, sobald die Reibung mitwirkt. In dieser Weise stellt sich jede neue Näherung als eine Umgestaltung der vorhergehenden dar, wobei diese Umgestaltung wesentlich von der Wand her erfolgt. Für eine hinreichend kurze Zeit müßte weiter diese Umgestaltung auf eine entsprechend dünne Zone, welche sich an den Körper anschließt, beschränkt sein, d.h. auf eine Prandtlsche Grenzschicht!

13. Über Prandtls Grenzschichttheorie.

Die Begegnung mit Prandtls Grenzschichttheorie verlockt, die beiden Anschauungen, die sich hier getroffen haben, miteinander zu vergleichen, um zu erfahren, was ihnen gemeinsam ist und was sie trennt. Beginnen wir mit Prandtls Anschauung.

Diese hat bereits Blasius¹⁾ an derselben Aufgabe (Bewegung eines Körpers aus der Ruhe heraus, wenn die Beschleunigung konstant ist) erprobt, indem er im Sinne von Prandtls Theorie als Druckverlauf den der zugehörigen Potentialströmung in die Prandtlschen Gleichungen eingeführt und auf Grund davon Ablösung und damit auch Wirbel und Widerstand errechnet hat. Vor dieser Rechnung hat Blasius mit denselben Methoden auch den Fall erledigt, daß die Bewegung plötzlich aus der Ruhe heraus erfolgt und auf konstante Geschwindigkeit gebracht wird, und hierbei ein schrittweises Auflösungsverfahren benutzt, welches ihm

¹⁾ a) H. Blasius, Math. Phys. 1912, S. 397ff. — Über Prandtls Grenzschichttheorie vergleiche man den bekannten Artikel von b) W. Tollmien, Grenzschichttheorie, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 4, 1. Teil, S. 239—287. Leipzig, Akad. Verlagsges., 1931.

beim ersten Schritt, was interessant ist, ganz ähnliche Gleichungen wie die oben von uns in (48) angeschriebenen geliefert hat. Doch bringt die Beschränkung auf die Grenzschicht, in welcher sich nach Prandtls Anschauung allein das hydrodynamisch interessante und wichtige Geschehen abspielt, auf der anderen Seite die folgenden Schwierigkeiten mit sich:

1. Muß Blasius an den „Säumen“ der Grenzschicht, also dort, wo sie sich in die gesunde Außen-, d. h. ideale Strömung verliert, einer Randbedingung genügen: Benutzen wir Blasius' Bezeichnungen, so hat jener Saum mit den krummlinigen Koordinaten der Fig. 12 die Koordinate $y \rightarrow \infty$, was hart ist, wenn man bedenkt, daß allgemein nach Prandtls Theorie die Grenzschichtdicke proportional $\sqrt{\nu}$ und in Abhängigkeit von der Zeit, proportional \sqrt{t} angesetzt wird, was insofern einleuchtet, als dann für $\nu \rightarrow 0$ wie für $t \rightarrow 0$ die Grenzschicht sozusagen ganz in die Körperwand hineingedrängt erscheint, mit anderen Worten, nicht mehr vorhanden ist; und

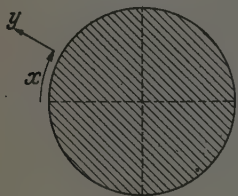


Fig. 12.

zwar wird diese Grenze in der Rechnung stets so angesetzt, unbeschadet der Tatsache, daß Blasius vorher in seiner Einleitung von einer sehr dünnen Grenzschicht spricht, und übrigens ebenso Tollmien in seinem zitierten Artikel (dort S. 246). Diesem Umstande hat erst später Mises¹⁾ in seiner bekannten Begründung, in welcher er die Prandtlsche Grenzschicht in einem Wärmebild vorstellt, allgemein Rechnung getragen: Er setzt für die Grenzschicht gemäß Prandtl $y \sim \sqrt{\nu}$ und führt dann u. a. eine neue Veränderliche gemäß $\eta = y/\sqrt{\nu}$ ein; indem er nun den der Prandtlschen Theorie zugrunde liegenden Limes $\nu \rightarrow 0$ sich ausgeführt denkt, schließt er, daß hierbei jede noch so kleine endliche Breite der ursprünglichen Strömung, d. h. Breite bezüglich y in einen unendlichen Bereich für η übergeht, mit anderen Worten, der Saum der Grenzschicht jetzt durch $\eta \rightarrow \infty$ gegeben sei! Dem möchten wir entgegenstellen, daß, wenn d die Dicke der Grenzschicht ist, wegen $d \sim \sqrt{\nu}$ doch das zugehörige η , das jetzt δ heiße, ~ 1 , d. h. endlich wird, was auch anschaulich klar ist, indem bei jenem Grenzübergang $\nu \rightarrow 0$ die Grenzschichtdicke auf 0 wie $\sqrt{\nu}$ abnimmt, so daß eben bezüglich y gar keine endliche Breite bei der Transformation übrigbleibt; lediglich im Falle der längs angeströmten und unendlich langen Platte bestehen keine Bedenken, als Saum sowohl $y \rightarrow \infty$

¹⁾ R. v. Mises, ZS. f. angew. Math. u. Mech. 7, 425–431, 1927; vgl. ferner den von Mises herrührenden Anhang in dem unter Anm. 1, S. 302 zitierten Werk von H. Lamb, S. 842–851.

als auch $\eta \rightarrow \infty$ anzunehmen. Daß die Säume der Grenzschicht nicht schlechthin im Unendlichen liegen können, erhellt auch daraus, daß eine solche Schicht nach Prandtl auch dann entstehen muß (wenigstens unmittelbar nach Beginn der Bewegung), wenn die Bewegung in einem Gefäß erfolgt, dessen Dimensionen mit denen des Körpers vergleichbar sind.

2. Die Blasius'sche Rechnung liefert eine Ablösung, d. h. einen vom Körper getrennten im Strömungsbereich liegenden und durch eine Rückströmung bedingten Wirbel, wobei als Druckverlauf jedoch jener der zugehörigen Potentialströmung, d. h. einer wirbelfreien Strömung zugrunde gelegt wird, woraus hervorgeht, daß die Rechnung nur für den *allerersten Beginn* der Strömung Geltung beanspruchen kann. Alsdann müßte man aber den Druck jedem neu entstandenen Wirbel sofort anpassen, eine Schwierigkeit, die später Prandtl in der Weise umging¹⁾, daß er das betreffende Druckgefälle als durch das Experiment gegeben annahm, was in Strenge bedeutete, daß also dann der Druckverlauf sowohl in Abhängigkeit von der Wandstelle als auch von der Zeit bekannt sein müßte. Gründet man aber die Rechnung auf ein solches Gefälle, so braucht es nicht Wunder zu nehmen, wenn sie Ablösung liefert, da doch diese in dem vorausgesetzten Druckgefälle steckt, aus welchem sie von den Prandtl'schen Gleichungen nachträglich sozusagen nur wieder herausdestilliert wird. Außerdem dürften die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen die Strömung nur bis zur Ablösungsstelle zu beschreiben geeignet sein, jedoch nicht darüber hinaus.

Demgegenüber haben wir es bei unserer Betrachtung und Rechnung stets mit der Strömung als Ganzes zu tun, in welche die Prandtl'sche Grenzschicht als Teil eingebettet erscheint, der bestimmt wird durch das Spiel der Randbedingungen am Körper mit denen im Unendlichen.

Im übrigen soll das nicht heißen, daß die in Prandtl's Theorie noch steckenden Schwierigkeiten nicht zu überwinden wären. Betrachten wir z. B. die unter 1. genannte, so besteht diese doch darin, daß die Grenzschichtdicke δ , d. h. die (von uns rechnerisch als scharf angesetzte) äußere Grenze der Schicht noch unbekannt ist. Eine solche Bestimmung für δ würde aber nun gerade die bekannte Karmansche Integralbedingung²⁾ darstellen (welche man wohl mitunter allein zur Bestimmung der Grenz-

¹⁾ Vgl. z. B. K. Hiemenz, Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. Inauguraldissertation Göttingen, erschienen 1911 in Berlin, abgedruckt in Dingers Polytechn. Journ. 326, 1911. — ²⁾ Th. v. Karman, ZS. f. angew. Math. u. Mech. 1, 233 ff., 1921, sowie den unter Anm. 1 b), S. 339 zitierten Handbuchartikel von W. Tollmien, S. 283.

schichtströmung heranziehen wollte, wozu sie aber offenbar von Haus aus nicht fähig sein kann), welche den Impulssatz für die Grenzschicht ausspricht, d. h. den Wandschub mit dem Impulsverlust verknüpft, und formal z. B. auch so erhalten werden kann, daß man die Prandtlsche Bewegungsgleichung über die Grenzschichtbreite integriert unter Ausnutzung der an ihrem Ende zu geltenden Randbedingungen, welche den Übergang in die gesunde Außenströmung verlangen. Nach dieser Bestimmung ist die Grenzschicht genau jene Zone, innerhalb welcher der Wandschub durch Impulsverlust zustande kommt, was ganz der Prandtlschen Vorstellung entspricht. So hätte man drei Gleichungen für die drei Unbekannten u , v , d , d. h. eine Bestimmung für die Strömung bei bekanntem Druckverlauf. Indem man die im Sinne von Prandtls Theorie vereinfachte erste Bewegungsgleichung von der Wand bis zu einer beliebigen inneren Stelle der Grenzschicht integriert, kann man dieselbe in eine Integralgleichung umsetzen, welche ähnlich jener Karmanschen für d ist, und sich z. B. in dieser Form für die Platte besonders gut auflösen läßt.

14. Weitere Bemerkungen.

Kehren wir zu den Gleichungen (48), zurück, in denen $P \neq 0$ ist.
 Dann liefern sie für $t = 0$, wo $u^{(1)} v^{(1)} = 0$ sind, bereits einen Widerstand, nämlich den bekannten Beschleunigungswiderstand, was auch einleuchtet, da doch die Beschleunigung plötzlich einsetzt. Dieser Widerstand ist derselbe wie jener für die Potentialströmung, wieder im Zeitpunkt $t = 0$. Wir hätten also ebensogut auch den Grenzübergang $v \rightarrow 0$ ausführen und alsdann $t = 0$ setzen können, um zu demselben Beschleunigungswiderstand zu gelangen. Wir werden dieses Beispiel gleich noch heranziehen, gehen aber vorher auf den Grenzübergang $v \rightarrow 0$ etwas genauer ein.

Wie steht es um die Aussage, welche den Grenzübergang $v \rightarrow 0$ zu verschwindender Zähigkeit verlangt, d. h. welchen Sinn haben wir mit ihr zu verbinden? Folgende Bemerkungen seien hierüber erlaubt, welche nur dazu dienen wollen, das Interesse auf diese Frage erneut zu lenken. Rein gedanklich können wir uns an der Flüssigkeit denselben in der Weise vollzogen denken, daß wir uns vorstellen, daß dem Medium auf irgendeine Weise (im Falle eines Gases in erster Annäherung z. B. durch starkes Abkühlen) die Eigenschaft der Diffusion entzogen (wobei die Schwerkraft natürlich ausgeschaltet sei) und so dasselbe zu einer idealen Flüssigkeit wird, in der nur noch Druckwirkungen möglich sind. Dabei machen wir die natürliche Annahme, daß sich bei diesem Grenzübergang eine normale

Strömung der idealen Flüssigkeit ergibt, in der also keine Unstetigkeiten auftreten, und alle Geschwindigkeiten ... endlich sind. — Wenden wir uns nun der gedachten Navier-Stokesschen Flüssigkeit zu. Solange die Gleitreibung g nur phänomenologisch eingeführt ist, kann der Grenzübergang in den Randbedingungen noch gar nicht durchgeführt werden, da ja in dieser Auffassung von g nicht gesagt werden kann, wie es mit μ verschwindet, und somit noch gar nicht feststeht, was z. B. aus der Bedingung (41) wird. Unsere rationale Ableitung für diesen Ansatz (41) dagegen ergibt, wenn wir für μ und g die Werte aus (32b) und (33b) einsetzen,

$$\zeta \rho c \lambda \frac{\partial w}{\partial n} = \zeta_0 \rho c w. \quad (49)$$

Diese Beziehung enthält nun viel mehr von dem, was eine wirkliche Flüssigkeit ausmacht, nämlich die Größen λ und c , was die Hoffnung nährt, daß der oben ausgeführte Grenzübergang an der wirklichen Flüssigkeit sich weitgehend in einem entsprechenden Grenzübergang an der gedachten Flüssigkeit widerspiegeln läßt, z. B. so: Da sich in (49) die molekulare Geschwindigkeit c links und rechts weghebt, enthält (49) in Wahrheit gar nicht mehr die Diffusion (so daß diese also nur in den Zähigkeitskräften $\nu \Delta u$... erfaßt wäre, welche abèr nach unserer Auffassung bei jenem Grenzübergang verschwinden); da weiter λ allein durch die Zahl der in der Raumeinheit vorhandenen Moleküle sowie den Durchmesser der Moleküle bestimmt ist, speziell also von c nicht abhängt und daher bei jenem Limes festbleibt, ζ und ζ_0 aber reine und konstante Zahlen sind, so könnten wir uns in der Tat dem physikalischen Grenzübergang anpassen, indem wir denselben in der oben vorgeschlagenen Form gemäß $c \rightarrow 0$ vornehmen. Als Randbedingung bliebe dann

$$\lambda^* \frac{\partial w}{\partial n} = w \quad \text{mit} \quad \lambda^* = \frac{\zeta}{\zeta_0} \lambda, \quad (50)$$

in die, wie man sieht, durch ζ_0/ζ noch die Art der Wandbeschaffenheit eingeht, und ferner durch λ der Durchmesser der Moleküle. Je nach dem Wert von λ^* stellt sich dann also im Grenzfall $\nu \rightarrow 0$ eine bestimmte ideale Strömung ein, die durch λ^* charakterisiert erscheint, wobei dieses λ^* , wie ein Vergleich von (50a) mit (34) zeigt, gerade der frühere Gleitungskoeffizient ist. Wollte man z. B. ideale Umströmungen gewöhnlicher Art, d. h. mit Randgeschwindigkeiten normaler Größenordnung erhalten, so müßte ζ/ζ_0 sehr groß, d. h. die Wand genügend glatt sein. Ferner könnte die sich einstellende ideale Strömung nicht wirbelfrei sein, indem durch (50) in die betreffende mathematische Aufgabe wieder eine Überbestimmtheit gebracht würde. Mit anderen Worten: In der idealen Grenzströmung zeigen sich

noch Spuren der verlorengegangenen Zähigkeit sowie des Wandmaterials in Form von Wirbeln; speziell ergibt sich also auch ein Druckwiderstand. Vergessen wir aber nicht, daß die Strömungen wirklicher Flüssigkeiten, und seien sie noch so schwach reibend, bildlich gesprochen, noch weit von jener Zone entfernt sind, unter der sich unser Grenzübergang abspielt: Doch wird der Reibungswiderstand für solche Flüssigkeiten im allgemeinen schon sehr klein sein, verglichen mit dem vorhin erwähnten Druckwiderstand. — Betrachten wir von diesem Standpunkt aus nochmals die Prandtl'sche Grenzschichttheorie! Nach ihr ist, sofern ν (womit genauer gemeint ist $\nu' = 1/\text{Re}$) genügend klein ist, der Reibungswiderstand $\sim \sqrt{\nu}$, geht also mit ν nach 0. Nicht so der Druckwiderstand, der durch die bei jenem Grenzübergang $\nu \rightarrow 0$ als Folge der Zähigkeit und des Wandmaterials zurückgelassenen Wirbel bedingt ist. D. h. aber: Der durch die Zähigkeit bedingte Widerstand steckt dann im wesentlichen im Druckwiderstand und nicht in dem vergleichsweise dazu kleinen und daher in erster Annäherung vernachlässigbaren Reibungswiderstand. Ähnlich steht es, wenn zwar kein Wirbelwiderstand, jedoch bei Beginn der Bewegung, d. h. für $t = 0$, ein Beschleunigungswiderstand vorhanden ist, wie dies in dem zu Beginn dieses Abschnitts gebrachten Beispiel der Fall ist: Auch dann wird in erster Näherung der reine Reibungswiderstand vernachlässigbar sein.

Die Randbedingung (50) können wir uns so veranschaulichen: Trägt man die (Wand-) Geschwindigkeit w in einem üblichen Diagramm über ihrem Normalanstieg $\partial w / \partial n$ auf, so erhalten wir eine Gerade — wir wollen sie die *Maxwellsche Gerade* nennen — von der Neigung λ^* , wo λ^* bis auf den Wandfaktor ζ/ζ_0 die mittlere Weglänge ist (Fig. 13). Die Beziehung erlaubt

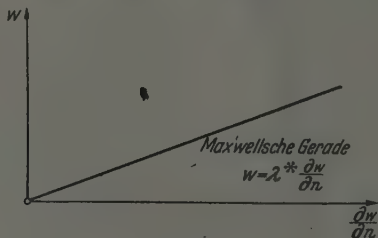


Fig. 13.

also, mittels Gasströmungen, z. B. durch dünne Kapillaren, λ^* und daher bei demselben Wandmaterial, d. h. festem ζ/ζ_0 , die mittleren Weglängen in ihrer relativen Größe zu bestimmen. Für den Fall von Luft haben wir schon an früherer Stelle den von Kundt und Warburg bei ihren Versuchen gewonnenen Wert von $\lambda^* \sim 10^{-5}$ cm angegeben.

Turbulente Strömungen.*15. Der Vorgang an der Wand.*

Hier liegen die Dinge in vielem ähnlich wie bei den laminaren Strömungen. Als die wichtigste und bis heute noch offene Frage erscheint uns die nach dem Vorgang an der Wand, d. h. dem Analogon des laminaren Gleitansatzes, kurz angedeutet durch das Schema:

Wechselwirkung zwischen	Laminar	Turbulent
Flüssigkeit und Flüssigkeit	bekannt (wenigstens in einer Dimension)	bekannt
Flüssigkeit und Wand	bekannt	?

Erinnern wir uns dazu der schon öfters betonten engen Verwandtschaft zwischen laminaren und turbulenten Strömungen: Der Newtonschen Zähigkeit μ als Ausdruck eines molekularen Austausches entspricht hier die Boussinesqsche Größe A als Ausdruck eines im allgemeinen bereits makroskopischen Austausches, welcher im Gegensatz zu μ von dem Betrag des Wirbels $|\omega|$ abhängt, und an Rohrströmungen rein phänomenologisch gewonnen wurde; den gestaltlichen Verlauf von A zeigt Fig. 3. Da wir jetzt auf einen rein phänomenologischen Standpunkt angewiesen sind, müssen wir einen anderen Weg als früher einschlagen. Hierbei werden wir uns selbstverständlich an eindimensionale Rohrströmungen halten, für welche der Schubansatz, welcher die Wechselwirkung von Flüssigkeit auf Flüssigkeit betrifft, uns hinreichend gesichert erscheint. Die im obigen Schema angedeutete Frage lautet dann: Welcher Ansatz übernimmt die Rolle jenes Schubansatzes bezüglich der Wechselwirkung zwischen Flüssigkeit und Wand?

Betrachten wir nur kreisförmige Rohre, so könnte man bereits an ihnen wenigstens theoretisch, und im Falle von Gasen wohl auch experimentell, den laminaren Gleitansatz phänomenologisch erschließen. Nicht so bei turbulenten Strömungen! Und zwar auf Grund des folgenden Unterschiedes: Arbeitet man mit demselben Medium, z. B. Wasser, und trägt für verschiedene Strömungen und verschiedene Rohre den Schub über dem Geschwindigkeitsanstieg du/dy auf, so erhält man im laminaren Falle entsprechend der Tatsache, daß μ konstant ist, stets dieselbe Newtonsche Gerade, im turbulenten Falle jedoch bereits eine einparametrische und für verschiedene Rohre, d. h. z. B. für verschiedene Rauigkeiten, eine zweiparametrische Schar von Kurven, die sich jedoch gestaltlich, d. h. bis

auf eine affine Dehnung; alle ähnlich sind (Fig. 2). Wollte man also für ein festes Rohr das Analogon hierzu im Bereich der laminaren Strömungen haben, so müßte man, um ebenfalls eine einparametrische Geradenschar zu bekommen, mit verschiedenen Medien wie Wasser, Luft, Öl... arbeiten. Würde man aber von diesen Strömungen für jedes Medium immer genau eine kennen, so wäre es offenbar unmöglich, den einmal hypothetisch angenommenen Gleitansatz $\tau_0 = gu_0$ durch den Versuch zu bestätigen, da man ja dann von jeder erst noch zu bestimmenden Kurve immer nur einen Meßpunkt kennen würde. So ungefähr scheinen uns aber bis jetzt die Verhältnisse im Bereich der turbulenten Strömungen zu liegen.

Wir müssen also zu nicht kreisförmigen Rohren unsere Zuflucht nehmen, deren Strömungen bekanntlich Nikuradse¹⁾ genau ausgemessen hat. Legen wir die z -Achse in die Strömungsrichtung, die x - und y -Achse in den Querschnitt, und nennen die Geschwindigkeit w , so ist w eine Funktion von x und y . Hier ist nun zu bedenken, daß die Messung gegen den Rand zu immer ungenauer wird, so daß man experimentell die Wandgeschwindigkeit kaum genügend kennt; man vergleiche Fig. 14, welche eine von Nikuradse experimentell aufgenommene Geschwindigkeitsverteilung für einen

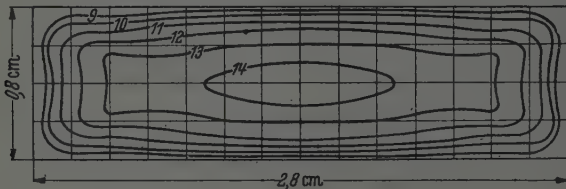


Fig. 14.

rechteckigen Querschnitt in Form eines Höhengschichtplanes andeutet, in welchem also auf jeder Linie die dort angeschriebene Geschwindigkeit (in m/séc) herrscht (sogenannte Isotachen, d. h. Linien gleicher Geschwindigkeit). Wir müssen also die Strömung zu berechnen versuchen. Die Bewegungsgleichung lautet

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\}, \quad (51)$$

wo ε vom Wirbel abhängt, der sich hier so darstellt:

$$|\omega| = + \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2} = |\text{grad } w|.$$

¹⁾ I. Nikuradse, Untersuchung über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen. VDI-Forschungsheft, Berlin 1926.

Die Schwierigkeit, die hier entsteht, ist nun die, daß man diese Differentialgleichung für den *ganzen Querschnitt* zu lösen hat, ohne daß man jedoch die am Rand zu erfüllende Bedingung für w bzw. die Wandgeschwindigkeiten kennt. Dafür kennt man allerdings das Geschwindigkeitsprofil immer genauer, je mehr man vom Rand nach innen geht. Nun wird man, schon um auch für diesen Fall die eindimensionale Schubkurve vom Kreisrohr bestätigt zu sehen, zunächst einmal die Integration für das Gebiet innerhalb einer experimentell noch gut bekannten Isotache durchführen, d. h. als Randwert für w den konstanten Wert dieser Isotache einsetzen, ferner durch Hereinnahme zweier Zeigerablesungen (Geschwindigkeiten) im Innern der Isotache die beiden noch freien Parameter im Schubverlauf festlegen und alsdann zusehen, ob und inwieweit die so berechneten Geschwindigkeiten im Innern mit den gemessenen übereinstimmen, eine Aufgabe, die uns grundsätzlich durchführbar und höchstens mit mathematischen Schwierigkeiten verknüpft erscheint. Ist diese Aufgabe gelöst und hat sich der Schubverlauf auch hier bestätigt, so gilt es, nunmehr eine Lösung im ganzen Querschnitt zu versuchen, indem man, statt dieselbe durch ihre Werte am Rande des Querschnitts festzulegen, diese hier fehlenden Angaben irgendwie durch gleichwertige Angaben aus dem Innern, die experimentell gut bekannt sind, zu ersetzen sucht. Setzen wir auch diese Aufgabe als gelöst voraus, so hieße das, daß wir die Strömung im ganzen Querschnitt, speziell also auch an seinem Rande, kennen, und es stünde nichts im Wege, mit dem Studium des Vorganges an der Wand zu beginnen. Diesem würden wir dann den (41) entsprechenden Ansatz

$$\tau = A \frac{\partial w}{\partial n} = Gw \quad (52)$$

zugrunde legen, wo also A an Stelle von μ und G an Stelle von g getreten sind. Wie bei laminaren Strömungen gilt dann: Ist der Austausch $A = 0$, so ist auch $G = 0$; jedoch können wir über ihr Verhältnis A/G nichts Genaueres mehr aussagen. Trotzdem wollen wir den Schritt wagen und in (52) durch G dividieren, wodurch wir mit $A/G = A^*$ in Analogie zu (50)

$$A^* \frac{\partial w}{\partial n} = w \quad (53)$$

erhalten mit A^* als einer *Länge*, welche sich aus (53) durch Messung von w und $\partial w / \partial n$ bestimmen ließe. Frage: Wie steht es um die Abhängigkeit von A^* (invariant verstanden), ist z. B. ähnlich wie im laminaren Falle A^* unabhängig vom Austausch, d. h. vom Wandwirbel ...? — Bemerken wir noch, daß für eine ideal glatte Wand G bekannt, nämlich $= 0$ ist. Als

eine kleine Anwendung betrachten wir die turbulente Strömung in einem Kanal mit verschiedenen rauhen Wänden: Denken wir uns dann, wie früher in Fig. 10, bei der laminaren Strömung durch die Stelle des Geschwindigkeitsmaximums eine gestrichelte und ruhend gedachte Wand gelegt, so ist diese wieder ideal glatt, wenn wir jede der Hälften für sich erzeugen; woraus noch hervorgeht, daß jede dieser Hälften die vom Kreisrohr her bekannte Schubkurve (Fig. 2) vollständig „ausschöpft“.

16. Die Zahl der Parameter und die Rolle der Reynoldsschen Zahl.

Betrachten wir noch die Zahl der in die turbulente Strömung eingehenden dimensionslosen Parameter! In den Schubverlauf gehen jetzt zwei ein (im Gegensatz zu einem Parameter ν' bei laminaren Strömungen), nämlich $\kappa' = \frac{\kappa}{U \cdot L}$ und $\lambda' = \frac{\lambda}{U/L}$. Wird die Strömung noch von einer Wand beeinflusst, so tritt die Gleitreibung $G' = \frac{G}{\rho U}$ als neuer Parameter hinzu¹⁾ (und ebenso übrigens der Koeffizient $g' = \frac{g}{\rho U}$ bei laminaren Strömungen). Das sind drei Parameter gegenüber zwei im laminaren Fall. Frage: Sind das wirklich drei Parameter, mit anderen Worten, besteht zwischen ihnen keine Bindung? Für unsere gedachten turbulenten Strömungen scheinen es wirklich deren drei zu sein: denn wir können ja, ähnlich wie früher im Falle der laminaren Strömungen, den Körper speziell ideal glatt, d. h. $G' = 0$ wählen, und haben dann entsprechend den zwei noch verbliebenen Parametern im Schubverlauf eine zweiparametrigte Schar von Strömungen. Für spezielle Klassen von Strömungen kann sich die Zahl der Parameter in ähnlicher Weise verengen. So sind z. B. die turbulenten Strömungen durch Kreisrohre bereits durch zwei Parameter, nämlich κ' und λ' , charakterisiert, d. h. durch sie die Wandgeschwindigkeit und mithin auch G' bestimmt; man rechnet leicht nach

$$G' = \frac{2\kappa'\lambda'}{1 - z\lambda'},$$

wo z eine reine Zahl und durch $1 - u_0 = z\lambda'$ gegeben ist.

Im Zusammenhang mit der zuletzt aufgeworfenen Frage steht die folgende andere: Wie kommt es, daß man auch für turbulente Strömungen

¹⁾ Vgl. für diesen Abschnitt die unter Anm. 1a), S. 304 zitierte Arbeit von E. Mohr, S. 116; in die dortige Formel (65) ist also die Gleitreibung G' noch aufzunehmen!

die Widerstandsbeiwerte c_f eines Körpers über den Parameter $\nu' (= \frac{1}{Re})$ so gut ordnen kann (eine Erscheinung, die man gern als ein Zeichen dafür gedeutet wissen wollte, daß die Navier-Stokesschen Gleichungen auch noch zur Beschreibung der turbulenten Strömungen sich geeignet erweisen möchten), einem Parameter also, der den laminaren Bestimmungsgleichungen entstammt, und den turbulenten Strömungen so ganz fremd ist¹⁾? Betrachten wir vorerst die einfachen Strömungen durch ein Kreisrohr, so können wir sagen: ν' erweist seine ordnende Kraft immer nur für dasselbe Rohr; variiert man jedoch noch die Wandbeschaffenheit, so erhält man immer neue derartige Kurven. Will man aber die durch *alle Kurven* gegebenen Punkte *auf einmal ordnen* — wie dies doch im Sinne der Bestimmungsgleichungen für die turbulenten Strömungen liegt —, so muß man zu den zwei dafür charakteristischen Parametern κ', λ' greifen, und erhält das Widerstandsgesetz in Form der einfachen Beziehung $c_f = 2\kappa' \lambda'$, die wir uns als Fläche in üblicher Weise vorstellen. Mit anderen Worten: Die ordnende Kraft von ν' beruht immer darauf, daß es sich um einen eindimensionalen Ausschnitt aus der Gesamtheit aller Strömungen handelt, welcher auch über dem Parameter ν' betrachtet, d. h. auf eine ν' -Achse bezogen werden kann, obzwar der Ausschnitt dort im allgemeinen dann eine kompliziertere Kurve ergibt. Z. B. sind für glatte Rohre die Parameter κ', λ' einer Bindung unterworfen, durch die also ein solcher eindimensionaler Ausschnitt erzeugt wird. So ungefähr mag es nun auch um die übrigen Widerstandskurven von Körpern stehen.

Kurze Zusammenfassung und Schluß.

Wir haben uns leiten lassen von einer engen Verwandtschaft zwischen laminaren und turbulenten Strömungen, und sind in diesem Sinne bestrebt gewesen, uns gedankliche Bilder von ihnen zu verschaffen, von denen wir die folgenden Züge noch einmal nennen:

1. Auf der Grundlage einer bahnbrechenden Arbeit von Kundt und Warburg haben wir versucht zu zeigen, daß man auch innerhalb der laminaren Strömungen auf ein Gleiten an der Wand nicht gut verzichten kann, und den Gleitansatz, ohne uns auf Kundt und Warburg zu stützen, als eine direkte Folge der Maxwellschen Vorstellung vom Mechanismus der inneren Reibung einfach begründet.

¹⁾ Man vergleiche hierüber: a) Th. v. Karman, Phys. ZS. 12, 1911, und ferner b) C. W. Oseen, Das Turbulenzproblem, 3. Internat. Kongr. f. Techn. Mechanik, Stockholm 1930.

2. Infolge der Reibung entstehen in einer laminaren Strömung stets Wirbel, und zwar von der Wand her.

3. Aufstellung eines mit dem Navier-Stokesschen Gleichungssystem äquivalenten Systems und Versuch einer schrittweisen Auflösung desselben.

4. Anschließend daran wird die Prandtlsche Grenzschichttheorie diskutiert und u. a. die Frage, welche Bedingung am Saum der Grenzschicht zu erfüllen ist.

5. Im Lichte des Gleitansatzes für laminare Strömungen wird auf den entsprechenden Ansatz für turbulente Strömungen hingewiesen, welcher bis heute noch aussteht.

6. Diskussion der Frage nach der Zahl der wesentlichen Parameter, welche in die turbulente Strömung eingehen.

7. Die Rolle der Reynoldsschen Zahl bei turbulenten Strömungen.

Die Aktivierung der Palladiumoberfläche mittels Glimmentladung*).

Von Raimund Ulbrich, Charlottenburg.

Mit 23 Abbildungen. (Eingegangen am 10. November 1942.)

Die Untersuchung hat bewiesen, daß die Behandlung der Metallfläche des Palladiums durch Glimmentladung mit Wasserstoff oder Argon jene sehr deutlich aktiviert. — Infolge Behandlung mit Glimmentladung ließen sich Palladiumdrähte, also *kompaktes Metall*, bei Zimmertemperatur mit molekularem Wasserstoff bei Drucken von 30 bis 130 Torr bis zur Sättigung beladen. Es wurde das Anwachsen des elektrischen Widerstandes, also unmittelbar die Beladungsgeschwindigkeit, beobachtet. Die erhaltene Zeitkurve zerfiel in drei Teile: Eine den Anfangsteil darstellende Gerade, eine den Mittelteil darstellende Gerade, welche unter einem kleineren Winkel als die erste zur t -Achse geneigt war; und eine Kurve, die sich asymptotisch an die im Abstände des höchstmöglichen Beladung entsprechenden Ordinatenwertes zur t -Achse verlaufenden Parallele anschmiegt. Die beiden Geraden entsprechen Konzentrationsbereichen, in welchen sich nach den Ergebnissen anderer Autoren feste Verbindungen zwischen Palladium und Wasserstoff bilden. Der letzte asymptotisch gebogene Kurventeil entspricht der einfachen Lösung des Gases in Metall. — Ein Elektrodensystem Pd-Rohr—Ni-Zylinder zeigte einen sehr viel größeren Polaritätseffekt als vor der Behandlung der Pd-Kathode mit Glimmentladung, welcher in der Richtung ging, daß ein verstärkter Durchgang positiver Teilchen unter der Einwirkung eines elektrischen Feldes aus einem geheizten und innen mit Wasserstoff durchströmten Röhrchen angenommen werden konnte.

Das System Palladium—Wasserstoff ist aus naheliegenden Gründen so eingehend wie kein anderes System Gas—Metall untersucht worden. Es liegt über den Gegenstand eine sehr umfangreiche und heute in ihrer Gesamtheit schwer übersehbare Literatur vor. Ein vollständiges Literaturverzeichnis über das System Palladium—Wasserstoff für die Zeit vor 1900 bringt Bose¹⁾. Für die Zeit von 1900 bis 1921 hat Mc Keehan eine nach seiner Angabe lückenlose Darstellung der veröffentlichten Arbeiten gegeben²⁾. Für die neuere Zeit haben G. Borelius und J. O. Linde³⁾, Duhm⁴⁾ in ihren Aufsätzen, und Joost⁵⁾, Smithells⁶⁾, Seith⁷⁾ und Dehlinger⁸⁾ in ihren Büchern ausführliche Literaturangaben gebracht. Eine sehr wertvolle Zusammenstellung des den Gegenstand betreffenden Schrifttums

*) D 11, gekürzt.

¹⁾ ZS. f. phys. Chem. **34**, 710, 1900. — ²⁾ Phys. Rev. (2) **21**, 339, 1923. —

³⁾ Ann. d. Phys. **84**, 747, 1927. — ⁴⁾ B. Duhm, ZS. f. Phys. **94**, 434, 1935. —

⁵⁾ W. Joost, Diffusion und chemische Reaktion in festen Stoffen. Dresden, Leipzig 1934. — ⁶⁾ C. J. Smithells, Gases and Metals. London 1937. —

⁷⁾ W. Seith, Diffusion in Metallen. Berlin 1939. — ⁸⁾ U. Dehlinger, Chemische Physik der Metalle. Berlin 1939.

bringt auch Gmelins „Handbuch der Anorganischen Chemie“¹⁾. Hier sind nämlich gleich auch die Ergebnisse der wichtigsten Arbeiten systematisch zusammengestellt.

Bei einer Übersicht der vorhandenen Arbeiten fällt es auf, daß es nur wenige gibt, welche die Beladung kompakten Pd-Metalls mit molekularem Wasserstoff bei Zimmertemperatur betreffen. Nur die sonst selten zitierte Arbeit von G. Wolf²⁾, auf welche wir noch zurückkommen werden, untersucht die Beladung des kompakten Pd-Metalls bei Zimmertemperatur, dessen Oberfläche durch eine besondere elektrolytische Behandlung „aufgelockert“ worden ist. Die meisten Untersuchungen befassen sich mit Wasserstoffaufnahme bei Temperaturen über 120°, oder, falls die Untersuchung bei Zimmertemperatur stattfindet, ist deren Gegenstand entweder elektrolytisch beladenes Metall oder Pd-Mohr, oder Pd-Schwamm. Kompaktes Metall zeigte bei Zimmertemperatur eben keine Aufnahme von Wasserstoff. Nach Smithells findet eine Absorption von molekularem Wasserstoff durch kompaktes Metall nur bei höheren Temperaturen statt. Ähnlich äußert sich McKeehan³⁾.

Bei dieser Gelegenheit sei auch an die Bemerkung von A. Sieverts erinnert: „Ein Vergleich *aller* bisher genauer untersuchten Palladiumproben kann sich nur auf 100° und höhere Temperaturen beziehen, denn unterhalb 100° sind alle Versuche an kompaktem Palladium zu wenig zahlreich und ergiebig“^{4) 5)}.

Damit Palladium bei Zimmertemperatur Wasser aufnimmt, muß eben die Oberfläche des Metalls „aktiviert“ werden. Aktivierter Metalloberfläche kann sehr wohl Wasserstoff bei Zimmertemperatur annehmen, zumal bei höheren Drucken. Über die Methoden der Aktivierung und Behandlung der von Smithells als „kapriziös“ bezeichneten Pd-Oberfläche finden sich Angaben in Gmelins „Handbuch der Anorganischen Chemie“, bei Smithells⁶⁾, bei Holt, Edgar und Firth⁷⁾, bei Wolf und in der neueren Arbeit von Firth⁸⁾. Die Aktivierung der Metalloberfläche geschah bisher zumeist durch Erhitzen, durch abwechselnde Oxydation und Reduktion, durch Erhitzen in Stickstoff und in der erwähnten Arbeit von Wolf durch elektrolytische Behandlung.

¹⁾ Gmelins Handbuch der Anorganischen Chemie, System-Nummer 2, S. 229, 1927. — ²⁾ ZS. f. phys. Chem. 87, 575, 1914. — ³⁾ L. W. McKeehan, a. a. O. — ⁴⁾ ZS. f. phys. Chem. 88, 475, 1914. — ⁵⁾ Siehe auch ähnliche Bemerkungen bei F. Krüger u. G. Gehm, Ann. d. Phys. 16, 174, 1933. — ⁶⁾ C. J. Smithells, a. a. O., S. 113ff. — ⁷⁾ ZS. f. phys. Chem. 82, 513, 1913. — ⁸⁾ Journ. Chem. Soc. 1920, S. 1117.

Andererseits ist es bekannt, daß Metallelektroden in Entladungsröhren merkliche Gasabsorption zeigen¹⁾.

Es lag nahe, eine Untersuchung darüber anzustellen, ob eine Pd-Oberfläche durch eine Glimmentladung „aktiv“ gemacht werden kann, um im günstigen Falle die Beladungsgeschwindigkeit von kompaktem Palladiummetall in molekularem Wasserstoff bei Zimmertemperatur zu verfolgen. Weiter konnte man fragen, ob vielleicht die Behandlung der Pd-Oberfläche mit Glimmentladung den nach Franzini²⁾ und Hulubey³⁾ experimentell bestätigten — von Stansfield⁴⁾ geleugneten — Austritt geladener Wasserstoffteilchen aus dem Palladium begünstigt. (Es ist für die Gesamtheit der über das Verhältnis von Gasen und Metallen handelnden Arbeiten charakteristisch, daß die Versuchsergebnisse verschiedener Autoren ziemlich oft untereinander divergieren, was die unsichere Reproduzierbarkeit der Versuche beleuchtet.)

Als Vorversuch wurde in diesem Zusammenhange der Versuch von Coehn und Juergens⁵⁾ über die Wanderung des im Pd gelösten Wasserstoffs unter der Einwirkung eines elektrischen Feldes wiederholt, einer der Versuche, welche beweisen sollen, daß zumindest ein Teil der Teilchen des im Pd gelösten Wasserstoffs ionisiert ist⁶⁾; die erhaltenen Ergebnisse waren denen von Coehn und Juergens erhaltenen analog.

Die interessanten Versuche von Güntherschulze über die Diffusion von Protonen durch Eisen bei einer Glimmentladung verdienen an dieser Stelle ebenfalls erwähnt zu werden⁷⁾.

Mit der oben skizzierten Zielsetzung wurden nun zwei Reihen von Versuchen durchgeführt, und zwar mit Pd-Draht und mit einem Pd-Röhrchen. Es zeigte sich, daß eine Behandlung mit Glimmentladung die Pd-Oberfläche tatsächlich aktiviert. Die Beladungsgeschwindigkeit eines mit Glimmentladung aktivierten Pd-Drahtes bei Zimmertemperatur, und zwar im gasförmigen Wasserstoff, ist wohl kleiner als bei elektrolytischer Beladung, aber größenordnungsmäßig ist sie mit ihr durchaus vergleichbar. Die Aktivität einer mit Glimmentladung behandelten Pd-Oberfläche äußert sich auch darin,

¹⁾ Siehe z. B. R. Seeliger, Einführung in die Physik der Gasentladungen; L. Vegard, Über die elektrische Absorption in Entladungsröhren. Christiania 1913. — ²⁾ Tito Franzini, Rendiconto Lincei 19, 1934; Nuovo Cimento 15, Nr. 2, 1938; Rendiconto Lincei 1938, S. 292. — ³⁾ P. Hulubey, Compt. rend. 199, 199, 1934. — ⁴⁾ R. G. Stansfield, Proc. Cambridge Phil. Soc. 34, 120, 1938. — ⁵⁾ A. Coehn u. H. Juergens, ZS. f. Phys. 71, 179, 1931. — ⁶⁾ Feinere Zusammenhänge sind in der Arbeit von B. Duhm, a. a. O. und bei C. Wagner u. G. Heller, Ann. d. Phys. (B) 46, 242, 1940 beleuchtet. — ⁷⁾ A. Güntherschulze, Heinz Beetz u. Hans Kleinwächter, ZS. f. Phys. 111, 657; 112, 648; 114, 82, 1939.

daß eine verstärkte Teilchenemission aus einer solchen Fläche bei Heizen und Anlegen eines elektrischen Feldes stattfindet. Eine Begünstigung des von Franzini erhaltenen Effektes, welcher in dem Austritt von Protonen aus dem mit Wasserstoff beladenen Palladium unter der Einwirkung eines starken elektrischen Feldes bestand, ist wahrscheinlich.

Versuche an einem Palladiumröhrchen.

Ein Pd-Röhrchen von 45 mm Länge, 2 mm Durchmesser, 0,1 mm Wandstärke ist an einem Ende zugeschmolzen und am anderen Ende an ein massiveres Rohr angeschweißt, welches wiederum in ein Glasrohr eingeschmolzen ist. Das Pd-Röhrchen kann durch elektrischen Strom direkt

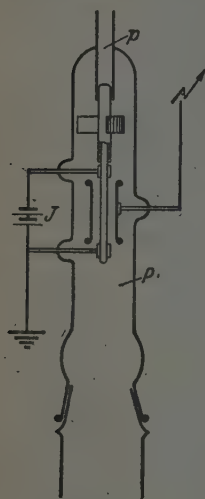


Fig. 1.

geheizt werden. Die Stromzuführung findet durch zwei Schellen statt, welche ihrerseits an im Glase eingeschmolzenen Nova-Zuleitungsstäben sitzen. Das Pd-Röhrchen ist coaxial in einem Nickelzylinder angebracht. Der Nickelzylinder ist 45 mm lang, 15 mm im Durchmesser und hat an den Wandrändern Wülste zur Erhöhung der Hochspannungsfestigkeit. Unmittelbar über der Schweißstelle zwischen dem Palladiummetall und dem Nova-Rohr war ein dreiteiliger Flügel angebracht, um die Wärmestrahlung des Rohres zu erhöhen und die Einschmelzstelle im Glase nicht allzu warm werden zu lassen (Fig. 1).

Die soeben beschriebenen Metallteile waren in einem zylindrischen Glasgefäß untergebracht, dessen unteres Ende unmittelbar durch einen Schliff 55/10 über eine Kühlfalle mit einer sehr kräftigen Diffusionspumpe (Leybold Modell E) durch kurze Glasleitungen verbunden war. Am oberen Ende des Glasgefäßes befand sich neben der mit dem Pd-Rohr verbundenen Glaszuführung eine R-E-11-Röhre, die bei den Versuchen als Ionisationsmanometer dienen sollte.

Zwischen dem Nickelzylinder und dem Pd-Rohr konnte mit Hilfe einer mit einem Ventil und einem Kondensator versehenen Hochspannungsanlage eine Spannung bis zu 40 kV hergestellt werden. Durch Umschalten des Ventilrohres wurde der Nickelzylinder je nach Bedarf als Kathode oder als Anode unter Hochspannung gesetzt, während das Pd-Röhrchen immer auf Erdpotential blieb. Das Pd-Röhrchen wurde mit einem Strom von 10 bis 15 Amp. geheizt, der von einem besonderen Transformator geliefert

wurde. Durch eine Rohrleitung wurde der Innenseite des Pd-Rohres (hier kurz Primärseite genannt) Wasserstoff zugeführt, der, sobald das Röhrchen geheizt wurde, nach der „Sekundärseite“ durchdiffundieren konnte. Der durchdiffundierende Wasserstoff wurde von einer kräftigen Diffusionspumpe abgepumpt. Die Rohrleitung von der Diffusionspumpe nach dem Versuchsgefäß hatte 55 mm im Durchmesser und führte über eine Kühlfalle mit flüssiger Luft. Die Kühlfalle bestand, um zusätzliche Widerstände beim Pumpen zu vermeiden, einfach aus einem U-förmig ebogenen Rohr, welches

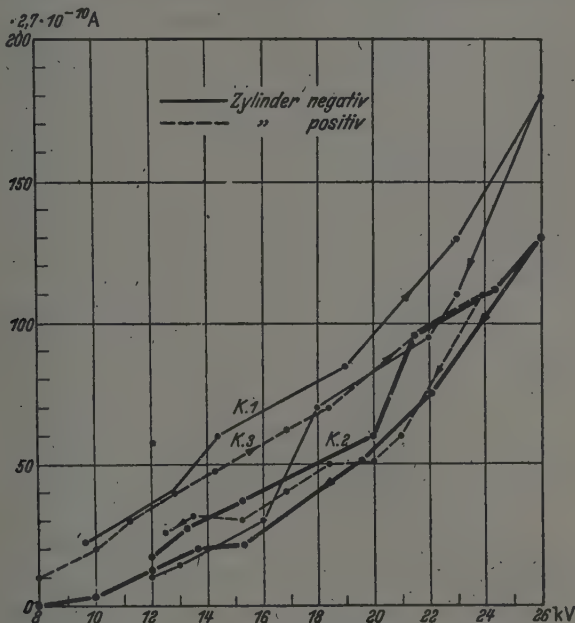


Fig. 2. Stromspannungscharakteristik des zwischen dem Elektrodensystem Pd-Röhrchen—Ni-Zylinder fließenden Stromes. Die Kurven sind vor Behandlung des Röhrchens mit Glühmentladung aufgenommen und zeigen keinen merklichen Polaritätseffekt bei $p = 0$, $P = 0$, $I = 0$.

in einem Dewar-Gefäß steckte. Es sollte der zwischen Nickelzylinder und Pd-Röhrchen als Elektroden fließende Strom gemessen werden.

Zunächst wurde sowohl die Primärseite als auch die Sekundärseite des Verbrauchsrohres mehrere Tage hindurch ausgepumpt, während das Pd-Rohr geglüht wurde.

Nachher wurden bei evakuierter Sekundär- und Primärseite bei verschiedenen Wasserstoffdrücken auf der Primärseite und einem infolge Heizung des Rohres und Wirkung der Diffusionspumpe sich entsprechend einstellenden Druck auf der Sekundärseite die Ströme zwischen dem Elek-

trodensystem Palladiumröhrchen—Nickelzylinder als Funktion der Spannung gemessen.

Im folgenden sei der Wasserstoffdruck an der Primärseite mit p , der Wasserstoffdruck an der Sekundärseite mit P , die Heizstromstärke mit I

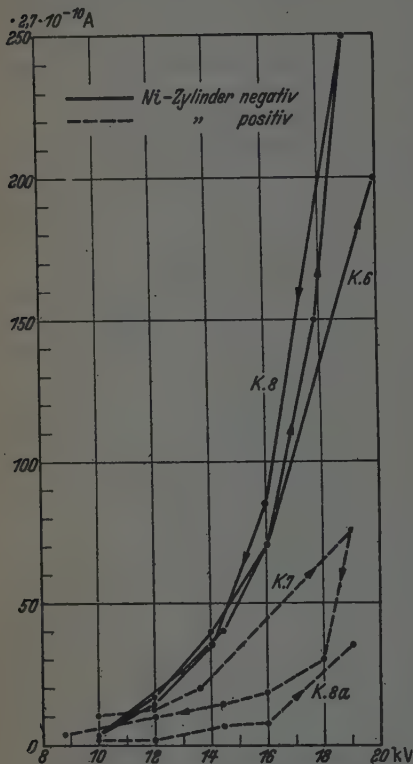


Fig. 3. Die Kurven sind vor der Behandlung des Pd-Rohres mit Glimmentladung aufgenommen und zeigen wahrnehmbaren Polaritätseffekt. Bedingungen: $p = 240$ Torr, $P = 8 \cdot 10^{-4}$ Torr, $I = 10$ Amp.

bezeichnet. Unter $p = 0$ ist zu verstehen, daß dieser Wert auf dem gewöhnlichen U-Manometer abgelesen wurde. $P = 0$ bedeutet, daß das Galvanometer in der Schaltung des Ionisationsmanometers (Gitterstrom) keinen Ausschlag zeigte, daß also der Druck kleiner als 10^{-6} Torr war.

Anfangs wurden bei evakuierter Primär- und Sekundärseite und ohne Heizung des Pd-Rohres, also unter den Bedingungen $p = 0$, $P = 0$, $I = 0$ die Stromspannungscharakteristiken aufgenommen. Dabei wurden die Kurven 1, 2, 3 (Fig. 2) erhalten. Diese Kurven zeigen keinen ausgesprochenen Polaritätseffekt.

Nun wurde nach der Primärseite Wasserstoff direkt aus dem Elektrolysiergefäß eingelassen und der Druck auf Werte von 225 bis 240 Torr eingestellt. Das Pd-Röhrchen wurde geheizt ($I = 10$ Amp.). Bei laufender Diffusionspumpe stellte sich auf der Sekundärseite ein Druck von

$8 \cdot 10^{-4}$ Torr ein. Die Stromspannungscharakteristiken zeigen jetzt bei verschiedenen Polungen des Elektrodensystems einen wahrnehmbaren Polaritätseffekt. Bei positiver Polung des Pd-Röhrchens ist der Strom merklich größer. (Kurven 6, 7, 8, Fig. 3).

Nun wurde das Pd-Röhrchen einer Glimmentladung in H_2 unterworfen, wobei es Kathode war. Der Druck wurde so eingestellt, daß nach Möglichkeit die ganze Entladung am Röhrchen saß. Die Glimmentladung wurde

eine Stunde gebrannt. Nach einer solchen Behandlung des Pd-Röhrchens zeigten die Stromspannungscharakteristiken bei $p = 220$ Torr und $P = 8 \cdot 10^{-4}$ Torr und $I = 10$ Amp. besonders großen Polaritätseffekt.

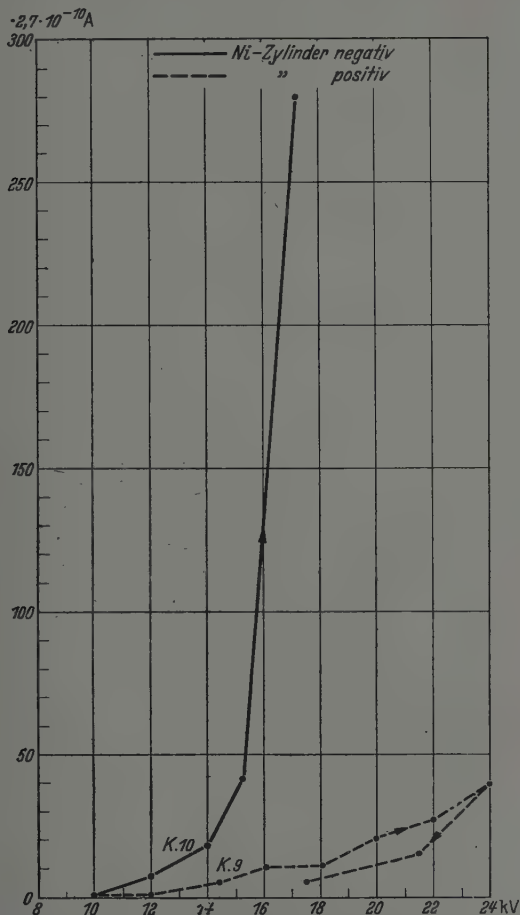


Fig. 4. Die Kurven sind nach Behandlung des Pd-Röhrchens mit Glimmentladung aufgenommen. Bedingungen: $p = 240$ Torr, $P = 8 \cdot 10^{-4}$ Torr, $I = 10$ Amp. Sehr deutlicher Polaritätseffekt.

Die Kurve, bei deren Aufnahme der Nickelzylinder negativ gepolt war, zeigt einen sehr großen Anstieg der Stromstärke. Die der entgegengesetzten Polung des Elektroden systems entsprechende Kurve zeigt ein Absinken der Stromstärke sogar im Vergleich mit den Kurven 1, 2, 3 (Kurven 9 und 11), (Fig. 4). Dieser Effekt war an dem Röhrchen beliebig oft reproduzierbar.

Die Kurven, welche unter den Bedingungen $p = 0$, $P = 0$ und $I = 0$ nach der Behandlung des Pd-Röhrchens mit Glimmentladung aufgenommen

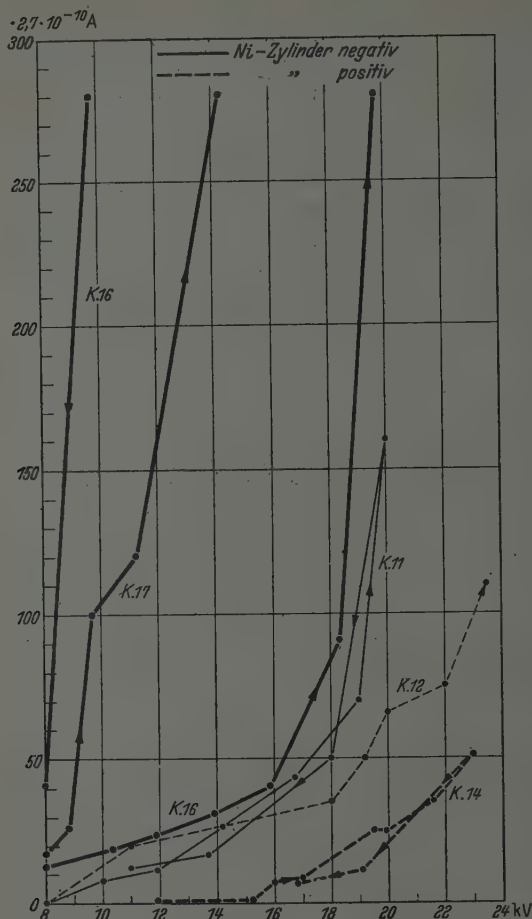


Fig. 5. Weitere Kurven die nach Behandlung des Röhrchens mit Glimmentladung aufgenommen wurden.

Bedingungen für Kurven 11 und 12: $p = 0$, $P = 0$, $I = 0$.

Bedingungen für Kurven 14, 16 und 17: $p = 227 \text{ Torr}$, $P = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Torr}$, $I = 10 \text{ Amp.}$

worden waren, unterschieden sich nicht wesentlich von den Kurven 1, 2, 3 (Kurven 11, 12, Fig. 5).

Eine erneute Einführung des Wasserstoffs an der Primärseite und leichtes Heizen des Röhrchens ergibt wieder Kurven des Typus mit großem Polaritätseffekt (Kurven 14, 16, 17, Fig. 4).

Es ist auffallend, daß, nachdem im Versuchsgefäß ein elektrischer Durchschlag stattgefunden hat, die Polaritäterscheinung nicht mehr auftrat. Das Röhrchen verhielt sich dann wieder so, als ob es nicht mit Glimmentladung behandelt worden wäre (Kurven 24 und 25, Fig. 6).

Nach erneuter Anwendung der Glimmentladung zeigte das Rohr wieder bei Heizung und Wasserstoffdurchfluß großen Polaritätseffekt (Fig. 7).

Alle aufgenommenen Kurven zeigen eine Hysteresis. Die Dauer für die Aufnahme einer Stromspannungscharakteristik, d. h. vom Beginn der

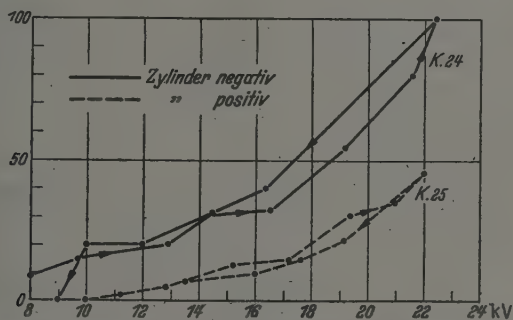


Fig. 6. Stromspannungscharakteristik des zwischen dem Elektrodensystem Ni-Zylinder—Pd-Röhrchen fließenden Stromes. Die Kurve wurde aufgenommen, nachdem ein Durchschlag stattgefunden hat bei den Bedingungen: $p = 240$ Torr, $P = 8 \cdot 10^{-4}$ Torr, $I = 10$ Amp. Es ist aus dem Verlauf ersichtlich, daß die Pd-Oberfläche die ihr durch die Behandlung mit Glimmentladung verliehenen Eigenschaften verloren hat. Der sehr stark ausgebildete Polaritätseffekt ist zurückgegangen.

Messung bis zur Rückkehr auf den niedrigsten Spannungswert betrug etwa 25 bis 30 Minuten. Bei konstanter Spannung sank die Stromstärke im Verlaufe der Zeit bei allen Kombinationen der Versuchsbedingungen mit Ausnahme der Messung nach Behandlung des Röhrchens mit Glimmentladung — bei Heizung, Wasserstoffdurchfluß und negativer Polung der Gegenelektrode. In diesem Falle änderte auch die Hysteresis ihren Drehsinn.

Der Vergleich der dargestellten Kurven ergibt, daß infolge der Behandlung mit Glimmentladung eine Palladiumoberfläche neue Eigenschaften annimmt. Es scheint sich eine größere Durchlässigkeit oder auch Abgabefähigkeit für bestimmte Teilchenarten herauszuprägen. Eine ähnliche Beobachtung hat bereits Sieverts¹⁾ gemacht. Allerdings will Sieverts die von ihm beobachtete Erscheinung lediglich auf die Erwärmung der Pd-Elektrode infolge Glimmentladung zurückführen. Die hier dargestellten Kurven legen aber den Schluß nahe, daß die Durchlässigkeit des Pd für Wasserstoff

¹⁾ ZS. f. phys. Chem. 88, 104, 1914, Fußnote 3.

infolge Behandlung mit Glimmentladung einen anderen Mechanismus haben muß. In der hier besprochenen Elektrodenanordnung wird dank

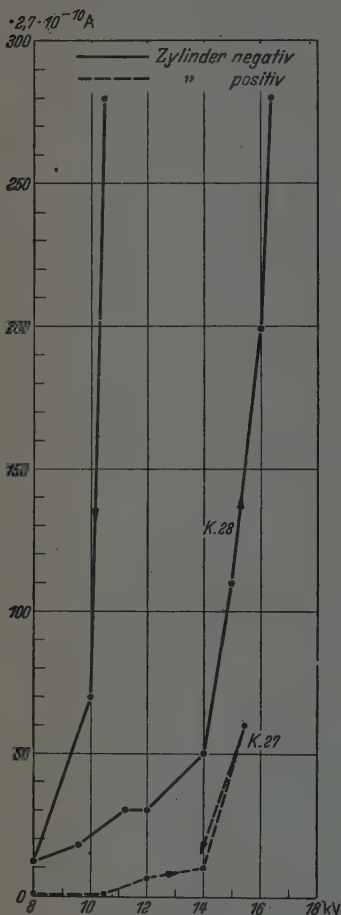


Fig. 7. Stromspannungscharakteristik des Elektroden systems Pd-Röhrchen—Ni-Zylinder. Die Kurven sind nach erneuter Behandlung des Röhrchens mit Glimmentladung aufgenommen worden und zeigen unter den Bedingungen $p = 240$ Torr, $P = 6 \cdot 10^{-4}$ Torr, $I = 10$ Amp. erneute Wiederkehr des Polaritätseffektes.

der Vorbehandlung der Pd-Fläche mit Glimmentladung bei kathodischer Polung des Nickelzylinders das Zustandekommen eines weit stärkeren Stromes als unter denselben Bedingungen vor Behandlung des Pd-Röhrchens mit Glimmentladung beobachtet. Dabei ist zu beachten, daß vor und nach der Glimmentladung das Pd-Röhrchen mit Rücksicht auf denselben Heizstrom von 10 Amp. auch thermisch in demselben Zustande verbleibt.

Die infolge Behandlung mit Glimmentladung entstandene Oberflächenbeschaffenheit des Palladiums, welche sich durch die oben beschriebenen Stromspannungsdiagramme charakterisieren ließ, zeigte im Laufe von drei Tagen keine merkliche Änderung. Allerdings ergaben orientierende Versuche, daß im Laufe etwa zweier Monate sich die durch Behandlung mit Glimmentladung erworbene Beschaffenheit der Oberfläche langsam verwischte.

Die Ergebnisse dieser Messungen lassen den Austritt von Protonen unter der Einwirkung eines elektrischen Feldes aus dem mit Wasserstoff beladenen und geheizten Palladiumröhrchen wahrscheinlich erscheinen, obwohl sie noch kein bündiger Beweis dafür sind. Der Polaritätseffekt geht jedenfalls in der von einer solchen Annahme geforderten Richtung. Durch

Behandlung der Palladiumoberfläche mit Glimmentladung wird der Effekt ganz wesentlich verstärkt. Die Form der Stromspannungscharakteristiken läßt kaum einen Zweifel darüber übrig, daß es sich bei der Erscheinung

um eine Entladungsform handelt. Allerdings wird wohl bei deren Entstehung verstärkter Protonenaustritt aus dem Metall eine Rolle spielen.

Franzini¹⁾ berichtet auf Grund von Stromspannungsmessungen und bolometrischen Auswertungen, daß unter der Einwirkung eines elektrischen Feldes aus einem geheizten und mit Wasserstoff durchflossenen Palladiumröhrchen ein beachtlicher Protonenauftritt stattfindet. Die in dieser Arbeit erhaltenen Resultate widersprechen nicht seinen Messungen und legen die Erwartung nahe, daß die Vorbehandlung der Metalloberfläche mit Glimmentladung den von Franzini beobachteten Vorgang begünstigen und womöglich die Protonenausbeute noch erhöhen würde.

Versuche mit Pd-Draht.

Für die Messung des Widerstandes mit Wasserstoff beladener Pd-Drähte wurde eine in Fig. 8 dargestellte Versuchsröhre benutzt. Ein etwa 18 cm langer Pd-Faden von 0,1 mm Durchmesser war koaxial mit einem Nickelzylinder an einer Wolframspiralfeder aufgehängt. An den Kanten der Zylinderwand waren zur Erhöhung der Hochspannungsfestigkeit der Anordnung Wülste angebracht.

Der für die Versuche benötigte Wasserstoff wurde durch Elektrolyse in Kalilauge entwickelt und durch je einen elektrisch heizbaren Pd-Filter in die einzelnen Verzweigungen der Versuchsanordnung geleitet oder auch in einem Vorratsballon gesammelt.

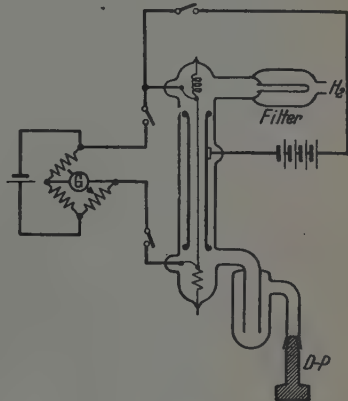


Fig. 8.

Es wurde bei den verschieden behandelten Pd-Drähten der elektrische Widerstand gemessen, um daraus auf die Konzentration des im Palladium gelösten Wasserstoffs zu schließen. Es wurde zwar vorausgesetzt, daß die Erhöhung des elektrischen Widerstandes eine lineare Funktion der im Pd aufgenommenen Wasserstoffmenge ist; weil aber die Beladung des Pd-Drahtes nicht, wie es in den meisten anderen Arbeiten geschah, elektrolytisch durchgeführt wurde, sei hier auch nicht genau im Sinne der oft benutzten Fischer'schen Tabellen²⁾ auf den Wasserstoffgehalt des Pd geschlossen. Für den

¹⁾ Nuovo Cimento XV, Nr. 2, Febr. 1938; Rendiconti Lincei 1938, S. 292.

— ²⁾ F. Fischer, Ann. d. Phys. 20, 503, 1906.

hier behandelten Fall werden schon eher die von Wolf¹⁾ gemachten Angaben Geltung haben, da die Versuchsbedingungen dieses Autors — nämlich Auflockerung der Metalloberfläche durch elektrolytische Behandlung, dann aber Beladung durch gasförmigen Wasserstoff — den in dieser Arbeit angewandten Methoden verwandter waren. Allerdings mußte Wolf, um volle Beladung seiner Pd-Drähte zu erzielen, den Gasdruck auf etwa $11\frac{1}{2}$ Atm. erhöhen, während in dieser Arbeit volle Beladung unter wesentlich niedrigeren Gasdrücken bei Zimmertemperatur erzielt wurde. Es wurde volle Beladung schon bei 32 Torr H_2 -Druck erreicht. Eine genaue Festlegung der Abhängigkeit zwischen dem Widerstande eines nach der hier angewandten Methode beladenen Pd-Drahtes und der Menge des aufgenommenen Wasserstoffs müßte noch Gegenstand einer besonderen Untersuchung sein.

Die Drähte wurden nun alle vor den Versuchen elektrisch eine Stunde auf Rotglut geglüht, um sie zu entgasen. Alle Versuche fanden bei Zimmertemperatur von 20° statt. Wurde nun ein geglühter oder auch nicht geglühter Pd-Draht bei Zimmertemperatur stunden- oder tagelang in einer Wasserstoffatmosphäre gelassen, so ließ sich in Übereinstimmung mit den Ergebnissen auch anderer Autoren am Drahte keine merkliche Erhöhung des Widerstandes beobachten²⁾.

Wurde nun ein Pd-Draht als Kathode gepolt und in einer Wasserstoffatmosphäre einer Glimmentladung ausgesetzt, so ließ sich nach einer Brenndauer von etwa 30 Minuten ein Ansteigen seines elektrischen Widerstandes feststellen. Der Widerstand stieg auch nach Aufhören der Glimmentladung weiter. Die Erscheinung trat am deutlichsten hervor, wenn das negative Glimmlicht ganz am Pd-Draht gesessen hatte. Dies war bei einem Druck von 7 bis 11 Torr der Fall.

Wenn eine Glimmentladung eine Stunde lang gebrannt hatte, und nach der Glimmentladung der Wasserstoffdruck in dem Versuchsgefäß auf Werte von $p = 20$ bis $p = 200$ Torr erhöht worden war, so stieg ganz unabhängig von diesem Druck der elektrische Widerstand des Pd-Drahtes auf 185% oder einiges mehr seines Anfangswertes an, was im Sinne der Wolfschen Tabellen als größtmögliche Beladung mit Wasserstoff gedeutet werden könnte. Die Geschwindigkeit des Widerstandsanstieges wurde nun beobachtet. Die Abhängigkeit des Verhältnisses des Widerstandes nach der Beladung zu dem des unbeladenen Drahtes, also $W_{Pd}/P_{Pd+H} = Q$

¹⁾ G. Wolf, ZS. f. phys. Chem. **87**, 575, 1914. — ²⁾ Siehe z. B. F. Fischer, a. a. O., S. 505 und 513; C. J. Smithells, Gases and Metals, S. 195. London 1937.

von der Zeit ist nun in den Kurven zu den Versuchsröhren 22, 26 (Fig. 9, 10) dargestellt. Als $t = t_0$ wurde der Augenblick angenommen, in

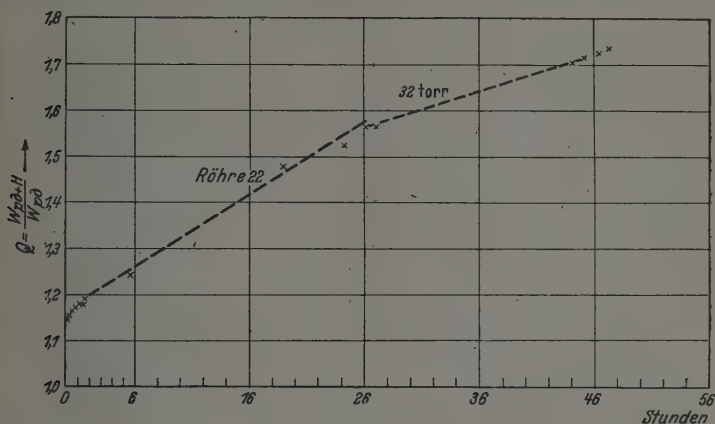


Fig. 9.

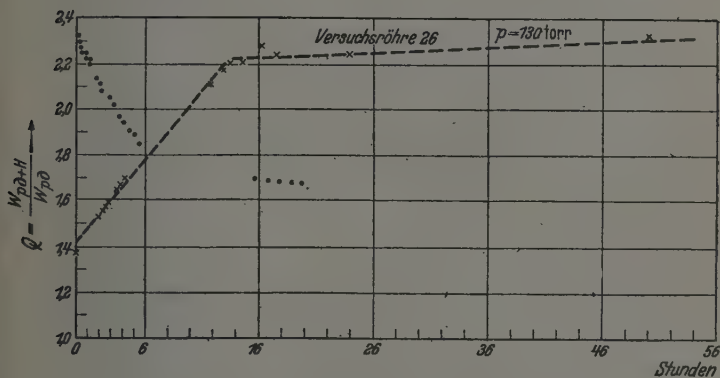


Fig. 10.

welchem nach beendeter Glimmentladung der nachher konstantgehaltene Wasserstoffdruck hergestellt wurde.

Um festzustellen, ob die Wirkung der Glimmentladung auf die Pd-Oberfläche etwa mit Wasserstoff als Füllgas der Entladungsröhre verbunden war, wurde Glimmentladung mit dem Pd-Draht als Anode und Argon¹⁾ als Füllgas vorgenommen. Unmittelbar nach Aufhören der Glimmentladung

¹⁾ Argon-Gas wurde freundlicherweise von der Lindes Eismaschinen A.-G. unentgeltlich zur Verfügung gestellt.

zeigte der Pd-Draht in diesem Falle eine unwesentliche Erhöhung des Widerstandes.

Nachdem aber das Edelgas nach der Glimmentladung ausgepumpt und die Versuchsröhre mit H_2 gefüllt worden war, begann der Anstieg des Widerstandes. Die Zeitkurve für den Verhältniswert der Widerstände vor und nach der Beladung mit Wasserstoff hatte ähnlichen Charakter wie die bei der Behandlung eines Pd-Drahtes mit Glimmentladung in Wasserstoff, mit dem Unterschiede, daß die der Glimmentladung in Argon entsprechende Kurve beim Nullpunkt ansetzt, während die andere mit einem höheren Ordinatenwert beginnt, weil offenbar bereits während der Glimmentladung

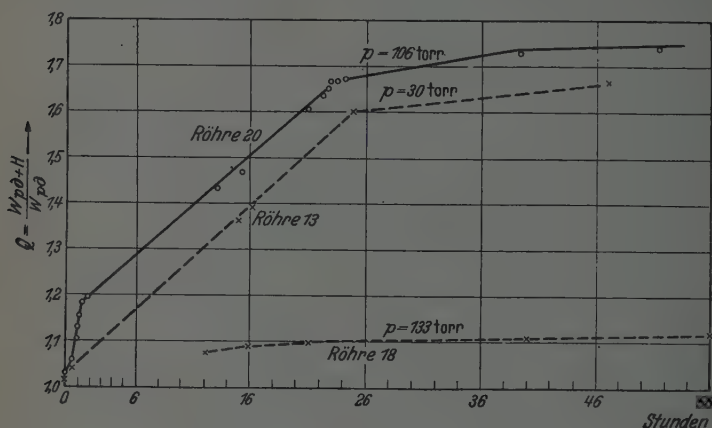


Fig. 11.

eine Absorption von Wasserstoff stattfindet. Die hier beschriebenen Verhältnisse sind in den Kurven festgehalten, die den Versuchsröhren 18, 20 und 25 entsprechen (Fig. 11, 12).

Ein auf die oben beschriebene Weise beladener Pd-Draht verliert einen Teil seiner Wasserstoffbeladung (wenn man als Maß dafür das Absinken des Widerstandes ansieht), sobald der Druck des ihn umgebenden Wasserstoffs auf möglichst tiefe Werte gesenkt wird, oder wenn das Versuchsgefäß dauernd an eine Diffusionspumpe angeschlossen bleibt. Als Zeitkurve für das Absinken des Widerstandes sei das dem Versuchsgefäß 26, Fig. 10 entsprechenden Diagramm angeführt. Bei einem elektrolytisch beladenen Pd-Draht läßt sich dagegen durch bloßes Reduzieren des Druckes des ihn umgebenden Gases der elektrische Widerstand nur ganz minimal herabsetzen. In Übereinstimmung mit den Angaben anderer Autoren ließ sich

elektrolytisch in Pd eingeführter Wasserstoff nur durch Erhitzen austreiben¹⁾. Wurde aber ein Pd-Draht als Kathode mit Glimmentladung behandelt und nachher elektrolytisch mit Wasserstoff beladen, so ließ sich durch Herstellen eines den Draht umgebenden Vakuums der Widerstand des Drahtes erniedrigen.

Bei einem einmalig mit Glimmentladung behandelten Pd-Draht verlor sich im allgemeinen allmählich die Wirkung der Glimmentladung nach mehrmaligem Beladen mit molekularem Wasserstoff. Die Absorption fand dann immer langsamer statt, der Widerstand stieg auch nicht auf den Höchstwert, der bei der ersten Beladung erreicht worden war, und das Evakuieren des

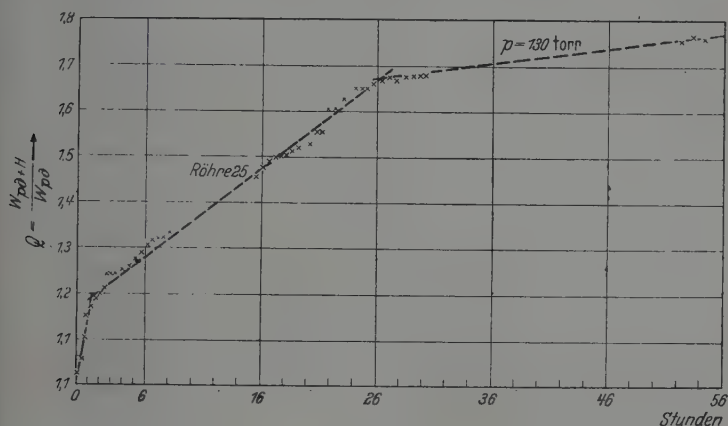


Fig. 12.

Versuchsgefäßes führte zu einer immer geringeren Wasserstoffabgabe. Die Zeitkurven (Wasserstoffaufnahme und -abgabe), welche für die erste Beladung aus mehr oder weniger scharf geknickten oder gebogenen Geradenabschnitten bestanden haben, verloren allmählich diesen Charakter. In ihren Einzelheiten waren aber die Vorgänge nach der zweiten Beladung schwer reproduzierbar, und deshalb sei hier zunächst auf ihre weitere Beschreibung verzichtet. Auf Fig. 13 entspricht Kurve 1 der Aufnahme von Wasserstoff durch den Versuchsdraht in Röhre 26. Die Aufnahme fand durch den Draht zum zweiten Male nach einmaliger Behandlung mit Glimmentladung statt. Die Kurve 2 entspricht der Abgabe des zum zweiten Male aufgenommenen Wasserstoffs. Beide Kurven sind im Vergleich

¹⁾ Siehe z. B. J. O. Linde u. G. Borelius, Ann. d. Phys. **84**, 765, 1927.
Zeitschrift für Physik. Bd. 121.

mit den entsprechenden Kurven für erstmalige Aufnahme und Abgabe stark verändert (vgl. Fig. 10).

Es hat den Anschein, daß die Glimmentladung, um die die Wasserstoffaufnahme und -abgabe begünstigende Wirkung zu erreichen, welche zur vollständigen Beladung des Drahtes führt, sich durch eine bestimmte Schicht des Metalls hindurchgefressen haben muß. Wenn nämlich die Glimmentladung nicht lange hindurch eingewirkt hat, so findet entweder überhaupt kein oder nur ein sehr langsames Ansteigen des Widerstandes nach einem Belassen des Drahtes in einer Wasserstoffatmosphäre statt.

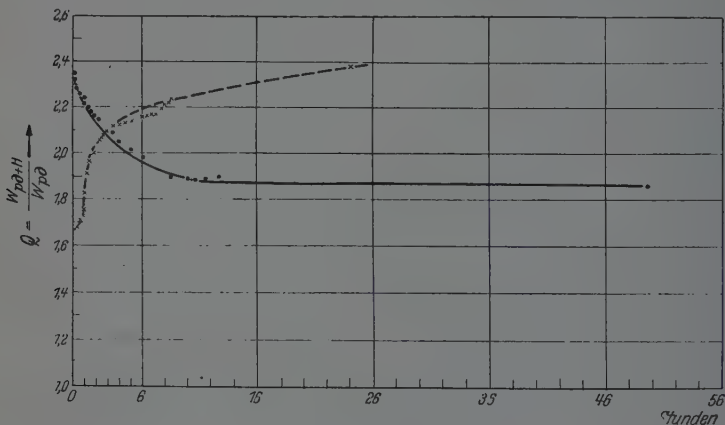


Fig. 13.

Wird aber die Glimmentladung dann noch weiter wiederholt, so tritt schließlich nach Einführen von Wasserstoff in das Versuchsgefäß der oben geschilderte Anstieg des elektrischen Widerstandes ein. Es ist nicht gelungen, einen eindeutig reproduzierbaren Mindestwert für die Zeitdauer, in welcher sich die Wirkung der Glimmentladung einstellt, zu fixieren. Bei einer Stromstärke der Glimmentladung von 12,5 mA lagen die Werte für eine bereits wirksame Zeitdauer zwischen 25 und 50 Minuten. Der Druck des den Pd-Draht nach der Glimmentladung umgebenden Gases spielt eine geringere Rolle, wenn er nur höher als 20 Torr liegt. Wenn die Einwirkung der Glimmentladung nicht lange genug gedauert hat, so steigt der Widerstand auch bei höherem Wasserstoffdruck nachher nur langsam und um einen kleineren Betrag an, während der Widerstand eines länger mit Glimmentladung behandelten Drahtes auch bei geringerem Druck verhältnismäßig rasch auf den Höchstwert steigt.

Versuchsröhre 20.

Der frisch geglühte Draht hatte einen Widerstand von 3,07 Ohm.

Nach 45 Minuten Glimmentladung in Argon wurde am

24. 10.	13,00 Uhr	$W = 3,20$ Ohm	gemessen	} Wasserstoffdruck 70 Torr.
	20,00	„ $W = 3,10$	„ „	
25. 10.	10,00	„ $W = 3,17$	„ „	
	11,30	„ $W = 3,17$	„ „	
	19,00	„	neue Glimmentladung in Argon begonnen,	
	19,30	„	Glimmentladung aufgehört,	
	20,00	„	Wasserstoff auf 120 Torr eingelassen,	
	20,00	„	$W = 3,17$ Ohm,	
	20,20	„	$W = 3,27$ „	
	20,45	„	$W = 3,40$ „	
26. 10.	20,00	„	$W = 5,17$ „	

Die erste Behandlung mit Glimmentladung hatte nicht genügt, um den Versuchsdraht aktiv zu machen. Die zweite Behandlung erreichte die Aktivierung.

Ferner sei die der Versuchsröhre 18 entsprechende Kurve mit anderen Kurven verglichen, welche bei niedrigerem Drucke aufgenommen wurden (Fig. 11).

Das Ansteigen des Widerstandes bei Zimmertemperatur auf den Höchstwert nach einer Aktivierung der Pd-Oberfläche mit Glimmentladung — unabhängig davon, wie hoch der Druck des den Draht umgebenden Wasserstoffgases war (Druckbereich von 20 bis 200 Torr) — erklärt sich leicht aus der Form der Isothermen für das Gleichgewicht zwischen gelöster und ungelöster Phase. Nach Smithells zerfällt eine solche Isotherme in drei Teile:

I. Bei tiefen Drucken findet eine Wasserstoffabsorption proportional zu p statt;

II. bei einem bestimmten Druck (in Abhängigkeit von der Temperatur) findet eine beträchtliche Absorption bei praktisch konstantem Druck statt;

III. die Absorption steigt bei höheren Drucken wieder mit dem Druck.

Sieverts hat in einer seiner älteren Veröffentlichungen¹⁾ bereits festgestellt, daß „molekularer“ Wasserstoff bei derselben Konzentration der Lösung eine größere Widerstandserhöhung im Palladium hervorruft als „kathodischer“ Wasserstoff. In Übereinstimmung mit diesen Resultaten sind auch in dieser Arbeit höhere Endwerte für das Widerstandsverhältnis $Q = W_{p \rightarrow 4} / W_{p \rightarrow 2}$ erhalten worden als der von Fischer²⁾ angegebene Höchstwert von 1,69.

¹⁾ Intern. ZS. f. Metallogr. III, S. 52, 1913. — ²⁾ F. Fischer, a. a. O.

Jede der erhaltenen Zeitkurven für die Widerstandserhöhung des Palladiumdrahtes zerfällt in drei Teile: einen geraden Anfangsteil, welcher bei Glimmentladung in Argon, etwa vom Nullpunkt bis 1,2 des Ordinatenwertes reicht, dann eine den Mittelteil darstellende Gerade, welche mit der vorigen einen Winkel bildet und etwa bis zum Werte 1,6 der Ordinate ansteigt. Der dritte Teil ist eine Kurve, welche sich asymptotisch

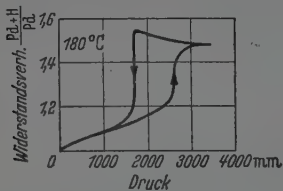


Fig. 14. Widerstandsische Isotherme für Wasserstoff-Palladium zeigt eine Hysteresis.

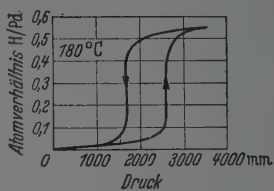


Fig. 15. Absorptionsische Isotherme für Wasserstoff-Palladium zeigt eine Hysteresis.

an die im Ordinatenabstand der Höchstbeladung zur t -Achse gelegte Parallele anschmiegt. Das Zerfallen der Zeitkurve in drei Teile verschiedenen Charakters steht jedenfalls im Zusammenhang mit dem sonst festgestellten

Phasenwechsel im Palladium mit fortschreitender Konzentration des gelösten Wasserstoffs im Metall.

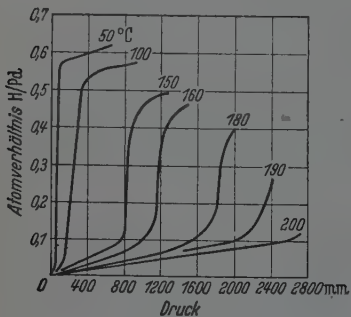


Fig. 16. Isothermen für Wasserstoff-Palladium¹⁾.

Vor einer weiteren Betrachtung der erhaltenen Zeitkurven sei hier aber zunächst auf einige Zusammenhänge in dem Verhalten des Wasserstoffs gegenüber Metallen hingewiesen.

In ihrem Verhalten gegenüber dem Wasserstoff zerfallen die Metalle in zwei Gruppen. In einem der ersten Gruppe zugehörigen Metall bildet der Wasserstoff eine „einfache Lösung“ (Smithells). Das vom Metall aufgenommene Gas wird dissoziiert, und seine Atome sind in dem Metallgitter eingelagert. Da dieser Typus der Lösung ein endothermer Prozeß ist, steigt bei diesen Metallen im Phasengleichgewicht bei konstantem Druck die Konzentration des gelösten Wasserstoffs mit wachsender Temperatur. Zwischen Löslichkeit und Temperatur besteht die Beziehung

$$S = c \cdot e^{\frac{-E_s}{2kT}};$$

¹⁾ Die Diagramme sind dem Buche Smithells, Gases and Metals, entnommen. — ²⁾ G. Borelius, Ann. d. Phys. **83**, 121, 1927.

wobei c eine Konstante und E_s die Lösungswärme bedeutet. Die Konzentration des im Metall gelösten Wasserstoffs ist proportional zur Quadratwurzel aus dem Druck, woraus nach einer einfachen Folgerung aus dem Massenwirkungsgesetz geschlossen wird, daß das Gas im Metall sich im atomaren Zustande befindet. Zu dieser Metallgruppe gehören Aluminium, Platin, Kupfer, Eisen, Nickel, Silber und Kobalt.

Zur zweiten Gruppe gehören solche Metalle, welche mit Wasserstoff H_2 dride bilden. Charakteristisch für diese Gruppe ist die hohe Absorptionsfähigkeit für Wasserstoff; das Verhältnis der Atomzahlen zueinander folgt stöchiometrischer Gesetzmäßigkeit und kann den Wert 1:1 erreichen. Die Konzentration des gelösten Wasserstoffs im Phasengleichgewicht bei konstantem Druck *sinkt* mit steigender Temperatur. Das Gitter des Metalls wird bei der Wasserstoffaufnahme beeinflusst, die elektrische Leitfähigkeit sinkt mit steigender Wasserstoffkonzentration. Alle Anzeichen sprechen dafür, daß ein neues Gitter gebildet wird. Der klassische Vertreter der soeben charakterisierten Metallgruppe ist Tantal. Neben diesem gehören Vanadium, Thorium, Titan, Zirkonium und auch die seltenen Erden dieser Gruppe an.

Palladium stellt ein Mittelglied zwischen beiden Gruppen dar. Während der Wasserstoffaufnahme wird wie bei den Metallen der zweiten Gruppe ein neues Gitter gebildet, und in diesem findet die für die Metalle der ersten Gruppe charakteristische einfache Lösung des Gases statt. Das neu gebildete Gitter hat eine größere Gitterkonstante, seine Struktur ist aber gegenüber der des unbeladenen Metalls nicht geändert. Über die Zusammensetzung des neu gebildeten Hydrids finden sich bei den einzelnen Forschern voneinander abweichende Auffassungen. Die Situation wird kompliziert durch das Nebeneinanderbestehen verschiedener Lösungsphasen¹⁾.

Aus einer Synthese der Forschungsergebnisse verschiedener Autoren ergibt sich, daß im Anfang bei noch geringer Lösungskonzentration eine einfache Lösung des Wasserstoffs im Palladium stattfindet; hier, und zwar nur hier, ist auch die Konzentration des gelösten Gases der Wurzel aus dem Druck des umgebenden Gases proportional. Von einem Konzentrationswert c_0 an beginnt die Bildung einer festen Verbindung zwischen Wasserstoff und Palladium — es entsteht die sogenannte wasserstoffarme Phase (sie sei hier als *A*-Phase bezeichnet); von einem Konzentrationswert c_1 an wird neben dieser eine wasserstoffreiche Phase — hier *B*-Phase genannt — gebildet, bis eine bestimmte Konzentration c_2 erreicht ist. Die *B*-Phase

¹⁾ Näheres darüber u. a. bei Smithells, a. a. O., S. 159 ff.; J. C. Linde u. G. Borelius, Ann. d. Phys. **84**, 747, 1927; F. Krüger u. G. Gehm, ebenda **16**, 174, 1933.

bildet sich auch auf Kosten der *A*-Phase, denn bei der Konzentration c_2 läßt sich die *A*-Phase röntgenographisch nicht mehr nachweisen. Nach Krüger und Gehm ist bei einer dem Atomverhältnis $H/Pd = 0,77$ entsprechenden Konzentration c_2 die Bildung dieser Phase beendet. Nach Duhm ist die Bildung der Phase bei einer Wasserstoffkonzentration, welche 800 Volumenteilen des Metalls entspricht, beendet. In dem Konzentrationsbereich c_1, c_2 existieren beide Phasen; beide zeigen eine Erweiterung des Metallgitters: die wasserstoffreiche Phase in höherem Maße als die wasserstoffarme. Für Konzentrationswerte, die höher sind als c_2 , wird der Wasserstoff wieder wie in dem Gebiet $[0, c_0]$ in einfacher Lösung aufgenommen. Dabei findet eine Weitung des Gitters statt, die der Wasserstoffkonzentration direkt proportional ist. c_0 entspricht einem Atomverhältnis $H/Pd = 0,025$. Über die Werte c_1 und c_2 lassen sich auf Grund der vorhandenen Literatur keine präzisen und einheitlichen Angaben machen.

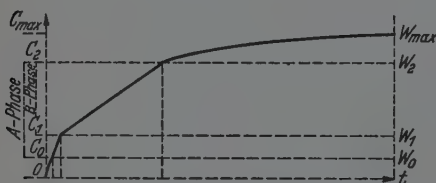


Fig. 17. Schematische Darstellung der Abhängigkeit der Wasserstoffaufnahme von der Zeit und Anteil der Lösungsphasen.

Smithells gibt für c_1 , im Atomverhältnis ausgedrückt, den Wert 0,2 an¹⁾. Nach Krüger und Gehm müßte er zwischen 0,08 und 0,1 liegen²⁾. Der Wert c_2 müßte nach Duhm bei 0,64 liegen.

Der Typus von Zeitkurven für die Widerstandserhöhung

des Palladiums durch Beladung mit molekularem Wasserstoff, wie sie in dieser Arbeit gefunden wurden, ist schematisch in Fig. 17 dargestellt.

Als Ordinaten sind sowohl die Widerstandsverhältnisse als auch die Konzentrationswerte, wie sie etwa den Wolfischen Tabellen entsprechen würden, eingetragen. Die charakteristischen Ordinaten sind demnach c_0, c_1, c_2 bzw. w_0, w_1, w_2 . Bei den meisten erhaltenen Kurven waren die eingetragenen charakteristischen Werte zwar nicht präzis reproduzierbar, aber um diese herum waren die charakteristischen Punkte der experimentell wirklich erhaltenen Kurven gehäuft. Auf diesem Diagramm entspricht der Wert c_2 dem in der oben ausgeführten Darstellung ebenso benannten Konzentrationswert, bei welchem die Bildung der *B*-Phase beendet ist ($w_2 = 1,6$). Der Wert c_1 entspricht dem Konzentrationswert, für welchen der Beginn der wasserstoffreichen Phase anzusetzen ist ($w_1 = 1,2$; Atomverhältnis 0,2).

¹⁾ C. J. Smithells, a. a. O.; allerdings ließen sich für diesen Wert in der Originalliteratur vom Verfasser dieser Arbeit keine Belege finden. —

²⁾ F. Krüger u. G. Gehm, a. a. O.

Der Wert c_0 konnte in den angestellten Versuchsbedingungen nicht mehr eindeutig erfaßt werden.

Aus dem Kurvenbild ergibt sich, daß die Geschwindigkeit des Widerstandsanstieges des Palladiumdrahtes während der Bildung der festen Verbindung des Palladiums mit Wasserstoff konstant ist. Allerdings wird die Geschwindigkeit kleiner, sobald die Bildung der wasserstoffreichen Phase einsetzt — sie bleibt aber weiter so lange konstant, bis die Bildung des Hydrids beendet ist. Weiter verläuft die Kurve asymptotisch zu dem höchst erreichbaren Wert der Konzentration.

Die Tatsache, daß während der Bildung der festen Verbindungen (Hydride) die Geschwindigkeit des Widerstandsanstieges konstant bleibt, ist sicherlich sehr bemerkenswert. Eine befriedigende Erklärung kann aber zunächst dafür nicht gegeben werden. Der sprunghafte Abfall der allerdings weiter konstant bleibenden Geschwindigkeit nach Beginn der Bildung der wasserstoffreichen Phase läßt sich mit folgender Vorstellung in Einklang bringen:

Die Geschwindigkeit der Wasserstoffaufnahme wird in letzter Instanz von den Vorgängen auf der Drahtoberfläche reguliert¹⁾. Nun vermag die aktivierte Drahtoberfläche — wobei auf den Mechanismus des Vorganges nicht näher eingegangen sei — in der Zeiteinheit nur eine bestimmte und begrenzte Menge des Gases passieren zu lassen. Infolgedessen muß die Bildung der wasserstoffreichen Phase langsamer verlaufen als die der wasserstoffarmen.

Außerdem sei festgehalten, daß während der Versuche der elektrische Widerstand und nicht die Wasserstoffkonzentration unmittelbar gemessen wurde. Nun ist aber der elektrische Widerstand der wasserstoffreichen Phase kleiner als der der wasserstoffarmen²⁾. Sobald also auch die wasserstoffreiche Phase sich zu bilden anfängt, muß der Anstieg des elektrischen Widerstandes langsamer werden. Daß aber dieser Anstieg weiter mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt, bleibt trotzdem bemerkenswert.

Die Zeitkurve zeigt nach Erreichen des Konzentrationswertes c_2 eine asymptotische Annäherung an den höchstmöglichen Beladungswert. Diesem letzten Kurventeil entspräche nach Duhm wieder einfache Lösung des Gases im Metall. Es liegt nahe, daß die Kurve hier einer Differentialgleichung des Typus

$$\frac{dc}{dt} = (c_e - c) \cdot k$$

¹⁾ C. Wagner, ZS. f. phys. Chem. (A) **159**, 459, 1932. — ²⁾ Siehe z. B. bei A. Coehn u. H. Juergens, a. a. O.; G. Borelius, a. a. O.; F. Krüger u. G. Gehm, a. a. O.

genügt, wobei c_e den Enddruck der Konzentration bedeutet, wie sie von F. Jurisch¹⁾ vorgeschlagen und von Wagner²⁾ allerdings für geringe Konzentrationen diskutiert wurde.

Die durch die Glimmentladung hervorgerufene Aktivierung der Metalloberfläche kann durch eine außerordentlich stark vergrößerte Adsorptionsfähigkeit zum Teil erklärt werden. Nach Smithells ist Adsorptionsfähigkeit eine Grundbedingung für den Vorgang der Lösung eines Gases im Metall³⁾. Nach Wagner wird die Lösungsgeschwindigkeit durch das Gleichgewicht zwischen gelöstem und an der Oberfläche adsorbiertem Wasserstoff bestimmt, wobei allerdings mehrere verschiedene Reaktionsgleichungen denkbar sind⁴⁾. Die Adsorptionsfähigkeit des Metalls wird aber sicherlich noch mehr als durch die starke Zerklüftung und Vergrößerung der Metalloberfläche durch die Rückdiffusion des zerstäubten Kathodenmaterials vergrößert⁵⁾.

Eine andere Betrachtungsweise ergibt sich aus den Arbeiten von Firth⁶⁾. Hier wird eine amorphe und eine kristalline Phase des Palladiums angenommen. Die kristalline Phase sei grundsätzlich inaktiv, die amorphe aktiv. Die kristalline Phase des Metalls nimmt den Wasserstoff nur in Gegenwart der amorphen Form auf. Die Metalloberfläche wird durch Glühen im Vakuum oder im Wasserstoff mit einer Schicht amorphen Metalls bedeckt und nach Auffassung Firths dadurch aktiv gemacht. Die starke Aktivität der Palladiumoberfläche nach Behandlung mit Glimmentladung ließe sich also mit der Annahme erklären, daß durch Rückdiffusion bei der Kathodenzerstäubung eine Schicht amorphen Palladiummetalls aufgetragen wird. Bemerkenswert ist noch an den Resultaten von Firth und Mitarbeitern der Nachweis, daß an der Inaktivität des Palladiums in kompakter Form nicht etwa eine Oxydhaut oder irgendeine Verunreinigung der Metalloberfläche schuld ist, welche dann bei der Aktivierung der Oberfläche entfernt wird.

Im Anschluß an dieses Ergebnis kann auch die aktivierende Wirkung der Glimmentladung auf das Metall nicht einfach als Säuberung von etwa dort befindlichen Oxydschichten und sonstigen Verunreinigungen aufgefaßt werden. Der Mechanismus des Vorgangs muß ein anderer sein.

¹⁾ Diss. Leipzig 1912. — ²⁾ C. Wagner, a. a. O. — ³⁾ C. J. Smithells, a. a. O., S. 156. — ⁴⁾ Näheres darüber bei C. Wagner, a. a. O. — ⁵⁾ R. Seeliger, Einführung in die Physik der Gasentladungen, S. 308ff., 1934; Heinz Fischer, ZS. f. Phys. **108**, 500, 1938. — ⁶⁾ J. B. Firth, Journ. of Chim. Soc. **117**, 170, 1920; P. Holt, G. Edgar u. J. B. Firth, ZS. f. phys. Chem. **82**, 513, 1913.

Über die lichtmikroskopisch wahrnehmbaren Veränderungen auf der Metalloberfläche infolge Behandlung mit Glimmentladung geben die drei beigegefügtten Aufnahmen Aufschluß.

Fig. 18 stellt die Aufnahme der Oberfläche eines frischen un-behandelten Palladiumdrahtes dar.

Fig. 19 und Fig. 19a: Der Draht stammt aus der Versuchsröhre 22 und ist einer Glimmentladung in Wasserstoff unterworfen worden. Er wurde nachher nur einmal durch Wasserstoff beladen.

Fig. 20 und Fig. 20a: Der aus der Versuchsröhre 26 stammende Draht wurde einmal einer Glimmentladung in Wasserstoff ausgesetzt und nochmals mit gasförmigem Wasserstoff beladen, nachdem das Gas inzwischen nach Evakuierung des Versuchsgefäßes vom Metall zum Teil abgegeben worden war. Bemerkenswert auf dieser Aufnahme sind die gut sichtbaren Korn-grenzen an der Metalloberfläche.

Fig. 21: Der Draht aus der Versuchsröhre 20 wurde einmal einer Glimmentladung im Argon unterworfen, die sich für die Aktivierung des Metalls als nicht genügend wirksam erwies. Daraufhin wurde der Draht einer neuen Glimmentladung unterworfen, die wirkte, und nachher mehrmals mit molekularem Wasserstoff beladen. Zwischen den einzelnen Beladungen ist der Wasserstoff durch Erhitzen ausgetrieben worden.

Weiter wurden Versuche angestellt, um möglicherweise den Protonen-austritt aus einem mit Wasserstoff beladenen Pd-Draht unter der Ein-wirkung eines elektrischen Feldes — wovon Franzini¹⁾ berichtet — mit Glimmentladung zu beeinflussen. Franzini ließ nämlich Palladium-drähte elektrolytisch mit Wasserstoff beladen und setzte die so beladenen Drähte als Kathode gepolt der Wirkung eines elektrischen Feldes von der Stärke bis 140 kV/cm aus. Der Draht hing während des Versuchs coaxial zu einem Ni-Zylinder. Franzini beobachtete nach 15 Minuten das Ab-sinken des elektrischen Drahtwiderstandes von seinem infolge H₂-Beladung angenommenen erhöhten Werte. Da die in dieser Arbeit beschriebene Behandlung der Palladiumoberfläche mit Glimmentladung die Aufnahme und Abgabe des Wasserstoffs durch das kompakte Metall stark begünstigte und, wie die Versuche von Coehn und Specht und Coehn und Jue rgens beweisen, ein Teil der im Pd-Metall enthaltenen Wasserstoffatome ionisiert sein muß, ist zu erwarten gewesen, daß bei Wirkung eines elektrischen Feldes auf vorher mit Glimmentladung behandelte und mit Wasserstoff beladene Drähte eine noch deutlichere Senkung des elektrischen Wider-

¹⁾ T. Franzini, a. a. O.



Fig. 18. Palladiumdraht im Ausgangszustand. 500:1.



Fig. 19. Röhre 22, H_2 , Scharfstellung der Drahtoberfläche. 500:1.

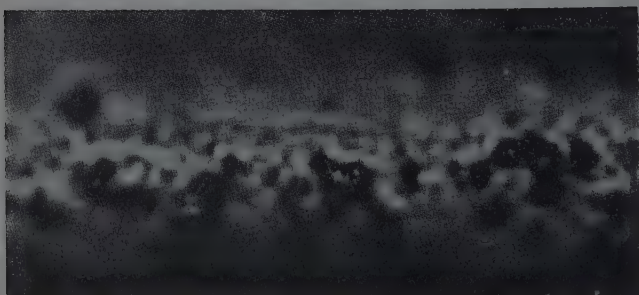


Fig. 19a. Die nämliche Stelle wie Fig. 19, Scharfstellung der vorstehenden Partikelchen. 500:1.

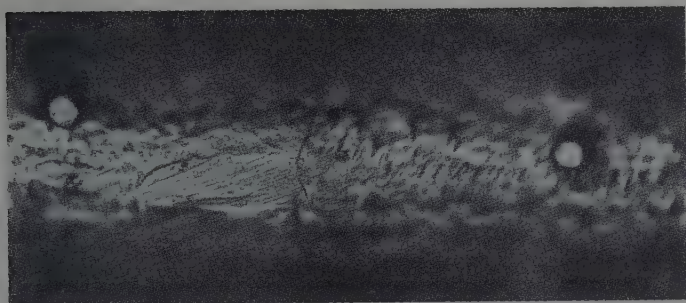


Fig. 20. Röhre 26, H_2 , Scharfstellung der Drahtoberfläche. 500:1.

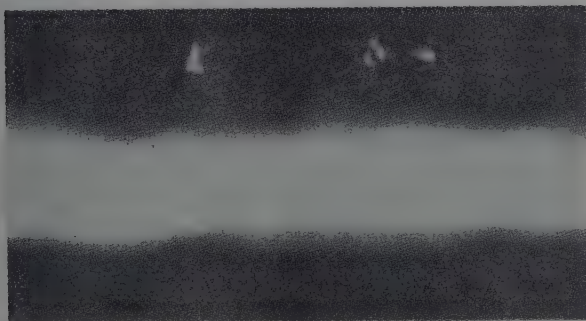


Fig. 20a. Scharfstellung der seitlich vorstehenden Spitzen. 500:1.

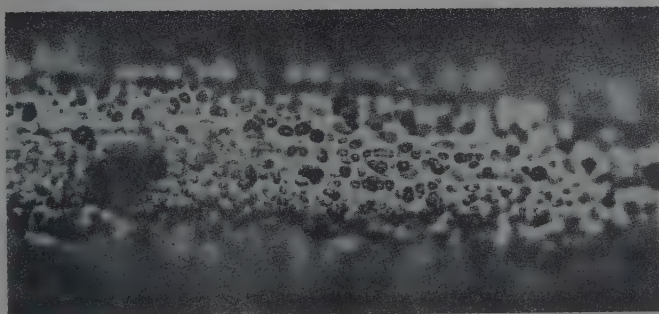


Fig. 21. Röhre 20, Argon. 500:1.

standes nach sich ziehen würde, als es Franzini beobachtet hat. Obwohl Feldstärken angewandt wurden, welche doppelt so groß waren wie diejenigen, welche nach Franzini den Effekt hervorgerufen haben, und der Versuch auch über eine weit längere Zeit ausgedehnt wurde, ließ sich eine Senkung des elektrischen Widerstandes, also ein Herausziehen der Wasserstoffionen aus dem Draht nicht beobachten. Eine Abnahme des elektrischen Widerstandes durch Anlegen eines elektrischen Feldes an einen mit Wasserstoff beladenen Pd-Draht ließ sich auch dann nicht beobachten, wenn die Drahtoberfläche vorher mit Glimmentladung behandelt worden war. Das Absinken des elektrischen Widerstandes wurde nur dann festgestellt, wenn bei einer Spannungssteigerung zwischen Zylinder und Pd-Draht auf 28 bis 32 kV (was einer Feldstärke von 112 bis 128 kV/cm entsprach) ein sekundenlanges Aufleuchten — also eine entladungsartige Erscheinung, die vom Zusammenzucken der Spannung begleitet war — auftrat. In diesem Fall ist aber ein Austreiben des Wasserstoffs durch Wärmewirkung die nächstliegende Erklärung. Erwärmung des Drahtes auf etwa 1200° genügt, damit ein beträchtlicher Teil des Wasserstoffs entweicht.

Die Arbeit entstand im Laboratorium für Elektronen- und Ionenlehre an der Techn. Hochschule Berlin. Herrn Prof. Dr. A. Nikuradse bin ich für weitgehende Förderung zu großem Dank verpflichtet. Herrn Dr. A. Berger verdanke ich viele wertvolle Hinweise und Ratschläge.

Die Theorie der in endlicher Entfernung von der Trennungsebene zweier Medien erregten Kugelwelle für endliche Brechungsindizes*).

Von M. Krüger.

Mit 26 Abbildungen. (Eingegangen am 18. Dezember 1942.)

In einem Medium 1 befinde sich eine Kugelwellenstrahlungsquelle in endlichem Abstand von der Grenzebene gegen ein Medium 2. Es werden dann am elektrodynamischen Beispiel unter Voraussetzung eines vertikalen Dipols exakte asymptotische Entwicklungen der Potentialfunktion in beiden Medien gegeben, in den Abschnitten 3, 4 für endlichen komplexen, in Abschnitt 5 für reellen Brechungsindex. Die Ergebnisse gelten für Entfernungen, welche groß sind gegen die Wellenlänge, für beliebigen endlichen Abstand der Strahlungsquelle von der Grenzebene und für beliebige Zenitdistanz des Aufpunktes. In dieser Allgemeinheit gelingt die Lösung des Problems mit Hilfe der Weylschen Methode der Transformation der komplexen Ausgangsdoppelintegrale. Durch Spezialisierung werden bisher vorliegende Lösungen wiedergewonnen und dabei durch Berücksichtigung einer von Weyl vernachlässigten Singularität bei komplexer Integration die Weylsche und die hinsichtlich der „Oberflächenwelle“ verbesserte Sommerfeldsche Theorie der Wellenausbreitung, welche im Ansatz übereinstimmen, auch in der Auswertung in völliger Übereinstimmung gefunden. Die Berücksichtigung der erwähnten Singularität liefert ferner mutatis mutandis die von O. v. Schmidt entdeckte elastische „Kopfwelle“.

1. Einleitung und Problemstellung.

Ausgehend von gewissen Beobachtungen in der Sprengseismik war v. Schmidt¹⁾ im Jahre 1938 auf Versuche über das Verhalten einer Knallkugelwelle in der Umgebung der Trennungsebene zweier Medien verschiedener Schallfortpflanzungsgeschwindigkeit gekommen. Mit Hilfe der Cranz-Schardinschen Mehrfach-Funkenmethode gelangen ihm Schlierenaufnahmen der Wellenausbreitung in der Nähe der Trennungsebenen flüssiger und fester Körper, die ohne Zweifel außer der einfallenden, der reflektierten und der durchgehenden Kugelwelle noch eine vierte Kugelwellenfront zeigten, welche z. B. im Falle der Lage des Erregungszentrums im Medium der geringeren Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Schnittpspur der Kugelwellenfront des schnelleren Mediums mit der Trennungsebene beginnend tangential an die reflektierte Kugelwellenfront im langsameren Medium verlief (Fig. 1). Wie im Falle des sich mit Überschallgeschwindigkeit

*) D 2.

¹⁾ O. v. Schmidt, Phys. ZS. **39**, 868, 1938.

bewegenden Geschosses eine Kopfwelle auftritt, deren Winkel α mit der Bewegungsrichtung des Geschosses der Machschen Beziehung genügt

$$\sin \alpha = \frac{v_1}{v_2}$$

(v_1 = Schallgeschwindigkeit der Luft, v_2 = Geschößgeschwindigkeit), so kann auch diese Kegelwellenfront nach v. Schmidt als „Kopfwelle“ aufgefaßt werden, welche unter dem Winkel α zur Trennungsebene an dieser entlangläuft, wobei α der Beziehung gehorcht $\sin \alpha = \frac{v_1}{v_2}$ (v_1 , v_2 bzw. die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im langsameren und im schnelleren Medium). Dies Ergebnis schien v. Schmidt im Widerspruch zu dem klassischen Brechungsgesetz und insbesondere den Fresnelschen Reflexionsformeln zu stehen. Nun

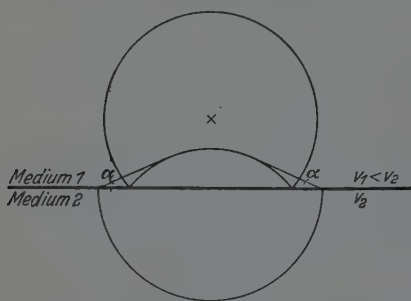


Fig. 1. Schnittspuren der einfallenden, reflektierten und durchgehenden Kugelwelle sowie der v. Schmidtschen Kegelwelle in der Nähe der Trennungsebene zweier Medien.

zeigten Joos und Teltow kurze Zeit später ¹⁾, daß diese Kegelwellenfront aus der Sommerfeldschen Theorie über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs der Erdoberfläche ²⁾ abgeleitet werden kann. Allerdings konnten sie dann die Versuchsergebnisse von v. Schmidt nur für den Spezialfall der Grenzschichtnähe unter der

weiteren Voraussetzung beschreiben, daß die primäre Kugelwelle ihren Sitz in der Trennungsebene hat. Der Übergang von der Mechanik der Kontinua zur Maxwellschen Theorie ist dabei unwesentlich. Joos und Teltow wiesen auch darauf hin, daß die Anwendbarkeit der Fresnelschen Formeln an ebene Wellenfronten geknüpft ist und die scheinbare Unstimmigkeit der v. Schmidtschen Versuchsergebnisse mit der klassischen Theorie dadurch behoben werden kann, daß man die Gesamterregung in beiden Medien als Superposition ebener Elementarwellen auffaßt, wie es schon Weyl ³⁾ bei der Behandlung des Problems der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter getan hatte. Die Weylsche Theorie ist nun zwar trotz identischer Ausgangsformeln insofern allgemeiner als die Sommerfeldsche, als ihre Ergebnisse nicht auf Grenzschichtnähe be-

¹⁾ G. Joos u. J. Teltow, Phys. ZS. 40, 289, 1939. — ²⁾ A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 28, 665, 1909. — ³⁾ H. Weyl, ebenda 60, 481, 1919.

schränkt sind, obschon sie auch den Sitz der primären Kugelwelle in der Trennungsebene annimmt, behandelt aber nur die Vorgänge in einem Medium (Luft) und vernachlässigt gewisse Singularitäten bei komplexer Integration, deren Berücksichtigung im anderen Medium gerade die v. Schmidtsche Wellenfront liefern würde. Dieselben Vernachlässigungen machen auch die von Strutt¹⁾ auf endliche Entfernung der Quelle der primären Kugelwelle von der Trennungsebene verallgemeinerte Weylsche Theorie für die Deutung der v. Schmidtschen Wellenfront unmöglich.

Bei dieser Sachlage stellt es sich die vorliegende Arbeit zur Aufgabe, in voller Allgemeinheit unter Voraussetzung der Gültigkeit der Fresnelschen Reflexionsformeln für ebene Elementarwellen aus diesen eine Lösung des folgenden Problems zusammenzusetzen (Fig. 2).

$x = y = 0, z = d$ sei das Zentrum einer Kugelwelle, die die (x, y) -Ebene die Trennungsebene zweier Medien 1 und 2, die bzw. den oberen und unteren Halbraum ausfüllen und durch die Konstanten

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \sigma_1 = 0, \quad \mu_1 = 1;$$

$$\varepsilon_2, \quad \sigma_2, \quad \mu_2 = 1.$$

der Maxwell'schen Theorie gekennzeichnet sind. Es ist für beliebiges ϑ_0 in Entfernungen von den Punkten $x = y = 0, z = d$ und $x = y = z = 0$, welche groß sind gegenüber der Wellenlänge, die Feldverteilung in beiden Medien anzugeben (Aufpunkt P)²⁾.

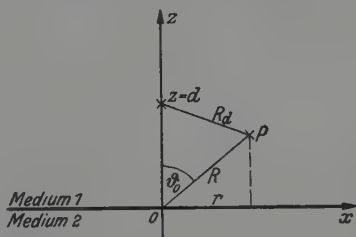


Fig. 2. Zur Erläuterung der Problemstellung.

¹⁾ M. J. O. Strutt, Ann. d. Phys. 4, 7, 1930. — ²⁾ Eine inzwischen erschienene Arbeit von H. Ott, Reflexion und Brechung von Kugelwellen; Effekte 2. Ordnung, Ann. d. Phys. 41, 443, 1942, kann nicht als allgemeine Lösung des Problems angesehen werden. Denn durch die Auswertung der Doppelintegrale in (22), (23), Abschnitt 2, wie Ott es macht, vermittelt der Hankelschen Funktion $H_0^{(1)}$ und deren Darstellung für große Argumente, d. h. große Horizontalentfernung des Aufpunktes, kann die Abhängigkeit des Hertz'schen Potentials II von der Zenitdistanz des Aufpunktes nicht befriedigend dargestellt werden. Auch ist die Auswertung des die Schmidtsche Kopfwellen darstellenden Integrals [l. c., Gl. (21)], wo im Gegensatz zur reflektierten und gebrochenen Welle die Darstellung durch $H_0^{(1)}$ allerdings angebracht ist, mit Hilfe der Paßmethode nicht berechtigt, da der Integrandenfaktor am Paß verschwindet. Durch partielle Integration ist dem abzuhelfen [vgl. z. B. die Auswertung von (35), Abschnitt 3]. Ohne Zweifel hätte aber der Versuch einer Abschätzung aller asymptotischen Entwicklungen auf die in der vorliegenden Arbeit angewandte allgemeinere Behandlungsmethode führen müssen.

Die Lösung der Aufgabe liefert dann bei Spezialisierung auf reellen Brechungsindex eine Beschreibung der Versuchsergebnisse von v. Schmidt in allgemeinerer Form, als das mit Hilfe der Sommerfeldschen Theorie möglich ist. Sie stellt weiter für komplexen Brechungsindex die allgemeinste Lösung des Problems der Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen längs der als eben angenommenen Erdoberfläche dar. Gegenüber der Sommerfeldschen Theorie berücksichtigt sie endlichen Abstand der Kugelwellenquelle von der Trennungsebene und gilt für beliebige Erhebungswinkel $\frac{\pi}{2} - \vartheta_0$. Für die Absicht der Herleitung der Lösung aus ebenen Elementarwellen ist die Methode der Weylschen Theorie die gegebene. Das Resultat geht über das Weylsche insofern hinaus, als es wiederum die Annahme endlicher Entfernung der Kugelwellenquelle von der Trennungsebene enthält und die Feldverteilung auch im Medium 2 vollständig angibt. Weiter ist es eine Verschärfung des Weylschen Ergebnisses, indem vernachlässigte Singularitäten mitberücksichtigt sind, wodurch die Weylsche und Sommerfeldsche Theorie einander genähert werden, wie es der Identität der Ausgangsformeln beider Theorien entspricht. Die Struttische Verallgemeinerung findet sich als Spezialfall wieder. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf endliche Brechungsindizes, doch kann von ihr aus der Übergang zu beliebig großen vollzogen werden, wie es Weyl und Sommerfeld in ihren Spezialfällen getan haben. Für die Anwendung z. B. auf einen im Erdinnern oder unter Wasser befindlichen Sender ist es übrigens wichtig darauf hinzuweisen, daß der hier eingeschlagene Weg die Verallgemeinerung auf die Lage der Kugelwellenquelle im Medium 2 zuläßt, wie überhaupt die Einschränkung auf $\sigma_1 = 0$ unwesentlich ist.

Ferner kann man, obwohl es nicht näher ausgeführt wird, die hier vorgetragene Theorie unschwer in der Optik der undurchsichtigen (Metalloptik) und durchsichtigen Medien anwenden. Man hat in der Metalloptik nur den experimentell festgestellten komplexen Brechungsindex zugrunde zu legen und bei den komplexen Integrationen auf seine Lage Rücksicht zu nehmen.

Die Behandlung des Gegenstandes wird so vorgenommen, daß im ersten Abschnitt die Lösungsfunktionen aus den für ebene Elementarwellen gültigen Fresnelschen Formeln hergeleitet, dann in gesonderten Abschnitten für beide Medien bei komplexem Brechungsindex die Integraldarstellungen dieser Funktionen ausgewertet und schließlich im letzten Abschnitt auf reelle Brechungsindizes spezialisiert werden.

2. Herleitung der Hertzschen Funktion aus den Fresnelschen Reflexionsformeln.

Zur Charakterisierung der Erregung an jeder Stelle des Raumes wird im folgenden die Hertzsche Funktion Π benutzt. Darunter versteht man die Lösung der Wellengleichung

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0, \quad (1)$$

welche sich in dieser Form bei Annahme harmonischer Oszillation der Feldstärken aus der Telegraphengleichung ergibt mit

$$k^2 = \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2 \left(\varepsilon - \frac{i\sigma c}{2\pi\nu}\right). \quad (2)$$

Der Zeitfaktor ist dabei angesetzt mit $e^{i2\pi\nu t}$ und wird im folgenden nicht mitgeführt. Die Feldstärken, von denen angenommen ist, daß sie sich wie bei einem vertikalen strahlenden Dipol anordnen (magnetische Kraftlinien Kreise um die z -Achse, elektrische Kraftlinien in Ebenen durch die z -Achse) ergeben sich aus Π durch Differentiation¹⁾. Beliebige Anordnung des Dipols würde auf den Hertzschen Vektor \mathfrak{Z} führen, der ebenfalls Gleichung (1) genügt und also zu keinen neuen Lösungsformen Veranlassung gibt. Die Feldstärken ergeben sich aus dem Hertzschen Vektor gemäß den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \text{grad div } \mathfrak{Z} + k^2 \mathfrak{Z}, \\ \mathfrak{H} &= \frac{ik^2 c}{2\pi\nu} \text{rot } \mathfrak{Z}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Man erkennt daraus, daß sich bei beliebiger Lage des Dipols die Lösungsformen

$$\mathfrak{Z} = \sum_i \mathfrak{F}_i(x, y, z) e^{g_i(x, y, z)}$$

der Gleichung (1) auch auf die Feldstärken übertragen, und insbesondere für \mathfrak{F}_i gleich einem von x, y, z unabhängigen Vektor \mathfrak{F}_i^0 und $g_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i$ mit räumlich konstanten a_i, b_i, c_i, d_i die elektrische Feldstärke sich schreiben läßt

$$\mathfrak{E} = \sum_i \mathfrak{G}_i e^{g_i},$$

wobei $\mathfrak{G}_{ix}, \mathfrak{G}_{iy}, \mathfrak{G}_{iz}$ homogene Linearkombinationen von $\mathfrak{F}_{ix}^0, \mathfrak{F}_{iy}^0, \mathfrak{F}_{iz}^0$ sind. Entsprechendes gilt für \mathfrak{H} . Umgekehrt erhält man also in diesem speziellen Falle, der im folgenden allein interessiert, auch $\mathfrak{Z}_x, \mathfrak{Z}_y, \mathfrak{Z}_z$ als homo-

¹⁾ A. Sommerfeld, l. c., S. 679. — ²⁾ Vgl. C. Schaefer, Einführung in die theoretische Physik III, 1, S. 317.

gene Linearkombinationen der Feldstärkekomponenten. Wenn also an der Trennungsebene $z = 0$, wie im Falle ebener Wellen durch die Fresnelschen Reflexionsformeln¹⁾ ausgedrückt, die Grenzbedingung der Stetigkeit der Feldstärken auf lineare Beziehungen zwischen den Feldstärken der beiden Medien mit räumlich konstanten Koeffizienten führt, so gelten auch lineare Beziehungen zwischen den Komponenten der Hertzischen Vektoren in den beiden Medien. Da die Absicht besteht, durch Summation ebener Elementarwellen zu komplizierteren Formen des Hertzischen Vektors aufzusteigen, und dabei alle drei Komponenten vermöge der linearen Beziehungen des Hertzischen Vektors der Elementarwelle zu deren Feldstärken aus den Fresnelschen Formeln in völlig analoger Weise herleitbar sind, ist es keine wesentliche Einschränkung, wenn im folgenden nur der Fall vertikaler Dipollage betrachtet wird.

Dann wird nämlich für den endgültigen Lösungsvektor

$$3_x = 0, \quad 3_y = 0, \quad 3_z = \frac{2\pi\nu}{ik^2c} \Pi, \quad (4)$$

wie man aus (3) entnimmt²⁾. Die Hertzische Funktion ist nichts anderes als die z -Komponente des Hertzischen Vektors im Falle vertikaler Dipollage.

Es kommt nunmehr darauf an, gemäß (3) für den Fall (4) die Fresnelschen Reflexionsformeln auf die ebenen Elementaranteile von Π zu übertragen. Nach (3) ist

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \frac{2\pi\nu}{ik^2c} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}; & \mathfrak{H}_x &= \frac{\partial \Pi}{\partial y}; \\ \mathfrak{E}_y &= \frac{2\pi\nu}{ik^2c} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}; & \mathfrak{H}_y &= \frac{\partial \Pi}{\partial x}; \\ \mathfrak{E}_z &= \frac{2\pi\nu}{ik^2c} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi \right); & \mathfrak{H}_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Setzt man für die einfallende ebene Elementarwelle

$$\Pi_E^e = e^{-ik_1[\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1(d-z)]}, \quad (6)$$

für die reflektierte

$$\Pi_E^r = f_r \cdot e^{-ik_1[\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1(d+z)]}, \quad (7)$$

für die durchgehende

$$\Pi_E^d = f_d \cdot e^{-ik_2(\alpha_2 x + \beta_2 y - \gamma_2 z)} \cdot e^{-ik_1 d \gamma_1} \quad (z \leq 0), \quad (8)$$

¹⁾ C. Schaefer, l. c., S. 396. — ²⁾ Vgl. auch A. Sommerfeld, l. c., S. 678, Anm.

so ist gemäß (5) und (7) bzw. (6):

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_{xE}^r &= -\frac{2\pi\nu}{ic} \alpha_1 \gamma_1 f_r \cdot e^{-ik_1[\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1(d+z)]}, \\ \mathfrak{E}_{xE}^e &= \frac{2\pi\nu}{ic} \alpha_1 \gamma_1 \cdot e^{-ik_1[\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1(d+z)]}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

oder

$$\frac{\mathfrak{E}_{xE}^r}{\mathfrak{E}_{xE}^e} = -f_r; \quad (z=0). \quad (10a)$$

Ebenso gilt gemäß (5) und (8)

$$\mathfrak{E}_{xE}^d = \frac{2\pi\nu}{ic} \alpha_2 \gamma_2 f_d \cdot e^{-ik_2(\alpha_2 x + \beta_2 y - \gamma_2 z)} \cdot e^{-ik_1 \gamma_1 d},$$

woraus bei Division durch (9) folgt:

$$\frac{\mathfrak{E}_{xE}^d}{\mathfrak{E}_{xE}^e} = \frac{\alpha_2 \gamma_2}{\alpha_1 \gamma_1} f_d; \quad (z=0). \quad (10b)$$

Hierbei ist gemäß dem Brechungsgesetz

$$k_2 \alpha_2 = k_1 \alpha_1; \quad k_2 \beta_2 = k_1 \beta_1,$$

und der Brechungsindex wird definiert durch

$$n = \frac{k_2}{k_1}.$$

Die Fresnelschen Reflexionsformeln lauten, soweit sie hier interessieren, in der Bezeichnungsweise des Vorhergehenden vorbehaltlich einer späteren Festlegung des Wurzelwertes

$$\left. \begin{aligned} f_p^r &= \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot f_p^e; \quad 1) \\ f_p^d &= \frac{2n\gamma_1}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot f_p^e; \end{aligned} \right\} \quad (z=0) \quad (11)$$

dabei ist

$$\mathfrak{E}_{xE}^e = -\gamma_1 \cdot f_p^e; \quad \mathfrak{E}_{xE}^r = \gamma_1 \cdot f_p^r; \quad \mathfrak{E}_{xE}^d = -\gamma_2 f_p^d. \quad (12)$$

Entsprechend (11) und (12) ergibt sich also:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathfrak{E}_{xE}^r}{\mathfrak{E}_{xE}^e} &= -\frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}, \\ \frac{\mathfrak{E}_{xE}^d}{\mathfrak{E}_{xE}^e} &= \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{n^2 \gamma_1}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

1) C. Schaefer, l. c., S. 396. — 2) C. Schaefer, l. c., S. 389, 390.

Dann lehrt der Vergleich von (13) mit (10), daß gilt

$$\left. \begin{aligned} f_r &= \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}, \\ f_d &= \frac{2 n^2 \gamma_1}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Im Medium 1 ($z \geq 0$) läßt sich daher der Elementarbestandteil $\Pi_E^{(1)}$ angeben zu:

$$\begin{aligned} \Pi_E^{(1)} &= e^{-i k_1 [\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 (d - z)]} + \\ &+ \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i k_1 [\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 (d + z)]} \end{aligned} \quad (15)$$

und im Medium 2 ($z \leq 0$) zu:

$$\Pi_E^{(2)} = e^{-i k_2 (\alpha_2 x + \beta_2 y - \gamma_2 z)} \cdot e^{-i k_1 \gamma_1 d} \cdot \frac{2 n^2 \gamma_1}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}. \quad (16)$$

Integriert man $\Pi_E^{(1)}$ und $\Pi_E^{(2)}$ für jeden Punkt x, y, z über die Richtungskosinusse $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, so müssen jedenfalls — die Existenz der Integrale vorausgesetzt — die sich dabei ergebenden Hertzschen Funktionen $\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}$ der Wellengleichung (1) genügen.

Die physikalische Bedeutung solcher Integration sei an dem einfachsten Fall der Dipollage im Punkte $x = y = z = 0$ klargemacht. Bezeichnen jetzt $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ Punkte der Einheitskugel, dann liefert die Integration für $z > 0$:

$$\frac{e^{-i k_1 R}}{-i k_1 R} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi=2\pi} e^{-i k_1 (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)} \cdot \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi \quad (17)$$

$\Delta_1 \varphi = 0$

mit $\alpha_1 = \sin \vartheta_1 \cos \varphi$, $\beta_1 = \sin \vartheta_1 \sin \varphi$, $\gamma_1 = \cos \vartheta_1$, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und den Polarkoordinaten ϑ_1, φ . Der Integrationsweg ist für φ von 0 bis 2π und für ϑ_1 in der komplexen ϑ_1 -Ebene nach Fig. 3 zu erstrecken. Man erkennt aus der Darstellung (17), daß die Integration über sämtliche Richtungen auf eine Kugelwelle führt, wie es gerade für das vorliegende Problem erwünscht ist. Die Hinzunahme eines komplexen Integrationswegbestandteils mag zunächst unerklärlich erscheinen. Aber die Integration über ϑ_1 nur von 0 bis $\pi/2$ würde auf eine stehende, übrigens im Nullpunkt reguläre Kugelwelle führen, mit der im vorliegenden Falle nichts anzufangen ist. Der Übergang zu komplexer Integration ist bei Zylinder- ebenso wie bei Kugelwellen eine notwendige Forderung für Ausstrahlungsvorgänge mit Quelle im Nullpunkt²⁾.

¹⁾ H. Weyl, l. c., S. 481. — ²⁾ R. Courant u. D. Hilbert, Meth. d. math. Phys. II, S. 153, 154.

Liegt die Quelle der Kugelwelle im Abstand d auf der z -Achse, so hat man in Verallgemeinerung von (17) für $0 \leq z < d$ die einfallende Kugelwelle anzusetzen in der Gestalt

$$\Pi^e = \frac{e^{-ik_1 R_d}}{-ik_1 R_d} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1}^{\varphi=2\pi} \int_0^\infty e^{-ik_1[\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1(d-z)]} \cdot \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi. \quad (18)$$

Hierin bedeutet R_d den Abstand des Aufpunktes von der Quelle, und man erkennt erst aus (18) die Berechtigung gerade der Gestalt von Π_E^e , wie sie (6) darstellt. Π_E^e und Π_E^d ergeben sich dann zwangsläufig aus Π_E^e in den Formen, wie sie (7) bzw. (8) angeben. Vorbehaltlich der noch zu erweisenden Existenz der Integrale, was auf den Beweis der Konvergenz für $\vartheta_1 \rightarrow \infty$ auf Δ_1 hinausläuft und implizit in der im folgenden gegebenen Reihenentwicklung der Integrale enthalten ist, hat also das Problem auf die Auswertung folgender Ausdrücke geführt:

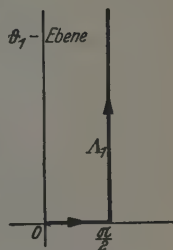


Fig. 3. Integrationsweg für ϑ_1 in (17).

im Medium 1

gemäß (15) für $0 \leq z < d$:

$$\Pi^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\Delta_1}^{\varphi=2\pi} \int_0^\infty e^{-ik_1[\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1(d-z)]} \cdot \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi + \int_{\Delta_1}^{\varphi=2\pi} \int_0^\infty \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-ik_1[\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1(d+z)]} \cdot \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi \right\}, \quad (19)$$

und analog für $z > d$:

$$\Pi^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\Delta_1}^{\varphi=2\pi} \int_0^\infty e^{-ik_1[\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1(z-d)]} \cdot \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi + \int_{\Delta_1}^{\varphi=2\pi} \int_0^\infty \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-ik_1[\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1(d+z)]} \cdot \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi \right\}; \quad (20)$$

im Medium 2

gemäß (16) für $z < 0$:

$$\Pi^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1}^{\varphi=2\pi} \int_0^\infty \frac{2n^2 \gamma_1}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-ik_2(\alpha_2 x + \beta_2 y - \gamma_2 z)} \cdot e^{-ik_1 \gamma_1 d} \cdot \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi. \quad (21)$$

In (19) und (20) stellen die ersten Summanden gemäß (18) die vom Punkte $x = y = 0, z = d$ ausgehende Kugelwelle dar, während die zweiten gemeinsam behandelt werden können. Endgültig bleiben also folgende Bestandteile zur Auswertung übrig:

im Medium 1: $(z \geq 0)$

$$\Pi_{\Pi}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i k_1 [\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 (d + z)]} \cdot \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi; \quad (22)$$

im Medium 2: $(z < 0)$

$$\Pi_{\Pi}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{2n^2 \gamma_1}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i k_2 (\alpha_2 x + \beta_2 y - \gamma_2 z)} \cdot e^{-i k_1 \gamma_1 d} \cdot \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi. \quad (23)$$

3. Auswertung der Integraldarstellung der Hertz'schen Funktion für das Medium 1 bei komplexem Brechungsindex.

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, wird nunmehr k_1 auf reelle Werte beschränkt und gleich 1 gesetzt, was wegen $k_1 = 2\pi/\lambda$ nach (2), Abschnitt 2, offenbar bedeutet, daß alle Entfernungen in Wellenlängeneinheiten gemessen werden. Es wird dann $k_2 = n$. Um für das Künftige feste Vorstellungen zu haben, sei n in der Form angenommen, wie sie sich aus der Maxwell'schen Theorie mit Hilfe der Materialkonstanten ϵ_2, σ_2 ergibt ($\mu_2 = 1$). Doch ist dies keine notwendige Voraussetzung zur Auswertung der Gleichungen (22) und (23) in Abschnitt 2. Nach elementaren Umrechnungen folgt aus (2), Abschnitt 2, für n die Darstellung

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\epsilon_2 + \sqrt{\epsilon_2^2 + \frac{\sigma_2^2 c^2}{\nu^2}}} \left(1 - i \frac{\sqrt{\epsilon_2^2 + \frac{\sigma_2^2 c^2}{\nu^2}} - \epsilon_2}{\sqrt{\epsilon_2^2 + \frac{\sigma_2^2 c^2}{\nu^2}} + \epsilon_2} \right). \quad (1)$$

Hierbei sind sämtliche Wurzeln positiv zu nehmen, und man sieht, daß n im vierten Quadranten liegt, also geschrieben werden kann

$$n = |n| \cdot e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})}. \quad (2)$$

Dabei ist α der Winkelabstand des Punktes n von der negativen imaginären Achse; und da gemäß (1) der Betrag des Imaginärteils von n kleiner als der Realteil von n ist, erhält man für α die Ungleichung

$$\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

$\alpha = \pi/2$ würde reellen Brechungsindex und $\alpha = \pi/4$ unendlich große Leitfähigkeit bedeuten.

Das Ziel der Integralauswertung für beide Medien besteht in der Darstellung der Hertzischen Funktionen als Überlagerung bekannter und physikalisch zugänglicher Wellentypen, wie ja in den ersten Summanden der Gleichungen (19) und (20) aus Abschnitt 2 schon die primären Kugelwellen wiedererkannt sind. Zur Erreichung dieses Zieles wird der von Weyl in seiner schon mehrfach zitierten Arbeit eingeschlagene Weg der Auswertung mit den durch das vorliegende Problem verallgemeinerten Zielsetzungen benutzt. Dieser Weg besteht kurz in folgendem: Statt die Punkte der Einheitskugel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ durch die Winkel φ, ϑ_1 , wie in (17), Abschnitt 1, angeschrieben, auf das Koordinatensystem x, y, z zu beziehen, werden sie vermittels der Winkel ψ_1, η_1 auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem x^*, y^*, z^* bezogen, dessen z^* -Achse sich mit dem Strahl vom Nullpunkt durch den Aufpunkt deckt, und dessen (x^*, z^*) -Ebene in der (z, z^*) -Ebene liegt. Die dadurch erhaltene einfache Gestalt des Potenzfaktors des Integranden legt dann statt \mathcal{A}_1 einen anderen Integrationsweg nahe, der rasch zu einer asymptotischen Entwicklung des Integrals führt.

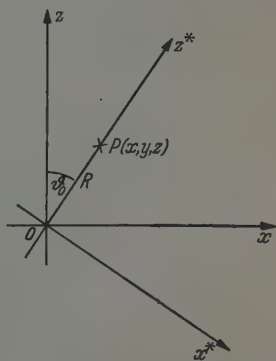


Fig. 4. Zur Veranschaulichung der Weylschen Transformation.

Es sei also zunächst in (22), Abschnitt 2, der Übergang von φ, ϑ_1 auf ψ_1, η_1 vollzogen.

Da das Problem um die z -Achse rotationssymmetrisch ist, kann man den Aufpunkt $P(x, y, z)$ in der (x, z) -Ebene annehmen und erhält gemäß Fig. 4 die Beziehung

$$x = R \cdot \sin \vartheta_0; \quad y = 0; \quad z = R \cdot \cos \vartheta_0. \quad (4)$$

Zur Herleitung der Transformationsgleichungen $(\varphi, \vartheta_1) \rightarrow (\psi_1, \eta_1)$ ist also eine Drehung des Koordinatensystems um den Winkel ϑ_0 mit der y -Achse als Drehachse vorzunehmen, bei der der Punkt $(\sin \vartheta_1 \cdot \cos \varphi, \sin \vartheta_1 \cdot \sin \varphi, \cos \vartheta_1)$ übergeht in den Punkt mit dem Koordinaten $\sin \eta_1 \cdot \cos \psi_1, \sin \eta_1 \cdot \sin \psi_1, \cos \eta_1$. Das liefert

$$\left. \begin{aligned} \sin \vartheta_1 \cos \varphi &= \sin \eta_1 \cos \psi_1 \cos \vartheta_0 + \cos \eta_1 \sin \vartheta_0, \\ \cos \vartheta_1 &= -\sin \eta_1 \sin \psi_1 \sin \vartheta_0 + \cos \eta_1 \cos \vartheta_0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Bei dieser Transformation gehen die Wertevorräte φ, ϑ_1 , dargestellt durch die Strecke $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ bzw. den Weg \mathcal{A}_1 , in gewisse neue Wertevorräte

ψ_1, η_1 über. Aber es läßt sich zeigen, daß man ψ_1 wieder von 0 bis 2π erstrecken und η_1 längs eines Weges L_1 in der η_1 -Ebene führen kann, dessen Wahl sich sofort ergibt, wenn man erst einmal die erfolgte Wahl der Integrationswege für ψ_1 und η_1 hypothetisch annimmt und formal in $II_{II}^{(1)}$ aus (22), Abschnitt 2, die Koordinatentransformation $(\varphi, \vartheta_1) \rightarrow (\psi_1, \eta_1)$ ausführt. Dazu hat man zunächst die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\varphi, \vartheta_1)}{\partial(\psi_1, \eta_1)}$$

zu bilden, die als Faktor des Integranden im Doppelintegral nach ψ_1, η_1 auftritt und sich aus (5) ergibt zu

$$\frac{\partial(\varphi, \vartheta_1)}{\partial(\psi_1, \eta_1)} = \frac{\sin \eta_1}{\sin \vartheta_1} \quad (6)$$

Der Übergang $(\varphi, \vartheta_1) \rightarrow (\psi_1, \eta_1)$ ergibt mithin für $II_{II}^{(1)}$ in (22), Abschnitt 2:

$$II_{II}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_1=0}^{\vartheta_1=2\pi} \int_{\psi_1=0}^{\psi_1=2\pi} \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-iR \cos \eta_1} \cdot e^{-i\gamma_1 d} \cdot \sin \eta_1 \, d\eta_1 \, d\psi_1, \quad (7)$$

gemäß (5) mit

$$\gamma_1 = \cos \eta_1 \cos \vartheta_0 - \sin \eta_1 \cos \psi_1 \sin \vartheta_0.$$

Zur Bestimmung des Weges A_1^* hat man zu beachten, daß η_1 keine Werte annehmen darf, die mit den zugelassenen Werten ψ_1 zusammen auf Singularitäten des Integranden führen. Die Singularitäten des Integranden liegen aber, wie man sofort aus (7) erkennt, bei

$$\gamma_1 = \pm \sqrt{1 - n^2} \quad (\text{algebraische Singularitäten})$$

und

$$n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2} = 0, \quad \text{d. h. } \gamma_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{n^2 + 1}} \quad (\text{Pole}).$$

Ferner hat man zur Erreichung der Konvergenz des Integrals zu verlangen, wenn A_1^* sich ins Unendliche erstrecken soll, daß der Realteil von $-iR \cos \eta_1$ gegen $-\infty$ geht, d. h. $\cos \eta_1$ mit negativem Imaginärteil unendlich wird.

$\sin \eta_1$ strebt dann zwar gegen Unendlich wegen $\sin \eta_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \eta_1}$, aber in einer um eine e -Potenz niedrigeren Ordnung als $e^{-iR \cos \eta_1}$ gegen Null geht. Fig. 5 zeigt die Singularitäten in der γ_1 -Ebene. $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}$ sind die algebraischen singulären Stellen, $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}$ die Pole. Trennt man die γ_1 -Ebene längs der Geraden $g^{(1)}$ durch $A_1^{(1)}$ und $A_2^{(1)}$ auf, so ist man sicher, daß $\sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}$ eine eindeutige Funktion von γ_1 in der rechten Halbebene ist (in ihr liegt $\cos 0 = 1$), weil γ_1 ja dann die Nullstellen des Radikanden

nicht umkreisen kann, und es ist jetzt möglich, den Wurzelwert vorzuschreiben. Es werde für γ_1 aus der rechten Halbebene immer der Wurzelwert gewählt, der sich auf stetigem Wege nach großem γ_1 in γ_1 überführen läßt. Die Abbildung $w = \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}$ läßt dann in der w -Ebene der rechten γ_1 -Halbebene eine w -Halbebene bis auf die aus Fig. 6 erkenntliche Modifikation entsprechen, wie man ohne Mühe erkennt. Dabei geht der Punkt $P_1^{(1)}$

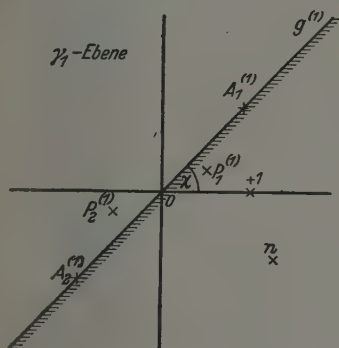


Fig. 5. Die Singularitäten des Integranden in (7).

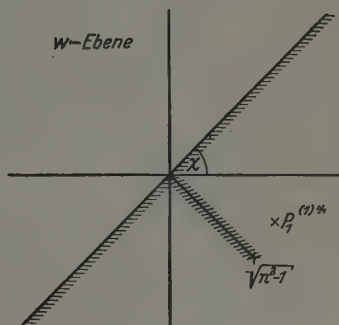


Fig. 6. Das durch $w = \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}$ vermittelte Bild der γ_1 -Ebene.

in den Punkt $P_1^{(1)*}$ über. Wählt man für γ_1 den Wurzelwert, welcher $P_1^{(1)}$ entspricht, so kann dieser sich, mit n^2 multipliziert, niemals mit $P_1^{(1)*}$ zu Null ergänzen. Die obige Festsetzung des Wurzelzeichens hat also zur Folge, daß $P_1^{(1)}$ kein Pol ist und als solcher nur $P_2^{(1)}$ in Frage kommt.

Zum Verständnis der Wahl $\sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2} \sim \gamma_1$ für große γ_1 sei (20), Abschnitt 2 für $d = 0$ angeschrieben. Es ist

$$\prod_{d=0}^{(1)} = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{2n^2 \gamma_1}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-ik_1(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)} \cdot \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi. \quad (8)$$

Entwickelt man hier

$$\frac{2n^2 \gamma_1}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}$$

bei $\gamma_1 = \infty$, so läßt sich $\prod_{d=0}^{(1)}$ bei obiger Wahl des Wurzelvorzeichens schreiben

$$\prod_{d=0}^{(1)} = \frac{e^{-ik_1 R}}{-ik_1 R} \cdot \frac{2n^2}{n^2 + 1} + \text{endlicher Wert.} \quad (9)$$

Bei anderer Wahl des Wurzelvorzeichens hätte sich ergeben

$$\prod_{d=0}^{(1)*} = \frac{e^{-ik_1 R}}{-ik_1 R} \cdot \frac{2n^2}{n^2-1} + \text{endlicher Wert}, \quad (10)$$

und man sieht, daß (10) für $n \rightarrow 1$ nicht, wie man erwarten muß, $\frac{e^{-ik_1 R}}{-ik_1 R}$ liefert, (9) dagegen sehr wohl.

Nach diesen Vorbereitungen, die den Integranden von (7) in der rechts der Geraden $g^{(1)}$ in Fig. 5 gelegenen Halbebene als eindeutig und regulär erwiesen haben, muß der Weg Λ_1^* in folgender Weise gewählt werden. Unter

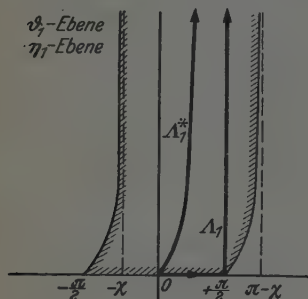


Fig. 7.

Die Abbildung $\vartheta_1 = \arccos \gamma_1$ der rechten γ_1 -Halbebene aus Fig. 5.

Ausnahme der Punkte der reellen Achse von 0 bis $+1$ ist das Bild der rechten γ_1 -Halbebene in der ϑ_1 -Ebene vermöge der Abbildungseigenschaften der Funktion $\gamma_1 = \cos \vartheta_1^1$ ein von zwei parallelen Kurvenstücken, welche sich asymptotisch im Unendlichen an die Parallelen zur imaginären Achse durch $\pi - \chi$ bzw. $-\chi$ anschmiegen, und dem Stück der reellen Achse zwischen $-\pi/2$ und $+\pi/2$ begrenzter Bereich der oberen ϑ_1 -Halbebene (s. Fig. 7). Der Integrationsweg Λ_1^* für η_1 (η_1 sei in der ϑ_1 -Ebene gedeutet) muß dann so gewählt werden, daß es infolge der Beziehung $\gamma_1 = \cos \eta_1 \cos \vartheta_0 - \sin \eta_1 \cos \varphi_1 \sin \vartheta_0$ aus (5) nicht geschehen kann, daß γ_1 außerhalb der rechten γ_1 -Halbebene zu liegen kommt. Wegen $0 \leq \vartheta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ bedeutet dies aber, da γ_1 für $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$ zwischen den Grenzen $\cos(\eta_1 + \vartheta_0)$ und $\cos(\eta_1 - \vartheta_0)$ schwankt, daß der Weg Λ_1^* in der η_1 -Ebene sich gleich weit von den ins Unendliche führenden Bereichsgrenzen entfernt halten muß. Λ_1^* ist daher eine Parallele zu den Bereichsgrenzen durch $\eta_1 = 0$, wie aus Fig. 7 ersichtlich. Es bleibt noch der formale Übergang von (22), Abschnitt 2, in (7) zu rechtfertigen. Es mag genügen, den Gedankengang dieser Überführung anzugeben, um die mathematischen Begründungen nicht allzusehr in die Breite gehen zu lassen, zumal sie im augenblicklichen Zusammenhang gegenüber der Weylschen Arbeit nichts Neues bringen²⁾. Zunächst zeigt man, daß mit gewissen Einschränkungen für ϑ_0 , die am Schluß der Betrachtung sich als hebbar erweisen, der Integrationsweg Λ_1 in (22), Abschnitt 2, nach dem Weg Λ_1^* verlagert werden

¹⁾ L. Bieberbach, Lehrb. d. Funktionentheorie I, S. 100. — ²⁾ Vgl. H. Weyl, l. c., S. 491.

kann. Bezeichnet λ einen Winkel, für den die Ungleichung gilt $0 \leq \lambda \leq \vartheta_0$, und bedeuten hier einmal vorübergehend $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ folgendes:

$$\alpha_1 = \cos \lambda \sin \eta_1 \cos \psi_1 + \sin \lambda \cos \eta_1,$$

$$\beta_1 = \sin \eta_1 \sin \psi_1,$$

$$\gamma_1 = -\sin \lambda \sin \eta_1 \cos \psi_1 + \cos \lambda \cos \eta_1,$$

dreht man also (Fig. 4) das System (x, y, z) um den Winkel λ mit der y -Achse als Drehachse, so ist

$$J(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1^*}^{\psi_1=2\pi} \int \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{\gamma_1 (n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2})} \cdot e^{-i(\alpha_1 x + \gamma_1 z)} \cdot e^{-i\gamma_1 d} \cdot \frac{\partial(\alpha_1, \beta_1)}{\partial(\eta_1, \psi_1)} d\eta_1 d\psi_1$$

eine Funktion von λ , welche für $\lambda = 0$ mit $\prod_{\text{II}}^{(1)}$ aus (22), Abschnitt 2, für $\lambda = \vartheta_0$ aber mit (7) übereinstimmt. Da man nun zeigen kann, daß $\frac{dJ(\lambda)}{d\lambda} = 0$ ist im Bereich $0 \leq \lambda \leq \vartheta_0$, so ist die Identität von (22), Abschnitt 2, mit (7) sichergestellt. Die folgende Auswertung kann also an (7) anknüpfen, das noch einmal angeschrieben sei:

$$\prod_{\text{II}}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1^*}^{\psi_1=2\pi} \int \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-iR \cos \eta_1} \cdot e^{-i\gamma_1 d} \cdot \sin \eta_1 d\eta_1 d\psi_1 \quad (7)$$

mit $\gamma_1 = \cos \eta_1 \cos \vartheta_0 - \sin \vartheta_0 \cos \psi_1 \sin \eta_1$, oder anders geschrieben:

$$\prod_{\text{II}}^{(1)} = \int_{\Delta_1^*} e^{-iR \cos \eta_1} \sin \eta_1 f_1^* d\eta_1 \quad (11)$$

mit

$$f_1^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i\gamma_1 d} d\psi_1. \quad (12)$$

Hier werde γ_1 statt ψ_1 eingeführt mit der Absicht, den sich dabei ergebenden Integrationsweg für γ_1 in Einzelwege zu zerlegen entsprechend den Singularitäten des Integranden. Es ist bei festen η_1 und ϑ_0 :

$$d\gamma_1 = \sin \vartheta_0 \sin \eta_1 \sin \psi_1 d\psi_1, \quad (13)$$

woraus sich ergibt:

$$d\gamma_1 = \sqrt{-W(\cos \eta_1, \gamma_1)} d\psi_1, \quad (14)$$

wenn man setzt

$$W(\cos \eta_1, \gamma_1) = \cos^2 \eta_1 - 2\gamma_1 \cos \eta_1 \cos \vartheta_0 + \gamma_1^2 - \sin^2 \vartheta_0. \quad (15)$$

Es gilt die Beziehung

$$W(\cos \eta_1, \gamma_1) = W(\gamma_1, \cos \eta_1), \quad (16)$$

die später benutzt wird. Dann schreibt sich (12) unter Benutzung von (14):

$$f_1^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^{(1)}} \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i\gamma_1 d} \cdot \frac{d\gamma_1}{\sqrt{W(\cos \eta_1, \gamma_1)}}. \quad (17)$$

Entsprechend $\gamma_1 = \cos \vartheta_0 \cos \eta_1 - \sin \vartheta_0 \cos \psi_1 \sin \eta_1$ durchläuft γ_1 dabei für ψ_1 von 0 bis 2π die geradlinige Verbindung von $\cos(\eta_1 + \vartheta_0)$ bis $\cos(\eta_1 - \vartheta_0)$ und wieder zurück

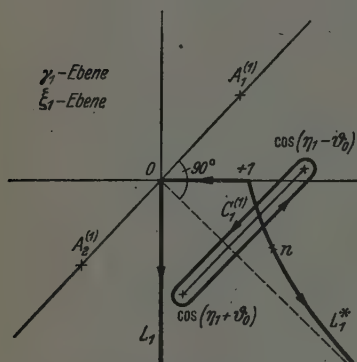


Fig. 8. Die Integrationswege in der γ_1 - und ξ_1 -Ebene.

Das Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{W(\cos \eta_1, \gamma_1)}$ ist durch (13) eindeutig bestimmt. Bei festem η_1 ist $\sqrt{W(\cos \eta_1, \gamma_1)}$ eine eindeutige Funktion in der γ_1 -Ebene, wenn man aus ihr die geradlinige Verbindung zwischen $\cos(\eta_1 + \vartheta_0)$ und $\cos(\eta_1 - \vartheta_0)$ ausnimmt. Will man diese beiden Pole des Integranden vermeiden, so wähle man für γ_1 als Integrationsweg etwa die im positiven Sinn um den Schnitt erstreckte Schleife $C_1^{(1)}$ (Fig. 8).

Wie man sich analog den Verhältnissen in den Figg. 5, 6 leicht überlegt, muß dann aber zur Erreichung des bereits festgelegten Wurzelwertes die Wurzel $\sqrt{W(\cos \eta_1, \gamma_1)}$ so erklärt werden, daß sie für großes γ_1 in γ_1 übergeht. In Fig. 8 sind γ_1 - und ξ_1 -Ebene (mit $\xi_1 = \cos \eta_1$ als Abkürzung) übereinandergelagert, wie dies für ϑ_1 und η_1 auch schon geschehen war (Fig. 7). L_1^* ist das Bild des Weges A_1^* in Fig. 7, L_1 dasjenige des Weges A_1 ebenda. Durchläuft η_1 den Weg A_1^* , so durchlaufen $\eta_1 + \vartheta_0$ und $\eta_1 - \vartheta_0$, in gleichen Abständen von η_1 auf Parallelen zur reellen Achse gelegen, Parallelkurven zu A_1^* . In der ξ_1 -Ebene liegen dann die Bildpunkte $\cos(\eta_1 \pm \vartheta_0)$ auf den Bildkurven zu diesen Parallelkurven beiderseits L_1^* . Zur Zerlegung von f_1^* in den Singularitäten entsprechende Teilintegrale hat man zunächst die Singularitäten des Integranden selbst zu finden. $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}$ sind schon oben als algebraische Singularitäten, $P_2^{(1)}$ als Pol erkannt. Neu hinzu kommen die Nullstellen von $W(\xi_1, \gamma_1) = 0$ bei festem ξ_1 . Aus (15) ergibt sich

$$\gamma_1 = \cos(\eta_1 \pm \vartheta_0). \quad (18)$$

Das sind aber gerade die Enden des ursprünglichen Integrationsweges, die man mithin als algebraische Pole des Integranden bezeichnen kann, wie oben geschehen. Ferner ist $\gamma_1 = \infty$ ein wesentlich singulärer Punkt, da der Integrand sich dort wie $\gamma_1^{-1} \cdot e^{-i\gamma_1 d}$ verhält.

Da die Zerlegung eines komplexen Integrals durch Abänderung des Integrationsweges gemäß dem Cauchyschen Hauptsatz der Funktionentheorie¹⁾ im einfachsten Falle einen in einem einfach zusammenhängenden Bereich eindeutigen analytischen

Integranden voraussetzt, hat man zunächst zu versuchen, aus der γ_1 -Ebene Punktmengen derart auszunehmen, daß der Integrand in den übrigen Punkten eindeutig und analytisch ist. Fig. 9 zeigt die ausgenommenen Punktmengen (stark ausgezogen), zu denen sich der unendlichferne Punkt gesellt. Das Kurvenstück zwischen $A_1^{(1)}$ und $A_2^{(1)}$ ist der Halbbogen einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 . Warum gerade diese Wahl der Verbindung von $A_1^{(1)}$ und $A_2^{(2)}$ getroffen wurde,

wird später deutlich werden. An der Wurzeldefinition der Wurzel $\sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}$ werde nach wie vor festgehalten, wonach sie für große γ_1 in γ_1 übergehen soll. Der in Fig. 9 schraffierte Bereich ist danach ein einfach zusammenhängender Bereich, in dem der Integrand von f_1^* eindeutig und analytisch ist, und das über die mit Durchlaufungssinn versehene Kurve erstreckte Integral ist nach dem Cauchyschen Hauptsatz der Funktionentheorie gleich Null. Ausgedrückt in den der Umkreisung der Singularitäten entsprechenden Kurvenstücken $C_2^{(1)}$, $C_3^{(1)}$, $C_4^{(1)}$ wird alsdann in sofort verständlicher Bezeichnungsweise

$$\int_{C_1^{(1)}} = - \int_{C_2^{(1)}} - \int_{C_3^{(1)}} - \int_{C_4^{(1)}}, \quad (19)$$

denn die Integration über die geradlinigen Verbindungsstücke von $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, $C_3^{(1)}$, $C_4^{(1)}$ ergibt Null, oder gemäß (11) mit $\xi_1 = \cos \eta_1$

$$2\pi i \prod_{\Pi}^{(1)} = \int_{L_1^*} e^{-iR\xi_1} d\xi_1 \int_{C_2^{(1)}} + \int_{L_1^*} e^{-iR\xi_1} d\xi_1 \int_{C_3^{(1)}} + \int_{L_1^*} e^{-iR\xi_1} d\xi_1 \int_{C_4^{(1)}}. \quad (20)$$

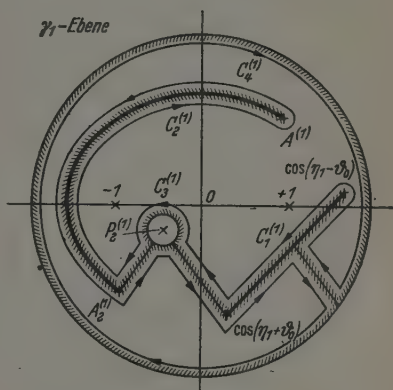


Fig. 9. Zur Veranschaulichung der Zerlegung des Integrals (17) in Teilintegrale.

¹⁾ L. Bieberbach, l. c., S. 118.

Hier handelt es sich nun um die eingehende Behandlung der Summanden. Es werde der Reihe nach gesetzt:

$$J_I^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1^*} e^{-iR\xi_1} d\xi_1 \int_{C_2^{(1)}} \frac{n^2\gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2\gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i\gamma_1 d} \cdot \frac{d\gamma_1}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}}, \quad (21)$$

$$J_{II}^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1^*} e^{-iR\xi_1} d\xi_1 \int_{C_3^{(1)}} \frac{n^2\gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2\gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i\gamma_1 d} \cdot \frac{d\gamma_1}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}}, \quad (22)$$

$$J_{III}^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1^*} e^{-iR\xi_1} d\xi_1 \int_{C_4^{(1)}} \frac{n^2\gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2\gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i\gamma_1 d} \cdot \frac{d\gamma_1}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}}, \quad (23)$$

und mit der Auswertung von (21) begonnen. Man kann schreiben

$$J_I^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(1)}} \frac{n^2\gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2\gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i\gamma_1 d} d\gamma_1 \int_{L_1^*} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1 \quad (24)$$

mit $W(\xi_1, \gamma_1) = \xi_1^2 + \gamma_1^2 - 2\gamma_1\xi_1 \cos \vartheta_0 - \sin^2 \vartheta_0$ gemäß (15). Als Funktion von ξ_1 bei festem γ_1 ist hier aber die Wurzel $\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}$ so festgelegt, daß sie für großes ξ_1 in $-\xi_1$ übergeht, denn gemäß (15) ist für $\vartheta_0 = 0$ zu setzen $\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)} = \gamma_1 - \xi_1$. Wegen $W(\xi_1, \gamma_1) = W(\gamma_1, \xi_1)$ nach (16) und wegen (18) ist

$$W(\xi_1, \gamma_1) = (\xi_1 - \xi_1^{(1)})(\xi_1 - \xi_1^{(2)}) \quad (25)$$

mit

$$\xi_1^{(1)} = \gamma_1 \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - \gamma_1^2}; \quad \xi_1^{(2)} = \gamma_1 \cos \vartheta_0 - \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - \gamma_1^2}. \quad (26)$$

Läuft γ_1 auf dem Ellipsenbogen zwischen $A_1^{(1)}$ und $A_2^{(1)}$, so wird festzustellen sein, welchen Wertevorrat dann $\xi_1^{(1)}$ und $\xi_1^{(2)}$ annehmen bei festem ϑ_0 , um

$$\int_{L_1^*} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1$$

für diese γ_1 sicherzustellen. Da lehren nun wieder die Abbildungseigenschaften der \cos -Funktion¹⁾, daß der Ellipsenbogen zwischen $A_1^{(1)}$ und $A_2^{(1)}$ in der ϑ_1 -Ebene durch die beiden stark ausgezogenen Strecken in Fig. 10 dargestellt wird. $\arccos \xi_1^{(1)}$ nimmt also, falls ϑ_1 auf der rechten der beiden Strecken liegt, für $0 \leq \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ alle Werte auf der Trägergeraden der Strecken an, die zwischen $\arccos(A_2^{(1)}) - \vartheta_0$ und $\arccos(-n) - \vartheta_0$ liegen, für ϑ_1 auf der linken der beiden Strecken aber die Werte zwischen

¹⁾ L. Bieberbach, l. c., S. 96 ff.

$\arccos(A_1^{(1)}) - \vartheta_0$ und $\arccos(-n) - \vartheta_0$. Das ergibt, in der γ_1 -Ebene dargestellt, folgendes: Falls γ_1 zwischen $A_2^{(1)}$ und $-n$ verläuft, wandert $\xi_1^{(1)}$ von

$$A_2^{(1)} \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - (A_2^{(1)})^2} = B_1^{(1)}$$

bis

$$-n \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - (-n)^2} = B_2^{(1)}.$$

Läuft γ_1 weiter von $-n$ bis $A_1^{(1)}$, so wandert $\xi_1^{(1)}$ weiter bis

$$A_1^{(1)} \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - (A_1^{(1)})^2} = B_3^{(1)}.$$

Analoges gilt für $\xi_1^{(2)}$. Bewegt sich ϑ_1 von $\arccos(A_2^{(1)})$ ab über die rechte der beiden Strecken und anschließend über die linke, so beginnt $\xi_1^{(2)}$ bei

$$A_2^{(1)} \cos \vartheta_0 - \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - (A_2^{(1)})^2} = B_1^{(2)},$$

durchläuft

$$-n \cos \vartheta_0 - \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - (-n)^2} = B_2^{(2)}$$

und endet in

$$A_1^{(1)} \cos \vartheta_0 - \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - (A_1^{(1)})^2} = B_3^{(2)}.$$

Man erkennt nun aus Fig. 10 und 11 sehr einfach, daß für $\vartheta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ die Punkte $B_1^{(1)}$ und $B_3^{(2)}$ gegen $+n$, $B_1^{(2)}$ und $B_3^{(1)}$ aber gegen $-n$ rücken. Da

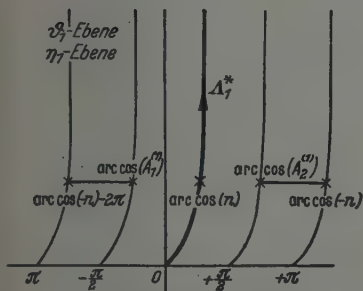


Fig. 10. Zur Veranschaulichung der Wurzeln von $W(\xi_1, \gamma_1) = 0$.

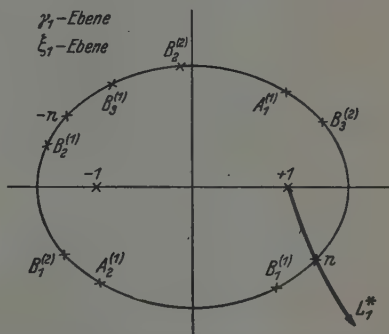


Fig. 11. Zur Veranschaulichung der Wurzeln von $W(\xi_1, \gamma_1) = 0$.

der Weg L_1^* über n führt, so ist bei Werten γ_1 , die sich auf $C_2^{(1)}$ bewegen, für alle ϑ_0 aus dem Intervall $0 \leq \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ der Integrand $\frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}}$ in (24) regulär. Es ist jetzt auch ersichtlich, warum $C_2^{(1)}$ als Ellipsenhalfbogen gewählt wurde. Für solche γ_1 sind $\xi_1^{(1)}$ und $\xi_1^{(2)}$ eben leicht zu übersehen

infolge der Abbildungseigentümlichkeit der \cos -Funktion, Parallelen zur reellen Achse in Ellipsen mit den Brennpunkten ± 1 überzuführen. Nun ist in (24) die Integration nach ξ_1 um so mehr auf die Umgebung von $\xi_1 = +1$ beschränkt, in einen je steiler von e^{-iR} abfallenden Weg der dort angegebene Integrationsweg verlagert werden kann. Es sei für einen Augenblick gesetzt

$$\xi_1 = 1 + a e^{i\psi},$$

dann ist zu finden, für welches ψ der Betrag von $e^{-iR\xi_1}$ am raschesten abfällt. Hier ist aber

$$|e^{-iR\xi_1}| = e^{aR \sin \psi}.$$

Daraus folgt für den steilsten Abfall $\sin \psi = -1$ oder $\psi = -\frac{\pi}{2}$. Gelänge es also L_1^* in einen Weg L_1^{**} überzuführen, der von $+1$ ausgehend parallel zur negativ imaginären Achse verlief, so wäre eine Reihendarstellung um $\xi_1 = +1$ des in Frage stehenden Integrals jedenfalls am ehesten möglich. Die Verlagerung von L_1^* nach L_1^{**} ist jedoch zunächst unmöglich, denn oben wurde gezeigt, daß die Stelle n die einzige ist, bei der ein von $+1$ ausgehender Integrationsweg, ohne die Regularität des Integranden zu stören, die Ellipse passieren darf. Setzt man $\xi_1 = 1 - it_1$ für die Punkte von L_1^{**} an, so gibt es einen Wert von t_1 , mit $t_1^0 + \varrho_1$ soll er bezeichnet werden, der dem Schnittpunkt von L_1^{**} mit der Ellipse entspricht. Zur Bestimmung des γ_1^0 , für das bei festem ϑ_0 gilt: $\xi_1 = 1 - i(t_1^0 + \varrho_1)$, hat man, da dieses ξ_1 im Bereiche von $\xi_1^{(1)}$ liegt, anzusetzen

$$1 - i(t_1^0 + \varrho_1) = \gamma_1^0 \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - (\gamma_1^0)^2} \quad (27)$$

gemäß (26). Dabei ist vorausgesetzt, daß ϑ_0 größer ist als das $\vartheta_0^{(1)}$, welches sich aus

$$B_1^{(1)} = A_2^{(1)} \cos \vartheta_0^{(1)} + \sin \vartheta_0^{(1)} \sqrt{1 - (A_2^{(1)})^2} = 1 - i(t_1^0 + \varrho_1) \quad (28)$$

ergibt. Für $\vartheta_0 < \vartheta_0^{(1)}$ ist die Verlagerung von L_1^* nach L_1^{**} gestattet, denn es werden dabei keine Singularitäten des Integranden von (24) überstrichen, wie man sich an Fig. 11 klarmacht. Im anderen komplizierteren Falle jedoch, der diesen umfaßt und besonders für $\vartheta_0 \sim \frac{\pi}{2}$ wichtig wird, ist die Verlagerung von L_1^* nach L_1^{**} nicht ohne weiteres gestattet. Man kann sich aber dann so helfen, daß man den Integrationsweg $C_2^{(1)}$ in zwei Hälften aufteilt mit der Trennungsstelle bei $\gamma_1 = \gamma_1^0$, wie es Fig. 12 veranschaulicht.

Integriert man über γ_1 längs $C_2^{(1)'}$, so durchläuft $\xi_1^{(1)}$ Ellipsenwerte zwischen $B_1^{(1)}$ und $1 - i(t_1^0 + \varrho_1)$. Die Wurzel

$$\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)} = \sqrt{(\xi_1 - \xi_1^{(1)})(\xi_1 - \xi_1^{(2)})}$$

ist für jedes γ_1 des Bogens $C_2^{(1)'}$ in der ξ_1 -Ebene eindeutig und analytisch, wenn von dieser die Werte der über den Punkt ∞ geführten geradlinigen Verbindung von $\xi_1^{(1)}$ nach dem entsprechenden $\xi_1^{(2)}$ ausgenommen werden (Fig. 12). Der Weg L_1^* kann dann ohne Überstreichen von Singularitäten des Integranden nach dem Cauchyschen Hauptsatz der Funktionentheorie in eine Reihe nacheinander zu durchlaufender Wege $L_{1\alpha}^{**}$, $L_{1\beta}^{**'}$, $L_{1\gamma}^{**}$, L_1^{***} verlagert werden. Hierbei sind diese Teilwege wie folgt charakterisiert (Fig. 12). $L_{1\alpha}^{**}$ führt parallel der imaginären Achse von $+1$ bis $1 - it_1^0$, $L_{1\beta}^{**'}$ umgeht von $1 - it_1^0$ bis $1 - i(t_1^0 + 2\varrho_1)$ den Punkt $1 - i(t_1^0 + \varrho_1)$ in

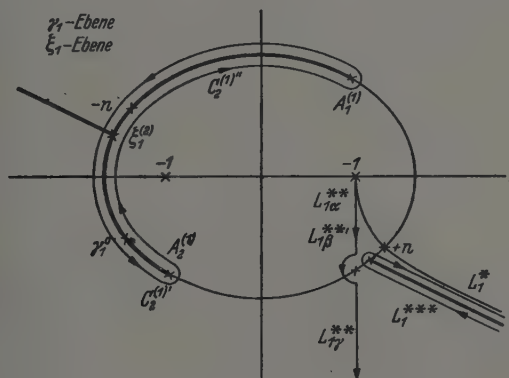


Fig. 12. Die Verlagerung des Weges L_1^* .

einem nach rechts geöffneten Halbkreis vom Radius ϱ_1 , $L_{1\gamma}^{**}$ führt dann von $1 - i(t_1^0 + 2\varrho_1)$ weiter parallel der imaginären Achse nach ∞ , und L_1^{***} schließlich umschlingt die geradlinige Verbindung von $\xi_1^{(1)}$ nach ∞ . Dabei sind auf dem oberen Ufer des Weges L_1^{***} die Wurzelwerte $\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}$ zu nehmen, welche für große ξ_1 in $-\xi_1$ übergehen, da diese Vorzeichenfestsetzung für ξ_1 auf L_1^* gültig ist. Für das Restintegral nach γ_1 über $C_2^{(1)''}$ nimmt $\xi_1^{(1)}$ nur Ellipsenwerte an, die links von $1 - i(t_1^0 + \varrho_1)$ liegen. L_1^* kann dann in einen Weg verlagert werden, der längs $L_{1\alpha}^{**}$ verläuft, dann analog $L_{1\beta}^{**'}$ den Punkt $1 - i(t_1^0 + \varrho_1)$ auf einem nach links geöffneten Halbkreis $L_{1\beta}^{**'}$ umgeht und längs $L_{1\gamma}^{**}$ ins Unendliche führt.

Es ist wichtig darauf hinzuweisen, daß die in Fig. 12 angenommene Lage des n mit einem Realteil von n größer als 1 für $\varepsilon_2 > 1$ eine Folge der

Maxwellschen Theorie ist [vgl. (1)]. $\varepsilon_2 > 1$ gilt aber für Leiter und elektromagnetische Wellen im engeren Sinne sicher und ist auch für den Übergang zu reellem n für $\sigma_2 \rightarrow 0$ notwendig so anzunehmen. Daß der Realteil von n kleiner als 1 ist, kommt in der Metalloptik vor, deren analoge Probleme also an dieser Stelle eine besondere, hier nicht durchgeführte Behandlung erfordern, die aber der hier vorgetragenen völlig analog ist.

Damit sind alle Vorkehrungen getroffen, um $J_I^{(1)}$ gemäß (24) auszuwerten. Es ist zu setzen:

$$J_I^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(1)}} \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i\gamma_1 d} d\gamma_1 \int_{L^*} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1,$$

und ausführlicher:

$$\begin{aligned} J_I^{(1)} = & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(1)'}} () d\gamma_1 \int_{L_{1\alpha}^{**}} () d\xi_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(1)'}} () d\gamma_1 \int_{L_{1\beta}^{**'}} () d\xi_1 + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(1)'}} () d\gamma_1 \int_{L_{1\gamma}^{**}} () d\xi_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(1)'}} () d\gamma_1 \int_{L_{1\gamma}^{***}} () d\xi_1 + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(1)''}} () d\gamma_1 \int_{L_{1\alpha}^{**}} () d\xi_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(1)''}} () d\gamma_1 \int_{L_{1\beta}^{***'}} () d\xi_1 + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(1)''}} () d\gamma_1 \int_{L_{1\gamma}^{**}} () d\xi_1, \end{aligned} \quad (29)$$

oder mit abkürzender Bezeichnung der Summanden der Reihe nach:

$$J_I^{(1)} = J_{I\alpha}^{(1)} + J_{I\beta}^{(1)} + J_{I\gamma}^{(1)} + J_{I\delta}^{(1)} + J_{I\epsilon}^{(1)} + J_{I\zeta}^{(1)} + J_{I\eta}^{(1)}. \quad (30)$$

Es sei das eine Sonderstellung einnehmende Integral

$$J_{I\delta}^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(1)'}} \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i\gamma_1 d} d\gamma_1 \int_{L_1^{***}} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1 \quad (31)$$

zuerst behandelt und insbesondere sein Teilintegral

$$J_{I\delta}^{(1)*} = \int_{L_1^{***}} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1 = \int_{L_1^{***}} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{(\xi_1 - \xi_1^{(1)})(\xi_1 - \xi_1^{(2)})}} d\xi_1. \quad (32)$$

Setzt man hier $\xi_1 = \xi_1^{(1)} + \tau_1 (\xi_1^{(1)} - \xi_1^{(2)})$, so ergibt sich

$$J_{1\delta}^{(1)*} = e^{-iR\xi_1^{(1)}} \int_{L_{1\tau_1}^{***}} \frac{e^{-iR\tau_1(\xi_1^{(1)} - \xi_1^{(2)})}}{\sqrt{\tau_1(1+\tau_1)}} d\tau_1,$$

wobei das positive Vorzeichen der Wurzel auf dem unteren Teil der Schleife zu nehmen ist. Setzt man weiter

$$\sigma_1 = 2\tau_1 + 1,$$

so ist

$$J_{1\delta}^{(1)*} = e^{-\frac{iR}{2}(\xi_1^{(1)} + \xi_1^{(2)})} \int_{L_{1\sigma_1}^{***}} \frac{e^{-\frac{iR\sigma_1}{2}(\xi_1^{(1)} - \xi_1^{(2)})}}{\sqrt{\sigma_1^2 - 1}} d\sigma_1.$$

Setzt man $v_1 = -\frac{R}{2}(\xi_1^{(1)} - \xi_1^{(2)})$, wobei, wie aus Fig. 11 ersichtlich, das Argument von v_1 der oberen Halbebene angehört, so ergibt sich

$$J_{1\delta}^{(1)*} = -e^{-\frac{iR}{2}(\xi_1^{(1)} + \xi_1^{(2)})} \int_{L_{1\sigma_1}^{***}} (\sigma_1^2 - 1)^{-1/2} e^{iv_1\sigma_1} d\sigma_1.$$

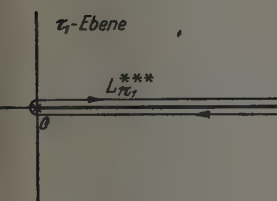


Fig. 13. Der Weg $L_{1\tau_1}^{***}$

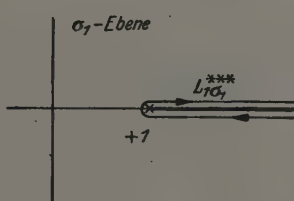


Fig. 14. Der Weg $L_{1\sigma_1}^{***}$

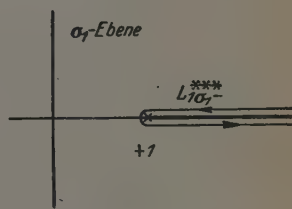


Fig. 15. Der Weg $L_{1\sigma_1}^{***}$

Hier ist nun aber

$$\int_{L_{1\sigma_1}^{***}} e^{iv_1\sigma_1} (\sigma_1^2 - 1)^{-1/2} d\sigma_1 = H_0^{(1)}(v_1) \cdot \pi i$$

$$\text{für } \delta \leq \arg v_1 \leq \pi - \delta \quad (0 < \delta < \frac{\pi}{2}).$$

$H_0^{(1)}$ ist die Hankelsche Funktion erster Art und nullter Ordnung. Mithin ist endgültig:

$$J_{1\delta}^{(1)*} = -\pi i \cdot e^{-\frac{iR}{2}(\xi_1^{(1)} + \xi_1^{(2)})} \cdot H_0^{(1)}\left[-\frac{R}{2}(\xi_1^{(1)} - \xi_1^{(2)})\right]. \quad (93)$$

¹⁾ R. Courant u. D. Hilbert, Meth. d. math. Phys. I, 2. Aufl., S. 418.

Also ist nach (31):

$$J_{1\delta}^{(1)} = - \frac{1}{2} \int_{C_2^{(1)'}} \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i\gamma_1 d} \cdot e^{-\frac{iR}{2}(\xi_1^{(1)} + \xi_1^{(2)})} \cdot H_0^{(1)} \left[\frac{R}{2} (\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}) \right] d\gamma_1,$$

und nach (26):

$$J_{1\delta}^{(1)} = - \frac{1}{2} \int_{C_2^{(1)'}} \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i\gamma_1 d} \cdot e^{-iR\gamma_1 \cos \vartheta_0} \cdot H_0^{(1)} (-R \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - \gamma_1^2}) d\gamma_1.$$

Setzt man hier

$$\lambda_1 = -\sqrt{1 - \gamma_1^2} \quad (34)$$

und

$$R \cos \vartheta_0 = z; \quad R \cdot \sin \vartheta_0 = r$$

(vgl. Fig. 2), so wird

$$J_{1\delta}^{(1)} = + \frac{1}{2} \int_{C_{2\lambda_1}^{(1)'}} \frac{n^2 \sqrt{1 - \lambda_1^2} + \sqrt{n^2 - \lambda_1^2}}{\sqrt{n^2 - \lambda_1^2} - n^2 \sqrt{1 - \lambda_1^2}} \cdot e^{id\sqrt{1 - \lambda_1^2}} \cdot e^{iz\sqrt{1 - \lambda_1^2}} \cdot H_0^{(1)}(r\lambda_1) \cdot \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 - \lambda_1^2}} d\lambda_1. \quad (35)$$

Gemäß (34) ist über den Weg $C_{2\lambda_1}^{(1)'}$ folgendes auszusagen: Er verläuft wegen $-\sqrt{1 - \gamma_1^2} = -\sin \vartheta_1$, wie ein Blick auf Fig. 10 lehrt, für γ_1 zwischen $A_2^{(1)}$ und γ_1^0 zwischen $-n$ und $-\sqrt{1 - (\gamma_1^0)^2}$ zu beiden Seiten der Ellipse der γ_1 -Ebene (Fig. 11). Dabei ändert beim Umlaufen von $\lambda_1 = -n$ die Wurzel $\sqrt{n^2 - \lambda_1^2}$ ihr Vorzeichen. Entsprechend den beiden Bestandteilen: $C_{2\lambda_1 a}^{(1)'}$, $C_{2\lambda_1 i}^{(1)'}$ von $C_{2\lambda_1}^{(1)'}$, $C_{2\lambda_1 a}^{(1)'}$ der Weg am äußeren und $C_{2\lambda_1 i}^{(1)'}$ der Weg am inneren Ufer des Ellipsenbogens $C_{2\lambda_1}^{(1)'}$, kann man zerlegen

$$\begin{aligned} J_{1\delta}^{(1)} &= J_{1\delta a}^{(1)} + J_{1\delta i}^{(1)} \\ &= + \frac{1}{2} \int_{C_{2\lambda_1 a}^{(1)'}} \frac{n^2 \sqrt{1 - \lambda_1^2} + \sqrt{n^2 - \lambda_1^2}}{\sqrt{n^2 - \lambda_1^2} - n^2 \sqrt{1 - \lambda_1^2}} \cdot e^{id\sqrt{1 - \lambda_1^2}} \cdot e^{iz\sqrt{1 - \lambda_1^2}} \cdot H_0^{(1)}(r\lambda_1) \cdot \frac{\lambda_1}{r\sqrt{1 - \lambda_1^2}} d\lambda_1 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{C_{2\lambda_1 i}^{(1)'}} \frac{n^2 \sqrt{1 - \lambda_1^2} - \sqrt{n^2 - \lambda_1^2}}{-\sqrt{n^2 - \lambda_1^2} - n^2 \sqrt{1 - \lambda_1^2}} \cdot e^{id\sqrt{1 - \lambda_1^2}} \cdot e^{iz\sqrt{1 - \lambda_1^2}} \cdot H_0^{(1)}(r\lambda_1) \cdot \frac{\lambda_1}{r\sqrt{1 - \lambda_1^2}} d\lambda_1. \quad (36) \end{aligned}$$

Zunächst werde $J_{1\delta a}^{(1)}$ vorgenommen.

$H_0^{(1)}(r\lambda_1)$ genügt der Besselschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2[H_0^{(1)}(r\lambda_1)]}{d(r\lambda_1)^2} + \frac{1}{r\lambda_1} \cdot \frac{d[H_0^{(1)}(r\lambda_1)]}{d(r\lambda_1)} + H_0^{(1)}(r\lambda_1) = 0,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{d}{d\lambda_1} \left[\lambda_1 \cdot \frac{dH_0^{(1)}(r\lambda_1)}{d(r\lambda_1)} \right] = -r\lambda_1 \cdot H_0^{(1)}(r\lambda_1).$$

Dann liefert partielle Integration

$$\begin{aligned} J_{1\partial a}^{(1)} = & -\frac{1}{2} \cdot \frac{(n^2\sqrt{1-\lambda_1^2} + \sqrt{n^2-\lambda_1^2}) \cdot e^{iz\sqrt{1-\lambda_1^2}} e^{iz\sqrt{1-\lambda_1^2}} \cdot \lambda_1}{(\sqrt{n^2-\lambda_1^2} - n^2\sqrt{1-\lambda_1^2}) r \cdot \sqrt{1-\lambda_1^2}} \\ & \cdot \frac{dH_0^{(1)}(r\lambda_1)}{d(r\lambda_1)} \Big|_{-\sqrt{1-(r\lambda_1)^2}}^{-n} + \\ & + \frac{1}{2} \int \frac{d}{d\lambda_1} \left(\frac{n^2\sqrt{1-\lambda_1^2} + \sqrt{n^2-\lambda_1^2}}{\sqrt{n^2-\lambda_1^2} - n^2\sqrt{1-\lambda_1^2}} \cdot \right. \\ & \left. C_{2\lambda_1 a}^{(1)'} \cdot \frac{e^{iz\sqrt{1-\lambda_1^2}} \cdot e^{iz\sqrt{1-\lambda_1^2}}}{r \cdot \sqrt{1-\lambda_1^2}} \right) \lambda_1 \frac{dH_0^{(1)}(r\lambda_1)}{d(r\lambda_1)} d\lambda_1. \end{aligned} \quad (37)$$

Zur weiteren Auswertung wird eine asymptotische Darstellung von $\frac{dH_0^{(1)}(r\lambda_1)}{d(r\lambda_1)}$ für große Werte des Argumentes im 2. Quadranten benötigt. Eine solche gewinnt man aus der für $-\pi < \arg w < 2\pi$ geltenden, aus einem sehr allgemeinen Lemma von Watson hergeleiteten Darstellung für $H_0^{(1)}(w)$:

$$H_0^{(1)}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi w}} \cdot e^{i(w - \frac{\pi}{4})} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \frac{(o, m)}{(-2iw)^m} + O(|w|^{-M}) \right]^1 \quad (38)$$

mit

$$(o, m) = \frac{(-1)^2 (-3)^2 \dots [-(2m-1)]^2}{2^2 m \cdot m!}; \quad (o, o) = 1$$

¹⁾ R. Weyrich, Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, S. 46 (1937).

und der folgenden Bedeutung des Symbols $O()$ nach Bachmann und Landau: $|O(w^{-M})| < Q \cdot |w|^{-M}$, worin Q eine geeignete positive Konstante ist. Für $M = 1$ ergibt sich aus (38):

$$H_0^{(1)}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi w}} \cdot e^{i(w - \pi/4)} [1 + O(|w|^{-1})] \quad (39)$$

und daraus durch Differentiation

$$\frac{dH_0^{(1)}(w)}{dw} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} [i w^{-1/2} \cdot e^{i(w - \pi/4)} + e^{i(w - \pi/4)} \cdot O(|w|^{-3/2})]. \quad (40)$$

Dieses in (37) eingesetzt liefert mit $\zeta_1 = \sqrt{n^2 - \lambda_1^2}$:

$$\begin{aligned} J_{1\partial a}^{(1)} = & - e^{i d \sqrt{1 - \lambda_1^2}} \cdot e^{i(r\lambda_1 - \pi/4)} \cdot e^{i z \sqrt{1 - \lambda_1^2}} \times \\ & \times \left[\frac{i \sqrt{\lambda_1} (n^2 \sqrt{1 - \lambda_1^2} + \sqrt{n^2 - \lambda_1^2}) r^{-3/2}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1 - \lambda_1^2} (\sqrt{n^2 - \lambda_1^2} - n^2 \sqrt{1 - \lambda_1^2})} + O(r^{-5/2}) \right] \Big|_{-n}^{-\sqrt{1 - (\gamma_1^0)^2}} \\ & - \frac{1}{2} \int_{C_{2\lambda_1 a}^{(1)'}} \frac{\lambda_1}{\sqrt{n^2 - \lambda_1^2}} \cdot \frac{d}{d\zeta_1} \left(\frac{n^2 \sqrt{1 - n^2 + \zeta_1^2} + \zeta_1}{\zeta_1 - n^2 \sqrt{1 - n^2 + \zeta_1^2}} \right) \cdot \\ & \cdot \frac{e^{i d \sqrt{1 - \lambda_1^2}} \cdot e^{i z \sqrt{1 - \lambda_1^2}}}{r \sqrt{1 - \lambda_1^2}} \Bigg) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{i(r\lambda_1 - \pi/4)} \cdot \\ & \cdot [i(r\lambda_1)^{-1/2} + O(|r\lambda_1|^{-3/2})] \lambda_1 \cdot d\lambda_1. \end{aligned} \quad (41)$$

Analog ergibt sich für $J_{1\partial i}^{(1)}$ aus (36):

$$\begin{aligned} J_{1\partial i}^{(1)} = & - e^{i d \sqrt{1 - \lambda_1^2}} \cdot e^{i(r\lambda_1 - \pi/4)} \cdot e^{i z \sqrt{1 - \lambda_1^2}} \times \\ & \times \left[\frac{i \sqrt{\lambda_1} (n^2 \sqrt{1 - \lambda_1^2} - \sqrt{n^2 - \lambda_1^2}) r^{-3/2}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1 - \lambda_1^2} (-n^2 \sqrt{1 - \lambda_1^2} - \sqrt{n^2 - \lambda_1^2})} + O(r^{-5/2}) \right] \Big|_{-n}^{-\sqrt{1 - (\gamma_1^0)^2}} \\ & - \frac{1}{2} \int_{C_{2\lambda_1 i}^{(1)'}} \frac{\lambda_1}{\sqrt{n^2 - \lambda_1^2}} \cdot \frac{d}{d\zeta_1} \left(\frac{n^2 \sqrt{1 - n^2 + \zeta_1^2} - \zeta_1}{-\zeta_1 - n^2 \sqrt{1 - n^2 + \zeta_1^2}} \right) \cdot \\ & \cdot \frac{e^{i d \sqrt{1 - \lambda_1^2}} \cdot e^{i z \sqrt{1 - \lambda_1^2}}}{r \sqrt{1 - \lambda_1^2}} \Bigg) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{i(r\lambda_1 - \pi/4)} \cdot \\ & \cdot [i(r\lambda_1)^{-1/2} + O(|r\lambda_1|^{-3/2})] \lambda_1 \cdot d\lambda_1. \end{aligned} \quad (42)$$

Mögen in (41) der erste und zweite Summand bzw. mit $J_{I\delta\alpha\alpha}^{(1)}$ und $J_{I\delta\alpha\beta}^{(1)}$ in (42) bzw. mit $J_{I\delta i\alpha}^{(1)}$ und $J_{I\delta i\beta}^{(1)}$ bezeichnet werden, dann ist gemäß (36)

$$J_{I\delta}^{(1)} = J_{I\delta\alpha\alpha}^{(1)} + J_{I\delta\alpha\beta}^{(1)} + J_{I\delta i\alpha}^{(1)} + J_{I\delta i\beta}^{(1)}. \quad (43)$$

Mit $n + \lambda_1 = m_1$, $dm_1 = d\lambda_1$ wird

$$J_{I\delta\alpha\beta}^{(1)} = - \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi} r^{3/2}} \int_{C_{2m_1a}^{(1)'}} \left[\frac{\lambda_1 \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{n - \lambda_1}} \cdot \frac{d}{d\zeta_1} \left(\frac{n^3 \sqrt{1 - n^2 + \zeta_1^2} + \zeta_1}{\zeta_1 - n^2 \sqrt{1 - n^2 + \zeta_1^2}} \right) \cdot \frac{e^{id\sqrt{1-\lambda_1^2}} \cdot e^{iz\sqrt{1-\lambda_1^2}}}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} \right] \cdot e^{-ir n} \cdot \{i + O(|r\lambda_1|^{-1/2})\} \cdot \frac{e^{irm_1}}{\sqrt{m_1}} dm_1. \quad (44)$$

Hier ist $F_1(m_1) = []$ eine bei $m_1 = 0$, d. h. bei $\lambda_1 = -n$ reguläre Funktion, welche man sich in der Umgebung von $m_1 = 0$ als Potenzreihe entwickelt denke:

$$F_1(m_1) = [] = F_1(0) + m_1 F_1'(0) + \frac{m_1^2}{2!} F_1''(0) + \dots \quad (45)$$

Dann hat man zunächst auszuwerten

$$- \int_{C_{2m_1a}^{(1)'}} F_1(0) \frac{e^{irm_1}}{\sqrt{m_1}} dm_1 \text{ und darin wieder}$$

$$A_{m_1}^0 = \int_{C_{2m_1a}^{(1)'}} \frac{e^{irm_1}}{\sqrt{m_1}} dm_1, \quad (46)$$

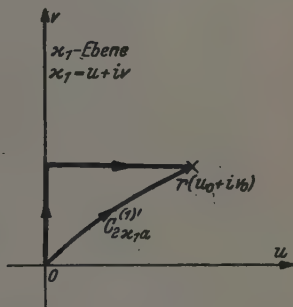


Fig. 16. Zur Auswertung von (47).

wobei der Weg $C_{2m_1a}^{(1)'}$ das von $-\sqrt{1-(\gamma_1^0)^2}$ nach $-n$ verlaufende Stück $C_{2\lambda_1 a}^{(1)'}$ der Ellipse ist, nur um n mit dem Ende nach Null verschoben. Setzt man

$$x_1 = r m_1, \quad dx_1 = r dm_1,$$

so wird

$$A_{m_1}^0 = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{C_{2x_1 a}^{(1)'}} \frac{e^{ix_1}}{\sqrt{x_1}} dx_1 = \frac{1}{\sqrt{r}} A_{x_1}^0. \quad (47)$$

Das Integral läßt sich nach Verlagerung von $C_{2\kappa_1 a}^{(1)'}$ in ein Stück der imaginären Achse von 0 bis $iv_0 r$ und von da anschließend in eine Parallele zur reellen Achse bis $r(u_0 + iv_0)$ bequem auswerten:

$$\begin{aligned}
 A_{\kappa_1}^0 &= \int_{C_{2\kappa_1 a}^{(1)'}} \frac{e^{i\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_1}} d\kappa_1 = \int_0^{irv_0} \frac{e^{i\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_1}} d\kappa_1 + \int_{irv_0}^{r(u_0 + iv_0)} \frac{e^{i\kappa_1}}{\sqrt{\kappa_1}} d\kappa_1 \\
 &= \int_0^{rv_0} \frac{e^{-v} i dv}{\sqrt{iv}} + \int_0^{ru_0} \frac{e^{-rv_0 + iu}}{\sqrt{irv_0 + u}} du = \sqrt{i} \int_0^{rv_0} e^{-v} v^{-1/2} dv + \\
 &\quad + e^{-rv_0} \int_0^{ru_0} \frac{e^{iu}}{\sqrt{irv_0 + u}} du = \sqrt{i} \int_0^{rv_0} e^{-v} v^{-1/2} dv - \sqrt{i} \int_{rv_0}^{\infty} e^{-v} v^{-1/2} dv + \\
 &\quad + O\left(e^{-rv_0} \int_0^{ru_0} \frac{du}{\sqrt{n^2 + rv_0^2}}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}} \Gamma(1/2) + O\left(\int_{rv_0}^{\infty} \frac{e^{-v} dv}{\sqrt{rv_0}}\right) + \\
 &\quad + O\left(e^{-rv_0} \frac{ru_0}{\sqrt{rv_0}}\right) = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{e^{-rv_0}}{\sqrt{r}}\right) + O(\sqrt{r} e^{-rv_0}) \\
 &= \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} + O(r^{1/2} e^{-rv_0}),
 \end{aligned}$$

worin v_0 eine positive Konstante bedeutet.

Nach (47) ist dann $A_{m_1}^0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} + O(e^{-rv_0})$, also

$$- \int_{C_{2m_1 a}^{(1)'}} F_1(0) \cdot \frac{e^{ir m_1}}{\sqrt{m_1}} dm_1 = F_1(0) A_{m_1}^0 = F_1(0) \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} + O(e^{-rv_0}) \right]. \quad (48)$$

Es bleibt mithin die Abschätzung übrig von

$$- \int_{C_{2m_1 a}^{(1)'}} \left(m_1 F_1'(0) + \frac{m_1^3}{2!} F_1''(0) + \dots \right) \frac{e^{ir m_1}}{\sqrt{m_1}} dm_1 = A_{m_1}^1. \quad (49)$$

Setzt man wieder $\kappa_1 = r m_1$, so wird

$$\begin{aligned}
 A_{m_1}^1 &= \int_{C_{2\kappa_1 a}^{(1)'}} \sqrt{\frac{\kappa_1}{r}} \left(F_1'(0) + \frac{m_1}{2!} F_1''(0) + \frac{m_1^3}{3!} F_1'''(0) + \dots \right) \frac{e^{i\kappa_1}}{r} d\kappa_1 \\
 &= \frac{1}{r\sqrt{r}} \int_{C_{2\kappa_1 a}^{(1)'}} \left(F_1'(0) + \frac{m_1}{2!} F_1''(0) + \frac{m_1^3}{3!} F_1'''(0) + \dots \right) e^{i\kappa_1} \sqrt{\kappa_1} d\kappa_1.
 \end{aligned}$$

Hier denke man sich die Differentiationen ausgeführt. Dann taucht in jedem Summanden der Faktor $e^{id\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{iz\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{-irn}$ auf, wie aus (44) hervorgeht. Dieser Faktor darf also vor die Klammer gezogen werden, und in der Klammer bleibt jedenfalls eine auf dem Integrationsweg endliche analytische Funktion zurück, so daß bei grober, aber für den beabsichtigten Grad der Näherung ausreichender Abschätzung des Integrals geschrieben werden darf

$$A_{m_1}^1 = e^{-irn} \cdot e^{id\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{iz\sqrt{1-n^2}} O\left(\frac{1}{r\sqrt{r}}\right). \quad (50)$$

Nun ist nach (44)

$$J_{1\delta\alpha\beta}^{(1)} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi} r^{3/2}} (F_1(0) A_{m_1}^0 + A_{m_1}^1)$$

und nach (48) und (50)

$$J_{1\delta\alpha\beta}^{(1)} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi} r^{3/2}} \left\{ F_1(0) \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} + O(e^{-rv_0}) \right] + e^{-irn} \cdot e^{id\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{iz\sqrt{1-n^2}} O\left(\frac{1}{r\sqrt{r}}\right) \right\}$$

$$J_{1\delta\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} F_1(0) + e^{-irn} \cdot e^{id\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{iz\sqrt{1-n^2}} \cdot O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (51)$$

Nach (44) ist

$$F_1(m_1) = \frac{\lambda_1 \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{n - \lambda_1}} \frac{d}{d\zeta_1} \left(\frac{n^2 \sqrt{1-n^2 + \zeta_1^2} + \zeta_1}{\zeta_1 - n^2 \sqrt{1-n^2 + \zeta_1^2}} \cdot \frac{e^{id\sqrt{1-\lambda_1^2}} \cdot e^{iz\sqrt{1-\lambda_1^2}}}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} \right) [i + O(|r\lambda_1|^{-1/2})] \cdot e^{-irn},$$

an der Stelle $\lambda_1 = -n$ oder $\zeta_1 = 0$

$$\begin{aligned} F_1(0) &= -\frac{n}{\sqrt{2}} e^{-irn} [1 + O(r^{-1/2})] \frac{d}{d\zeta_1} \left(\frac{n^2 \sqrt{1-n^2 + \zeta_1^2} + \zeta_1}{\zeta_1 - n^2 \sqrt{1-n^2 + \zeta_1^2}} \cdot \frac{e^{id\sqrt{1-n^2 + \zeta_1^2}} (d+z)}{\sqrt{1-n^2 + \zeta_1^2}} \right)_{\zeta_1=0} \\ &= \frac{n}{\sqrt{2}} \cdot e^{-irn} [1 + O(r^{-1/2})] \left(\frac{e^{id\sqrt{1-n^2}} (d+z)}{\sqrt{1-n^2}} \cdot \frac{-2n^2 \sqrt{1-n^2}}{n^4 (1-n^2)} \right) \\ &= -e^{-irn+iz\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{id\sqrt{1-n^2}} d \left(\frac{\sqrt{2}}{n(n^2-1)} + O(r^{-1/2}) \right). \end{aligned}$$

Also ist endgültig nach (51)

$$J_{I\delta a\beta}^{(1)} = -e^{-irn+iz\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{i\sqrt{1-n^2}d} \left(\frac{1}{r^2(n^2-1) \cdot n} + O(r^{-5/2}) \right). \quad (52)$$

Analog ergibt sich $J_{I\delta i\beta}^{(1)}$ nach (42) zu

$$J_{I\delta i\beta}^{(1)} = -e^{-irn+iz\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{i\sqrt{1-n^2}d} \left(\frac{1}{r^2(n^2-1)n} + O(r^{-5/2}) \right). \quad (53)$$

Die Addition der Bestandteile $J_{I\delta a\alpha}^{(1)}$, $J_{I\delta i\alpha}^{(1)}$ aus (43) gemäß (41) und (42) liefert:

$$\begin{aligned} J_{I\delta a\alpha}^{(1)} + J_{I\delta i\alpha}^{(1)} &= e^{id\sqrt{\gamma_1^0{}^2}} \cdot e^{i\left(-r\sqrt{1-(\gamma_1^0{}^2)} - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot e^{iz\sqrt{\gamma_1^0{}^2}} \\ &\cdot \left[r^{-3/2} \left(\frac{\sqrt{1-(\gamma_1^0{}^2)}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\gamma_1^0{}^2}} \cdot \frac{n^2\sqrt{\gamma_1^0{}^2} + \sqrt{n^2-1} + (\gamma_1^0{}^2)}{\sqrt{n^2-1} + (\gamma_1^0{}^2) - n^2\sqrt{\gamma_1^0{}^2}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{i\sqrt{1-(\gamma_1^0{}^2)}(n^2\sqrt{\gamma_1^0{}^2} - \sqrt{n^2-1} + (\gamma_1^0{}^2))}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\gamma_1^0{}^2}(n^2\sqrt{\gamma_1^0{}^2} + \sqrt{n^2-1} + (\gamma_1^0{}^2))} \right) + O(r^{-5/2}) \right]; \\ J_{I\delta a\alpha}^{(1)} + J_{I\delta i\alpha}^{(1)} &= +e^{-ir\sqrt{1-(\gamma_1^0{}^2)}-iz\gamma_1^0} \cdot e^{-id\gamma_1^0} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1-(\gamma_1^0{}^2)}}{\sqrt{2\pi}} \\ &\cdot \left[\frac{4n^2\sqrt{n^2-1} + (\gamma_1^0{}^2)}{n^2-1 + (\gamma_1^0{}^2)(1-n^4)} \cdot r^{-3/2} + O(r^{-5/2}) \right]. \quad (54) \end{aligned}$$

Addiert man (52), (53) und (54), so ergibt sich gemäß (43)

$$\begin{aligned} J_{I\delta}^{(1)} &= -e^{-irn+iz\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{i\sqrt{1-n^2}d} \left(\frac{2}{r^2} \cdot \frac{1}{n(n^2-1)} + O(r^{-5/2}) \right) + \\ &+ e^{-ir\sqrt{1-(\gamma_1^0{}^2)}-iz\gamma_1^0} \cdot e^{-id\gamma_1^0} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1-(\gamma_1^0{}^2)}}{\sqrt{2\pi}} \\ &\cdot \left[\frac{4n^2\sqrt{n^2-1} + (\gamma_1^0{}^2)}{n^2-1 + (\gamma_1^0{}^2)(1-n^4)} \cdot r^{-3/2} + O(r^{-5/2}) \right]. \quad (55) \end{aligned}$$

Damit hat ein Summand aus (30) seine Auswertung erfahren, und es folge nun die Betrachtung von

$$J_{I\beta}^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(1)'}} \frac{n^2\gamma_1 - \sqrt{n^2-1+\gamma_1^2}}{n^2\gamma_1 + \sqrt{n^2-1+\gamma_1^2}} \cdot e^{-i\gamma_1 d} \int_{L_{1\beta}^{**'}} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1 \quad (56)$$

und hier zunächst wieder die von

$$J_{I\beta}^{(1)*} = \int_{L_{1\beta}^{**'}} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1. \quad (57)$$

Setzt man $\xi_1 = 1 - i(t_1^0 + \varrho_1) + \varrho_1 e^{i\varepsilon}$ ($\frac{\pi}{2} \leq \varepsilon \leq \frac{3}{2}\pi$), so ist

$$J_{1\beta}^{(1)*} = \int_{\varepsilon = \frac{\pi}{2}}^{\varepsilon = \frac{3}{2}\pi} \frac{e^{-iR[1-i(t_1^0 + \varrho_1) + \varrho_1 e^{i\varepsilon}]}}{\sqrt{(\xi_1 - \xi_1^{(1)})(\xi_1 - \xi_1^{(2)})}} \cdot i\varrho_1 e^{i\varepsilon} d\varepsilon = e^{-iR} \cdot \frac{J_{1\beta}^{(1)*}}{e^{-iR}},$$

$$\left| \frac{J_{1\beta}^{(1)*}}{e^{-iR}} \right| \leq \int_{\varepsilon = \frac{\pi}{2}}^{\varepsilon = \frac{3}{2}\pi} \frac{e^{-(t_1^0 + \varrho_1)R + \varrho_1 R \sin \varepsilon}}{\sqrt{\varrho_1 \cdot c_1}} \cdot \varrho_1 d\varepsilon = \frac{\sqrt{\varrho_1}}{\sqrt{c_1}} \cdot$$

$$e^{-(t_1^0 + \varrho_1)R} \int_{\varepsilon = \frac{\pi}{2}}^{\varepsilon = \frac{3}{2}\pi} e^{\varrho_1 R \sin \varepsilon} d\varepsilon,$$

wobei c_1 , eine positive Konstante, gleich der unteren Grenze der Abstände $|\xi_1 - \xi_1^{(2)}|$ ist. Daß $c_1 > 0$ ist, entnimmt man Fig. 11, 12 ebenso wie die Tatsache, daß auf $L_{1\beta}^{**}$ $|\xi_1 - \xi_1^{(2)}| > \varrho_1$ bleibt. Endgültig ist also

$$\left| \frac{J_{1\beta}^{(1)*}}{e^{-iR}} \right| \leq \pi \frac{\sqrt{\varrho_1}}{\sqrt{c_1}} \cdot e^{-t_1^0 R}$$

und daher

$$J_{1\beta}^{(1)*} = e^{-iR} O(\varrho_1^{1/2} \cdot e^{-t_1^0 R}). \quad (58)$$

(58) in (56) eingesetzt liefert

$$J_{1\beta}^{(1)} = e^{-iR} O(\varrho_1^{1/2} \cdot e^{-t_1^0 R}). \quad (59)$$

Analog ergibt sich für $J_{1\zeta}^{(1)}$ aus (30) und (58)

$$J_{1\zeta}^{(1)} = e^{-iR} O(\varrho_1^{1/2} \cdot e^{-t_1^0 R}). \quad (60)$$

Es bleibt also noch in (30) abzuschätzen

$$J_{1\gamma}^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(1)'}} \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i\gamma_1 d} d\gamma_1 \int_{L_{1\gamma}^{**}} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1 \quad (61)$$

und zunächst

$$J_{1\gamma}^{(1)*} = \int_{L_{1\gamma}^{**}} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1, \quad (62)$$

worin man setze $\xi_1 = 1 - i(t_1^0 + 2\varrho_1 + \tau)$ ($0 \leq \tau < \infty$), woraus sich ergibt

$$J_{I\gamma}^{(1)*} = -ie^{-iR} \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} \frac{e^{-(t_1^0 + 2\varrho_1 + \tau)R}}{\sqrt{(\xi_1 - \xi_1^{(1)}) (\xi_1 - \xi_1^{(2)})}} d\tau$$

$$\left| \frac{J_{I\gamma}^{(1)*}}{e^{-iR}} \right| \leq \frac{e^{-(t_1^0 + 2\varrho_1)R}}{\sqrt{\varrho_1} \cdot \sqrt{c_2} \cdot R},$$

worin c_2 die untere Grenze der Abstände $|\xi_1 - \xi_1^{(2)}|$ bedeutet. Also ist

$$J_{I\gamma}^{(1)*} = e^{-iR} O(\varrho_1^{-1/2} R^{-1} \cdot e^{-(t_1^0 + 2\varrho_1)R}),$$

und aus (61) folgt

$$J_{I\gamma}^{(1)} = e^{-iR} \cdot O(\varrho_1^{-1/2} R^{-1} e^{-(t_1^0 + 2\varrho_1)R}). \quad (63)$$

Analog ergibt sich $J_{I\eta}^{(1)}$ aus (30) und (63) zu

$$J_{I\eta}^{(1)} = e^{-iR} O(\varrho_1^{-1/2} R^{-1} e^{-(t_1^0 + 2\varrho_1)R}). \quad (64)$$

Man hat nach Summation von (55), (59), (60), (63) und (64) gemäß (30):

$$J_I^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(1)}} \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i\gamma_1 d} d\gamma_1 \int_{L_{1\alpha}^{**}} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1 -$$

$$- e^{-irn + iz\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{i\sqrt{1-n^2}d} \left(\frac{2}{i^2} \cdot \frac{1}{n(n^2-1)} + O(r^{-5/2}) \right) +$$

$$+ e^{-ir\sqrt{1-(\gamma_1^0)^2} - iz\gamma_1^0} \cdot e^{-id\gamma_1^0} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1-(\gamma_1^0)^2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{4n^2 \sqrt{n^2 - 1 + (\gamma_1^0)^2}}{n^2 - 1 + (\gamma_1^0)^2 (1 - n^4)} r^{-3/2} + O(r^{-5/2}) \right] +$$

$$+ e^{-iR} O(\varrho_1^{1/2} e^{-t_1^0 R}) + e^{-iR} \cdot O(\varrho_1^{-1/2} R^{-1} \cdot e^{-(t_1^0 + 2\varrho_1)R}). \quad (65)$$

Dabei sind die Summanden $J_{I\epsilon}^{(1)}$ und $J_{I\alpha}^{(1)}$, in denen die Integration bzw. über die Kurvenstücke $C_2^{(1)''}$ und $C_2^{(1)'}$ (Fig. 12) vorgenommen wurde, wieder zu einem Ausdruck zusammengezogen worden, dessen Integrationsweg $C_2^{(1)}$ ist. In (65) kann noch eine Vereinfachung vorgenommen werden. Es ist nämlich nach (27):

$$r\sqrt{1-(\gamma_1^0)^2} + z\gamma_1^0 = R(\sin\vartheta_0 \sqrt{1-(\gamma_1^0)^2} + \cos\vartheta_0 \gamma_1^0)$$

$$= R[1 - i(t_1^0 + \varrho_1)],$$

und daher ist nach (65):

$$J_I^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(1)}} \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i \gamma_1 d} d\gamma_1 \int_{L_{1\alpha}^{**}} \frac{e^{-i R \xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1 -$$

$$- e^{-i r n + i z \sqrt{1-n^2}} \cdot e^{i d \sqrt{1-n^2}} \left(\frac{2}{r^2} \frac{1}{n(n^2-1)} + O(r^{-5/2}) \right) +$$

$$+ e^{-i R} [O(e^{-R(t_1^0 + \varrho_1)} r^{-3/2}) + O(e^{-R(t_1^0 + \varrho_1)} r^{-5/2}) +$$

$$+ O(\varrho_1^{1/2} \cdot e^{-t_1^0 R}) + O(\varrho_1^{-1/2} \cdot R^{-1} \cdot e^{-(t_1^0 + 2\varrho_1) R})].$$

Nimmt man hier etwa $\varrho_1 = 1/R$ an und beachtet, daß $p = t_1^0 + \varrho_1$ der Ellipsenwert im Brennpunkt ist, also

$$p = \frac{|1+n| + |1-n|}{2} - \frac{2}{|1+n| + |1-n|},$$

so ergibt sich endgültig

$$J_I^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(1)}} \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i \gamma_1 d} d\gamma_1 \int_{L_{1\alpha}^{**}} \frac{e^{-i R \xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1 -$$

$$- e^{-i r n + i z \sqrt{1-n^2}} \cdot e^{i d \sqrt{1-n^2}} \left(\frac{2}{r^2} \frac{1}{n(n^2-1)} + O(r^{-5/2}) \right) +$$

$$+ e^{-i R} [O(e^{-R p} \cdot r^{-3/2}) + O(e^{-R p} \cdot R^{-1/2})]. \quad (66)$$

Es bleiben die Bestandteile $J_{II}^{(1)}$ und $J_{III}^{(1)}$ aus (22) bzw. (23) auszuwerten.

Nach (22) ist

$$J_{II}^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3^{(1)}} \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i \gamma_1 d} d\gamma_1 \int_{L_1^*} \frac{e^{-i R \xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1. \quad (67)$$

Dabei hat man für $C_3^{(1)}$ etwa einen Kreis um $\gamma_1 = P_2^{(1)}$ zu wählen (Fig. 9). Ist der Kreisradius genügend klein, so liegen bei Übertragung dieses Kreises in die ϑ_1 -Ebene (Fig. 10) die Bildwerte jedenfalls außerhalb des Streifens von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, der durch den Weg A_1^* halbiert wird, und $W(\xi_1, \gamma_1)$ kann nur für solche Werte ξ_1 verschwinden, die von den Bildwerten um $\pm \vartheta_0$ mit $0 \leq \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ abstehen. Diese Werte ξ_1 machen aber für $\gamma_1 = P_2^{(1)}$ einen Ellipsenhalbbogen aus, der von $\sqrt{1 - (P_2^{(1)})^2}$ über $P_2^{(1)}$ nach $-\sqrt{1 - (P_2^{(1)})^2}$ verläuft, d. h. wegen $P_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ von $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ über $P_2^{(1)}$ nach $-\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Da nun $\left| \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \right| < 1$ ist, bestehen keine Bedenken,

den Weg L_1^* in (67) nach der Parallelen $1 - it_1$ zur imaginären Achse zu verlagern. Man hat nur den Kreis um $P_2^{(1)}$ genügend klein zu wählen. $J_{II}^{(1)*}$ darf dann in folgende Bestandteile zerlegt werden:

$$J_{II}^{(1)*} = \int_{L_1^*} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1 = \int_{L_{1\alpha}^{**}} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1 + \int_{1-it_1^0}^{1-i\infty} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1. \quad (68)$$

Hier ist für den zweiten Summanden folgende Abschätzung möglich:

$$\left| \int_{1-it_1^0}^{1-i\infty} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1 \right| < \frac{1}{c_3} \int_{t_1^0}^{\infty} |e^{-iR(1-it_1)}| dt_1 < \frac{1}{c_3} \cdot \frac{1}{R} \cdot e^{-Rt_1^0},$$

wobei c_3 eine positive Konstante ist und durch den endlichen Abstand der Nullstellen $W(\xi_1, \gamma_1) = 0$ vom Integrationsweg bedingt wird. Mithin hat man

$$J_{II}^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3^{(1)}} \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} e^{-i\gamma_1 d} d\gamma_1 \int_{L_{1\alpha}^{**}} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1 + e^{-iRO} (R^{-1} \cdot e^{-Rp}). \quad (69)$$

Nach (29) ist

$$J_{III}^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1^*} e^{-iR\xi_1} d\xi_1 \int_{C_4^{(1)}} \frac{(n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}) \cdot e^{-i\gamma_1 d}}{(n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}) \sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\gamma_1.$$

Hierbei ist $C_4^{(1)}$ beliebig nahe den Punkt ∞ umschlingend zu denken, damit bei der Integration nach γ_1 nicht die Nullstellen von $W(\xi_1, \gamma_1) = 0$ auf den Integrationsweg $C_4^{(1)}$ zu liegen kommen. Dann ist aber die Verlagerung von L_1^* nach der Parallelen zur imaginären Achse $\xi_1 = 1 - it_1$ möglich, und (29) läßt sich schreiben

$$J_{III}^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{1\alpha}^{**}} e^{-iR\xi_1} d\xi_1 \int_{C_4^{(1)}} \frac{(n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}) \cdot e^{-i\gamma_1 d}}{(n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}) \sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\gamma_1 + \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{1-it_1^0}^{1-it_1} e^{-iR\xi_1} d\xi_1 \int_{C_4^{(1)}(t_1)} \frac{(n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}) \cdot e^{-i\gamma_1 d}}{(n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}) \sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\gamma_1. \quad (70)$$

Dabei soll $C_4^{(1)}(t_1)$ stets von der geradlinigen Verbindung von $\cos[\gamma_1(t_1) + \vartheta_0]$ mit $\cos[\gamma_1(t_1) - \vartheta_0]$ einen positiven Mindestabstand haben unabhängig von t_1 . Denkt man sich nun ohne Wertänderung des inneren Integrals des

zweiten Summanden $C_4^{(1)}$ beliebig groß, so nimmt das innere Integral, da $\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)} \sim \gamma_1$ wird, einen konstanten von ξ_1 unabhängigen Wert an. Demzufolge ist der zweite Summand ersetzbar durch

$$e^{-iR} O(R^{-1} \cdot e^{-Rt_1^0}),$$

und aus (70) ergibt sich

$$J_{\text{III}}^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{1\alpha}^{**}} e^{-iR\xi_1} d\xi_1 \int_{C_4^{(1)}} \frac{(n^2\gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}) \cdot e^{-i\gamma_1 d}}{(n^2\gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}) \sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\gamma_1 + e^{-iR} \cdot O(R^{-1} e^{-Rp}). \quad (71)$$

Die Addition von (66), (69) und (71) liefert gemäß (20)

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{II}}^{(1)} &= J_{\text{I}}^{(1)} + J_{\text{II}}^{(1)} + J_{\text{III}}^{(1)} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^{(1)}} \frac{n^2\gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2\gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i\gamma_1 d} d\gamma_1 \int_{L_{1\alpha}^{**}} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1 - \\ &\quad - e^{-iRn + iz\sqrt{1-n^2}} \cdot e^{i\sqrt{1-n^2}d} \left(\frac{2}{r^2} \frac{1}{n(n^2-1)} + O(r^{-5/2}) \right) + \\ &\quad + e^{-iR} [O(e^{-Rp} \cdot r^{-3/2}) + O(e^{-Rp} \cdot R^{-1/2})]. \end{aligned} \quad (72)$$

Dabei sind die Integrale über $C_2^{(1)}$, $C_3^{(1)}$, $C_4^{(1)}$ wieder zu einem solchen über $C_1^{(1)}$ vereinigt worden (Fig. 9), das aber jetzt gegenüber (20) die Besonderheit aufweist, daß der Weg $L_{1\alpha}^{**}$ die Ellipse nicht trifft, sondern gemäß Fig. 12 nur bis $1 - it_1^0$ reicht. Die Auswertung kann also vorgenommen werden, ohne singuläre Stellen des Integranden beachten zu müssen. Es sei

$$\Pi_{\text{II}}^{(1)*} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^{(1)}} \frac{n^2\gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2\gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i\gamma_1 d} d\gamma_1 \int_{L_{1\alpha}^{**}} \frac{e^{-iR\xi_1}}{\sqrt{W(\xi_1, \gamma_1)}} d\xi_1. \quad (73)$$

Dann ist

$$\Pi_{\text{II}}^{(1)*} = \frac{1}{2\pi} \int_{L_{1\alpha}^{**}} e^{-iR\xi_1} d\xi_1 \int_0^{2\pi} \frac{n^2\gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2\gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} e^{-i\gamma_1 d} d\psi_1 \quad (74)$$

mit $\xi_1 = \cos \eta_1$ und $\gamma_1 = \cos \eta_1 \cos \vartheta_0 - \sin \eta_1 \cos \psi_1 \sin \vartheta_0$ aus (5) indem statt γ_1 wieder ψ_1 eingeführt wurde. Setzt man

$$f_1^*(t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{n^2\gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2\gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} e^{-i\gamma_1 d} d\psi_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\gamma_1) d\psi_1. \quad (75)$$

$$f_1(\gamma_1) = \frac{n^2\gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2\gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} \cdot e^{-i\gamma_1 d} = f_1(\gamma_1(t_1)) \quad (76)$$

für $\xi_1 = 1 - it_1$, so wird zunächst $f_1(\gamma_1)$ bei $\gamma_{10} = \cos \vartheta_0$ entsprechend $t_1 = 0$ zu entwickeln sein, das Ergebnis nach ψ_1 und das so erhaltene $f_1(\gamma_1(t_1))$ weiter nach t_1 zu integrieren. Es ist

$$f_1(\gamma_1) = f_1(\gamma_{10}) + f_1'(\gamma_{10})(\gamma_1 - \gamma_{10}) + f_1''(\gamma_{10}) \frac{(\gamma_1 - \gamma_{10})^2}{2!} + \dots \quad (77)$$

mit $\gamma_1 - \gamma_{10} = \cos \vartheta_0 (\cos \eta_1 - 1) - \sin \eta_1 \cos \psi_1 \sin \vartheta_0$ und

$$(\gamma_1 - \gamma_{10})^h = [\cos \vartheta_0 (\cos \eta_1 - 1) - \sin \eta_1 \cos \psi_1 \sin \vartheta_0]^h \\ (h = 1, 2, 3 \dots). \quad (78)$$

Für $\xi_1 = \cos \eta_1 = 1 - it_1$; $\sin^2 \eta_1 = t_1(2i + t_1)$ liefert (78) ein Polynom in t_1 , das bei geradem h als niedrigste vorkommende Potenz $t_1^{h/2}$ hat, wie

man sich leicht überlegt, und bei ungeradem h die Potenz $t_1^{\frac{h+1}{2}}$, wenn man die bei der Integration nach ψ_1 entfallenden Potenzen nicht berücksichtigt. Verlangt man also in der Entwicklung von $f_1(\gamma_1(t_1))$ nach t_1 nur bis zur ersten Potenz von t_1 zu gehen, so wird man in der Entwicklung $f_1(\gamma_1)$ nach $\gamma_1 - \gamma_{10}$ bis zur Potenz $(\gamma_1 - \gamma_{10})^2$ zu gehen haben. Es ergibt sich dann für $f_1^*(t_1)$ aus (75) nach (77), (78):

$$f_1^*(t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f_1(\gamma_{10}) + f_1'(\gamma_{10})(-it_1 \cos \vartheta_0) + \right. \\ \left. + \frac{f_1''(\gamma_{10})}{2!} [(-it_1)^2 \cos^2 \vartheta_0 + t_1(2i + t_1) \sin^2 \vartheta_0 \cos^2 \psi_1] + \right. \\ \left. + (\gamma_1 - \gamma_{10})^3 F(\gamma_1 - \gamma_{10}) \right\} d\psi_1. \quad (79)$$

Dabei sind die Glieder mit ungeraden Potenzen von $\cos \psi_1$ weggelassen worden, da sie bei der Integration nach ψ_1 verschwinden, und $F(\gamma_1 - \gamma_{10})$ ist eine bei $\gamma_1 = \gamma_{10}$ reguläre Funktion. Die Integration nach ψ_1 in (79) liefert:

$$f_1^*(t_1) = f_1(\gamma_{10}) + t_1 \left(i \sin^2 \vartheta_0 \frac{f_1''(\gamma_{10})}{2} - i f_1'(\gamma_{10}) \cos \vartheta_0 \right) + t_1^2 \Phi(t_1), \quad (80)$$

wobei $\Phi(t_1)$ eine bei $t_1 = 0$ nach Taylor entwickelbare Funktion ist. Dann ist nach (74)

$$\Pi_{\Pi}^{(1)*} = -i \int_{t_1=0}^{t_1=t_1^0} e^{-iR(1-it_1)} f_1^*(t_1) dt_1$$

und nach (80):

$$\Pi_{\Pi}^{(1)*} = -i e^{-iR} \left[\int_{t_1=0}^{t_1=t_1^0} f_1(\gamma_{10}) e^{-Rt_1} dt_1 + i \left(\sin^2 \vartheta_0 \frac{f_1''(\gamma_{10})}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - f_1'(\gamma_{10}) \cos \vartheta_0 \right) \cdot \int_{t_1=0}^{t_1=t_1^0} t_1 e^{-Rt_1} dt_1 + \int_{t_1=0}^{t_1=t_1^0} t_1^2 e^{-Rt_1} \Phi(t_1) dt_1 \right]. \quad (81)$$

Nun gilt, wie man leicht verifiziert,

$$\int t_1^{m+1} e^{-R t_1} dt_1 = -\frac{e^{-R t_1}}{R} \left[t_1^{m+1} + t_1^m \left(\frac{m+1}{R} \right) + \right. \\ \left. + t_1^{m-1} \frac{(m+1)m}{R^2} + \dots + \frac{(m+1)!}{R^{m+1}} \right].$$

Demzufolge ist

$$\Pi_{\text{II}}^{(1)*} = -i e^{-iR} \left[\frac{1}{R} f_1(\gamma_{10}) + \right. \\ \left. + \frac{i}{R^2} \left(\sin^2 \vartheta_0 \frac{f_1''(\gamma_{10})}{2} - f_1'(\gamma_{10}) \cos \vartheta_0 \right) + O(R^{-3}) \right]. \quad (82)$$

Um die Entfernung d von der Trennungsebene der beiden Medien explizit in (82) zu erhalten, setze man nach (76)

$$g_1(\gamma_1) = \frac{n^2 \gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}, \quad f_1(\gamma_1) = g_1(\gamma_1) \cdot e^{-i \gamma_1 d}. \quad (83)$$

Dann wird

$$\Pi_{\text{II}}^{(1)*} = -i e^{-iR} \cdot e^{-i \gamma_{10} d} \left\{ \frac{1}{R} g_1(\gamma_{10}) + \right. \\ \left. + \frac{i}{R^2} \left[\frac{(1 - \gamma_{10})^2}{2} \left(g_1''(\gamma_{10}) - 2i d g_1'(\gamma_{10}) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - d^2 g_1(\gamma_{10}) \right) - \gamma_{10} (g_1'(\gamma_{10}) - i d g_1(\gamma_{10})) \right] + O(R^{-3}) \right\}. \quad (84)$$

Also ist nach (72) zunächst

$$\Pi_{\text{II}}^{(1)} = -\Pi_{\text{II}}^{(1)*} - e^{-i r n + i z \sqrt{1-n^2}} \cdot e^{i \sqrt{1-n^2} d} \times \\ \times \left(\frac{2}{r^2} \cdot \frac{1}{n(n^2-1)} + O(r^{-5/2}) \right). \quad (85)$$

Mithin erhält man nach (84), (85), (19), Abschnitt 2, für die Gesamt-
erregung im Medium 1:

$$\Pi_1 = \frac{e^{-i R_d}}{-i R_d} + \\ + i e^{-iR} \cdot e^{-i \gamma_{10} d} \left\{ \frac{1}{R} g_1(\gamma_{10}) + \frac{i}{R^2} \left[\frac{(1 - \gamma_{10})^2}{2} (g_1''(\gamma_{10}) - 2i d g_1'(\gamma_{10}) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - d^2 g_1(\gamma_{10}) - \gamma_{10} (g_1'(\gamma_{10}) - i d g_1(\gamma_{10})) \right] + O(R^{-3}) \right\} - \\ - e^{-i r n + i z \sqrt{1-n^2}} \cdot e^{i \sqrt{1-n^2} d} \left[\frac{2}{r^2} \cdot \frac{1}{n(n^2-1)} + O(r^{-5/2}) \right]. \quad (86)$$

Dabei ist:

R_d = Abstand des Aufpunktes von der in $x = y = 0$, $z = d$ gelegenen Quelle der einfallenden Kugelwelle (Fig. 2),

R = Abstand des Aufpunktes von $x = y = z = 0$,

r = Horizontalabstand des Aufpunktes von der z -Achse,

$\gamma_{10} = \cos \vartheta_0$ mit

ϑ_0 = Winkel zwischen dem Strahl von $x = y = z = 0$ nach dem Aufpunkt und der positiven z -Achse,

$\gamma_1(\gamma_1) = \frac{n^2\gamma_1 - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}{n^2\gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}}$ gemäß (83),

n = Brechungsindex gemäß (1),

$\sqrt{1 - n^2}$ im ersten Quadranten gelegen,

$\sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}$ so zu wählen, daß die Wurzel für große γ_1 in γ_1 übergeht, $O()$ siehe (38).

Mit (86) ist das Problem für Medium 1 gelöst. Die Erregung erweist sich danach als die Übereinanderlagerung dreier Wellentypen, deren Amplituden in einer Näherung angegeben werden, welche der zweiten Potenz der reziproken Entfernungen entspricht. Der erste Summand stellt eine Kugelwelle dar, die in $x = y = 0$, $z = d$ ihren Ursprung hat, und deren Amplitude umgekehrt proportional mit der Entfernung des Aufpunktes von der Quelle abnimmt; es ist die einfallende Kugelwelle. Der zweite Summand muß ebenfalls als Kugelwelle gedeutet werden, die aber in $x = y = z = 0$ ihren Ursprung hat und eine Amplitude aufweist, welche in ziemlich verwickelter Weise von der Entfernung d und der Zenitdistanz ϑ_0 des Aufpunktes abhängt; es ist die reflektierte Kugelwelle. Der dritte Summand endlich stellt einen Wellentyp dar, der eine nähere Erörterung nötig macht. Man kann schreiben:

$$r n - z \sqrt{1 - n^2} = R (\sin \vartheta_0 n - \cos \vartheta_0 \sqrt{1 - n^2}) \\ = R (A_2^{(1)} \cos \vartheta_0 + \sqrt{1 - (A_2^{(1)})^2} \sin \vartheta_0) = R B_1^{(1)}$$

(vgl. Fig. 11). Solange $B_1^{(1)}$ auf der Ellipse zwischen n und $1 - ip$ liegt, darf man setzen

$$B_1^{(1)} = n_B - i \sigma_B \quad \text{mit} \quad n_B > 1 \quad \text{und} \quad \sigma_B > 0. \quad (87)$$

Demzufolge ergibt sich für den dritten Summanden in (86):

$$2 J_{1da}^{(1)} = - e^{-i R n_B} \cdot e^{-R \sigma_B} \cdot e^{i \sqrt{1 - n^2} d} \left[\frac{2}{r^2} \frac{1}{n (n^2 - 1)} + O(r^{-5/2}) \right]. \quad (88)$$

Das ist eine von $x = y = z = 0$ ausgehende, gedämpfte Kugelwelle der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c/n_B (c = Lichtgeschwindigkeit), welche letztere also außer von n noch von ϑ_0 abhängt und für $\vartheta_0 = \vartheta_0^{(1)}$ aus (28) in die Lichtgeschwindigkeit übergeht entsprechend $n_B = 1$. $2 J_{1\vartheta a\beta}^{(1)}$ selbst wird in diesem Falle ein Teil der Kugelwelle e^{-iR} , der aber bei dem vorliegenden Grad der Näherung wegfällt. Für $\vartheta_0 \sim \pi/2$ wird n_B gleich dem Realteil von n . Dann ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit aber gleich der von $x = y = z = 0$ ausgehenden Kugelwelle im zweiten Medium [vgl. (52), Abschnitt 4]. Bei $\vartheta_0 < \vartheta_0^{(1)}$ besteht kein Grund mehr für die Existenz der Welle, wie aus Fig. 12 ersichtlich ist, denn dann kann der Weg L_1^* ohne Überstreichung von Singularitäten nach dem Weg $1 - it_1$ verlagert werden. Die Dämpfung der Welle $2 J_{1\vartheta a\beta}^{(1)}$ hängt nach (88) von ϑ_0, d in der Weise ab, daß sie für großes d und $\vartheta_0 \sim \vartheta_0^{(1)}$ groß ist, für $d = 0$ und $\vartheta_0 \sim \pi/2$ (Nähe der Trennungsebene) aber am kleinsten.

Für die Beurteilung des Ergebnisses (86) wichtig ist die Aufweisung seines Zusammenhanges mit den Lösungen des Problems der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs der Erdoberfläche. Den Voraussetzungen des vorliegenden Problems nach müssen diese Lösungen ja je nach den verschiedenen Annahmen der Autoren Spezialfälle von (86) sein.

M. J. O. Strutt¹⁾ hat unter der Annahme endlicher Entfernung der Strahlungsquelle von der Erdoberfläche erhalten [in der Bezeichnungsweise von (86)]:

$$\begin{aligned} \prod_{sf}^{(1)} = & e^{-iR} \cdot e^{i d \gamma_{10}} \left[\frac{\gamma_{10} d}{R^2} - \frac{i d^2}{2 R^2} (1 - \gamma_{10}^2) + \frac{1}{R} \right] + \\ & + e^{-iR} \cdot e^{-i d \gamma_{10}} \left\{ \frac{g_1(\gamma_{10})}{R} + \frac{i}{R^2} \left[-g_1'(\gamma_{10}) \cdot \gamma_{10} + i \gamma_{10} d g_1(\gamma_{10}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(1 - \gamma_{10}^2)}{2} (g_1''(\gamma_{10}) - 2 i g_1'(\gamma_{10}) d - g_1(\gamma_{10}) d^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (89)$$

Man sieht, daß bis auf den aus dem Strutt'schen Ansatz verständlichen Faktor $-i$ der zweite Summand in (89) mit dem zweiten in (86) identisch ist. Der erste Summand in (89) ist ebenfalls identisch mit dem ersten in (86), denn die Integraldarstellung in (19), Abschnitt 2, für $\frac{e^{-iR_d}}{-iR_d}$ gestattet eine völlig analoge Auswertung wie beim zweiten Summanden (19), Abschnitt 2, man hat nur statt $e^{-i\gamma_1 d}$ die Potenz $e^{+i\gamma_1 d}$ und für $g_1(\gamma_1)$ in (83) den Wert 1, für $f_1(\gamma_1)$ also $e^{i\gamma_1 d}$ zu setzen. Dann liefert wieder bis auf den Faktor $-i$ (89) den ersten Summanden von (86). Insoweit wäre also das Ergebnis (86) nicht neu zu nennen. Der dritte Summand in (86) jedoch fehlt bei Strutt,

¹⁾ M. J. O. Strutt, Ann. d. Phys. 4, 7, 1930.

was für die Struttischen Absichten allerdings wenig ins Gewicht fällt, denn die fehlende Welle ist stark gedämpft. Strutt hat ohne Beachtung der Singularitäten des Integranden den Weg L_1^* nach dem Weg $1 - it_1$ verlagert (Fig. 12) und ist damit dem Beispiel Weyls gefolgt. Weyl hat nämlich in seiner schon mehrfach zitierten Arbeit den Spezialfall $d = 0$ behandelt und hauptsächlich sein Augenmerk auf große n gerichtet, so daß der dritte Summand in (86) bei ihm keine Rolle spielt. Bei der Diskussion für einen komplexen Brechungsindex von mäßiger Größe¹⁾ jedoch vernachlässigt er die auf den dritten Summanden in (86) führenden Singularitäten²⁾ auch und erhält³⁾ [in der Schreibweise von (86)] für $d = 0$

$$\prod_w^{(1)} \sim \frac{e^{-iR}}{-iR} \cdot \frac{n^2 + 1}{2n^2} \left[g_1(\gamma_{10}) + 1 + \frac{g'_1(\gamma_{10}) \cdot \gamma_{10} - \frac{1}{2}(1 - \gamma_{10}^2) g''_1(\gamma_{10})}{iR} \right]. \quad (90)$$

Das sind aber genau die beiden ersten Summanden in (86) für $d = 0$. Der Faktor $\frac{n^2 + 1}{2n^2}$ ist dabei ein von Weyl eingeführter Normierungsfaktor⁴⁾. Nach den Ergebnissen von Strutt und Weyl möchte es also fast so scheinen, als ob die in (86) im dritten Summanden angegebene gedämpfte Welle ohne Bedeutung sei. Die Ergebnisse der Theorie im Medium 2 werden aber zeigen, daß gerade das für Medium 2 herleitbare Analogon, auf reellen Brechungsindex spezialisiert, die von v. Schmidt experimentell geiundene „Kopfwelle“ darstellt⁵⁾. Dazu kommt, daß sich diese dritte Welle in der Sommerfeldschen Theorie explizit ergibt. Die letztere Theorie⁶⁾ beschränkt sich wie die Weylsche auf die Annahme der Kugelwellenquelle in $z = 0$ und spezialisiert noch weiter auf $\vartheta_0 \sim \pi/2$, d. h. die Nähe der Trennungsebene der beiden Medien. Sie liefert im Medium 1 [in der Bezeichnungsweise von (86)] nach Sommerfelds Benennung zwei Raumwellen und eine Oberflächenwelle.

Die Raumwellen:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -i \frac{1 + \bar{n}^2}{2\bar{n}^2} \left(\frac{2\bar{n}^4}{1 - \bar{n}^2} + \frac{2\bar{n}^2 z}{\sqrt{1 - \bar{n}^2}} \right) \cdot \frac{e^{i\bar{r}}}{r^2}, \\ Q_2 &= -i \bar{n} \frac{1 + \bar{n}^2}{2\bar{n}^2} \cdot \frac{2}{\bar{n}^2(\bar{n}^2 - 1)} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot e^{i\bar{n}r - \sqrt{\bar{n}^2 - 1}z}. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Die Oberflächenwelle:

$$P = \frac{\bar{n}^2}{1 - \bar{n}^2} \sqrt{\frac{\bar{n}^2 - 1}{\bar{n}^4 - 1}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{s \cdot r}} \cdot e^{isr - \sqrt{s^2 - 1}z}; \quad s = \frac{\bar{n}}{\sqrt{1 + \bar{n}^2}} \quad (92)$$

¹⁾ H. Weyl, l. c., S. 485ff. — ²⁾ H. Weyl, l. c., S. 486, Anm. —

³⁾ H. Weyl, l. c., S. 488. — ⁴⁾ H. Weyl, l. c., S. 484. — ⁵⁾ O. v. Schmidt, Phys. ZS. 39, 868, 1938. — ⁶⁾ A. Sommerfeld, l. c., S. 665ff. — ⁷⁾ A. Sommerfeld, l. c., S. 700. — ⁸⁾ A. Sommerfeld, l. c., S. 696.

Wird das Ergebnis (86) auf $\vartheta_0 \sim \pi/2$, $d = 0$ eingeschränkt, so ergibt sich zunächst für $d = 0$

$$\begin{aligned} \Pi_{d=0}^{(1)} &= \frac{e^{-iR}}{-iR} + \\ &+ i e^{-iR} \left\{ \frac{1}{R} g_1(\gamma_{10}) + \frac{i}{R^2} \left[\frac{1 - \gamma_{10}^2}{2} \cdot g_1''(\gamma_{10}) - \gamma_{10} g_1'(\gamma_{10}) \right] + O(R^{-3}) \right\} - \\ &- e^{-ir n + iz \sqrt{1-n^2}} \left(\frac{2}{r^2} \frac{1}{n(n^2-1)} + O(r^{-5/2}) \right). \end{aligned} \quad (98)$$

Hier sind $g_1(\gamma_{10})$, $g_1'(\gamma_{10})$, $g_1''(\gamma_{10})$ gemäß (88) zu berechnen. Es ist

$$\left. \begin{aligned} g_1(\gamma_{10}) &= \frac{n^2 \gamma_{10} - \sqrt{n^2 - 1} + \gamma_{10}^3}{n^2 \gamma_{10} + \sqrt{n^2 - 1} + \gamma_{10}^3}, \\ g_1'(\gamma_{10}) &= \frac{2n^2(n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 - 1} + \gamma_{10}^2(n^2 \gamma_{10} + \sqrt{n^2 - 1} + \gamma_{10}^2)^2}, \\ g_1''(\gamma_{10}) &= \frac{-2n^2(n^2 - 1)[3n^2 \gamma_{10}^3 + 3\gamma_{10} \sqrt{n^2 - 1} + \gamma_{10}^2 + 2n^2(n^2 - 1)]}{\sqrt{n^2 - 1} + \gamma_{10}^2(n^2 \gamma_{10} + \sqrt{n^2 - 1} + \gamma_{10}^2)^3} \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Daraus ergibt sich für $\gamma_{10} = \cos \vartheta_0 = \frac{z}{R}$ und $z \ll R$

$$\left. \begin{aligned} g_1(\gamma_{10}) &= -1 + \frac{2n^2}{\sqrt{n^2 - 1}} \cdot \frac{z}{R}, \\ g_1'(\gamma_{10}) &= \frac{2n^2}{\sqrt{n^2 - 1}}, \\ g_1''(\gamma_{10}) &= -\frac{4n^4}{n^2 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Also wird

$$\Pi_{\vartheta_0 \sim \pi/2}^{(1)} = \frac{i e^{-iR}}{R^2} \left(\frac{2n^2 z}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{2n^4}{n^2 - 1} \right) \cdot e^{-ir n + iz \sqrt{1-n^2}} \cdot \frac{2}{r^2} \cdot \frac{1}{n(n^2 - 1)}. \quad (96)$$

Um (96) mit (91) vergleichen zu können, hat man zu beachten, daß schon für die allgemeinen Ansätze bei Weyl (Π_W) und Sommerfeld (Π_S) die Beziehung besteht

$$\Pi_W = i \overline{\Pi_S}, \quad (97)$$

wie hier nicht näher ausgeführt werde. Beachtet man weiter den Weylschen Normierungsfaktor $\frac{n^2 + 1}{2n^3}$, so erkennt man ohne weiteres die Übereinstimmung von (96) mit (91).

Das Ergebnis (86) enthält also die Sommerfeldschen Raumwellen. Die in (92) angegebene Oberflächenwelle ist in (86) explizit nicht enthalten. Dies Resultat deckt sich für endliche Brechungsindizes mit der im Falle $d = 0$ für das erste Medium von Weyl¹⁾ getroffenen Feststellung, daß die

¹⁾ H. Weyl, l. c., S. 488.

Sommerfeldsche Unterscheidung von Raumwellen und Oberflächenwelle nicht nötig ist¹⁾.

Zusammenfassend kann also gesagt werden: Das Resultat (86) umfaßt die Ergebnisse der Theorien von Weyl und Sommerfeld über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs der als eben angenommenen Erdoberfläche als Spezialfälle, indem es als Resultat der auf $d \neq 0$ verallgemeinerten Weylschen Methode und deren Verschärfung durch Berücksichtigung aller Singularitäten über diese hinausgeht und zugleich die Sommerfeldschen Ergebnisse ($d = 0$, $\vartheta_0 \sim \pi/2$) vom Standpunkt $d \neq 0$, $0 \leq \vartheta_0 < \pi/2$ neu zu beurteilen lehrt.

4. Auswertung der Integraldarstellung der Hertzischen Funktion für das Medium 2 bei komplexem Brechungsindex.

Nach (23), Abschnitt 2, handelt es sich hier um die Auswertung des Integrals

$$H^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_1=2\pi} \int_{\vartheta_1=0}^{\vartheta_1=\pi} e^{-ik_2(\alpha_2 x + \beta_2 y - \gamma_2 z)} \cdot e^{-ik_1 d \gamma_1} \cdot \frac{2n^2 \gamma_1 \sin \vartheta_1}{n^2 \gamma_1 + 1n^2 - 1 + \gamma_1^2} d\vartheta_1 d\varphi, \quad (z < 0). \quad (1)$$

Hier ist

$$\alpha_2 = \sin \vartheta_2 \cos \varphi; \quad \beta_2 = \sin \vartheta_2 \sin \varphi; \quad \gamma_2 = \cos \vartheta_2,$$

und nach dem Brechungsgesetz

$$\sin \vartheta_2 = \frac{\sin \vartheta_1}{n}. \quad (2)$$

Da der methodische Gang der Zerlegung von $H^{(2)}$ in bekannte Wellentypen dem der Zerlegung von $H_{II}^{(1)}$ analog ist und nur neue Rechnungen mit analogen Größen notwendig sind, wird es zum Verständnis genügen, die Buchstabenbezeichnung des vorigen Abschnitts beizubehalten und zur Unterscheidung den Index 2 anzuhängen. Es wird auch unnötig sein, analoge mathematische Begründungen in derselben Ausführlichkeit zu geben, wie das für Medium 1 geschehen mußte.

Es sei der Aufpunkt wieder in der (x, z) -Ebene angenommen

$$x = R \sin \vartheta_0, \quad y = 0, \quad -z = R \cos \vartheta_0, \quad (3)$$

¹⁾ Vgl. dazu auch A. Sommerfeld in Frank-Mises, Differentialgleichungen der Physik. Bd. II. S. 932, 1935 und F. Noether in „Funktionentheorie und ihre Anwendung in der Technik“. S. 165 ff., 1931.

als Aufpunkt also der zu dem im Medium 2 spiegelbildlich gelegene Punkt bezeichnet, und durch

$$\left. \begin{aligned} \sin \vartheta_2 \cos \varphi &= \sin \eta_2 \cos \varphi_2 \cos \vartheta_0 + \cos \eta_2 \sin \vartheta_0, \\ \cos \vartheta_2 &= -\sin \eta_2 \cos \varphi_2 \sin \vartheta_0 + \cos \eta_2 \cos \vartheta_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

der Übergang auf ein Koordinatensystem x^*, y^*, z^* vollzogen, dessen z^* -Achse sich mit dem Strahl durch den Koordinatenanfangspunkt und den Aufpunkt deckt (vgl. Fig. 4). Ferner werde statt ϑ_1 gemäß (2) ϑ_2 eingeführt. Dabei verlagert sich der Weg Λ_1 (Fig. 3) in den Weg Λ_2 (Fig. 17). Um das einzusehen, beachte man zunächst, daß gemäß (2)

$\sin \vartheta_2$ in Richtung $e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$ unendlich wird, falls ϑ_1 den Weg Λ_1 durchläuft, denn dann wird $\sin \vartheta_1 = \sin(\vartheta_{1r} + i\vartheta_{1i})$ für $\vartheta_{1r} = \pi/2$, $\vartheta_{1i} \rightarrow +\infty$ positiv unendlich, und n ist gemäß (2), Abschnitt 3,

gleich $|n| e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})}$. Ganz allgemein aber geht, wie auch schon in Abschnitt 3 benutzt wurde, bei der Abbildung $w = w_r + iw_i = \arccos(v_r + iv_i)$ eine Gerade der v -Ebene durch $v = 0$ mit dem Winkel ψ gegen die reelle Achse über in zwei bei $w_r = \pm \pi/2$ beginnende, in der oberen Halbebene verlaufende Kurvenstücke, welche sich im Unendlichen an die Geraden $w_r = -\psi$ bzw. $\pi - \psi$ anschmiegen.

Angewandt auf den Fall der Abbildung der Geraden in Richtung $e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$ der $\cos(-\frac{\pi}{2} + \vartheta_2)$ -Ebene auf die ϑ_2 -Ebene hat man also, wie in Fig. 17 gezeichnet, die asymptotische Näherung an $-\frac{\pi}{2} + \vartheta_{2r} = \pi - \frac{\pi}{2} + \alpha$ bzw. $-\frac{\pi}{2} + \vartheta_{2r} = -\frac{\pi}{2} + \alpha$, d. h. $\vartheta_{2r} = \alpha + \pi$ bzw. $+\alpha$ anzunehmen, wovon wegen $\vartheta_2 = 0$ für $\vartheta_1 = 0$ nur $\vartheta_{2r} = \alpha$ in Frage kommt. (1) kann also geschrieben werden:

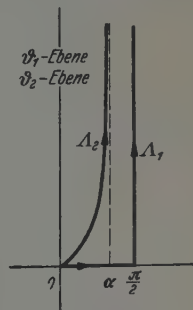


Fig. 17. Integrationsweg für ϑ_2 in (5).

$$\prod^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta_2=0} e^{-inR \cos \eta_2} \cdot e^{-i\gamma_1 d} \cdot \frac{2n^4 \gamma_2 \sin \vartheta_2}{n^2 \gamma_1 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_1^2}} d\vartheta_2 d\varphi. \quad (5)$$

Hier ersetze man gemäß (2) γ_1 durch $\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \vartheta_2} = \sqrt{1 - n^2 + n^2 \gamma_2^2}$. Dann ergibt sich

$$\prod^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\vartheta_2=0} e^{-inR \cos \eta_2} \cdot e^{-in \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2} d} \cdot \frac{2n^3 \gamma_2 \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 d\varphi}{\gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}}. \quad (6)$$

Dabei ist das Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}$ so zu wählen, daß für ϑ_2 auf dem Wege A_2 der Ausdruck $n \cdot \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}$ die Werte des Weges L_1 (Fig. 8) annimmt.

Vollzieht man zunächst einmal wieder formal in (6) den Übergang $(\varphi, \vartheta_2) \rightarrow (\psi_2, \eta_2)$ gemäß (4), so ist völlig analog dem mathematischen Gang der Herleitung in Medium 1:

$$\prod^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\eta_2=0}^{\eta_2=2\pi} \int_{\psi_2=0}^{\psi_2=2\pi} e^{-iRn \cos \eta_2} \cdot e^{-in \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} \cdot d \frac{2n^3 \gamma_2 \sin \eta_2 d\eta_2 \cdot d\psi_2}{\gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} \quad (7)$$

mit

$$\gamma_2 = \cos \eta_2 \cos \vartheta_0 - \sin \eta_2 \cos \psi_2 \sin \vartheta_0. \quad (8)$$

Zur Auswertung und Sicherstellung der Existenz des Integrals hat man jedoch anders gelegene Singularitäten zu beachten und eine andere Wahl für A_2^* durchzuführen. Die Singularitäten des Integranden liegen bei

$$\gamma_2 = \pm \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}} \quad (\text{algebraische Singularitäten})$$

$$\text{und} \quad \gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \gamma_2 = \pm \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad (\text{Pole}).$$

Fig. 18 zeigt die Lage dieser Singularitäten. Dabei sind $A_1^{(2)}, A_2^{(2)}$ die algebraischen Singularitäten und $P_1^{(2)}, P_2^{(2)}$ die Pole, wovon aber $P_1^{(2)}$ als

Pol infolge der oben gegebenen Wahl des Wurzelvorzeichens nicht in Frage kommt. In dem schraffiert umränderten Gebiet der Fig. 18 ist der Integrandenfaktor aus (7)

$$e^{-in \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} \cdot \frac{2n^3}{\gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}}$$

eine eindeutige analytische Funktion von γ_2 . L_2 ist das Bild des Weges A_2 aus Fig. 17 in der γ_2 -Ebene. Entsprechend (2) geht L_2 für $\gamma_1 = 0$ durch $A_2^{(2)}$ und nähert sich gemäß den oben besprochenen Abbildungseigenschaften der \cos -Funktion asymptotisch der Geraden, welche unter dem Winkel $-\alpha$ zur reellen Achse verläuft. Fig. 19 zeigt den Bildbereich

des schraffierten Bereiches aus Fig. 18 in der ϑ_2 -Ebene. Man erkennt dann aus Fig. 19, daß es unmöglich ist, A_2^* von Null ausgehend nach Unendlich

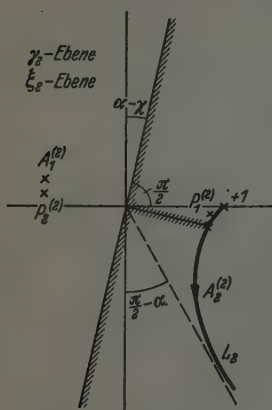


Fig. 18. Die Singularitäten des Integranden von (7).

verlaufend in dem schraffierten Streifen so zu wählen, daß gemäß (8) $\cos(\eta_2 \pm \vartheta_0)$ keine Singularitäten überstreicht, falls η_2 auf A_2^* läuft und $0 \leq \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ ist. Deformiert man aber den Streifen in einen solchen, wie ihn Fig. 20 zeigt, so hat man in A_2^* , parallel den Bereichsgrenzen verlaufend, den gewünschten Weg. Das Bild des neuen Bereichs in der $\cos \vartheta_2$ -Ebene wird in Fig. 21 dargestellt. Der Vergleich mit Fig. 18 lehrt dann, daß bei

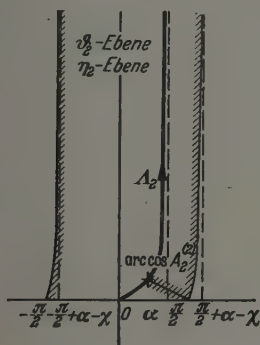
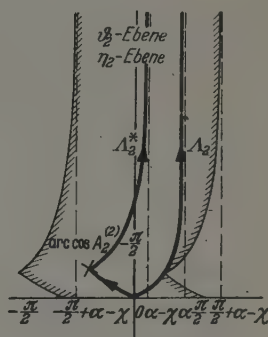


Fig. 19.

Die Abbildung $\vartheta_2 = \arccos \gamma_2$ der rechten γ_2 -Halbebene aus Fig. 18.

Fig. 20. Die Deformation des Weges A_2 in A_2^* .

der stetigen Deformation der Bereiche die Eindeutigkeit und der analytische Charakter des Integranden von (7) erhalten bleiben. Das Bild L_2^* in der $\cos \vartheta_2$ -Ebene des Weges A_2^* der ϑ_2 -Ebene weist im Punkte $\sin \arccos A_2^{(2)} = 1/n$ einen Knick auf entsprechend dem Knick bei $\arccos A_2^{(2)} - \frac{\pi}{2}$. Die Abbildung ist ja winkeltreu. Im Unendlichen nähert sich L_2^* asymptotisch der Geraden in der Richtung $e^{i(\chi - \alpha)}$. Wegen $n = |n|e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})}$ [nach (2). Abschnitt 3] bedeutet dies, daß der Faktor

$$e^{-inR \cos \eta_2} = e^{-i|n|R \tau \sin \chi} \cdot e^{-\tau|n|R \cos \chi}$$

für $\tau \rightarrow \infty$ gegen Null geht, das Integral also konvergiert. Nach diesen Vorbereitungen läßt sich genau wie im Falle des Mediums 1 zeigen, daß (7) identisch ist mit (5).

Zur Auswertung von (7) setze man

$$f_2^* = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_2=0}^{\vartheta_2=2\pi} e^{-in} \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2} d\vartheta_2 \cdot \frac{2n^3 \gamma_2}{\gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} d\vartheta_2. \quad (9)$$

Hier werde statt φ_2 vermöge der Beziehung (8) bei festem η_2 und ϑ_0 als Integrationsvariable γ_2 eingeführt. Das liefert:

$$d\gamma_2 = \sqrt{1 - W(\cos \eta_2, \gamma_2)} d\varphi_2 \quad (10)$$

mit

$$W(\cos \eta_2, \gamma_2) = \cos^2 \eta_2 - 2\gamma_2 \cos \eta_2 \cos \vartheta_0 + \gamma_2^2 - \sin^2 \vartheta_0, \quad (11)$$

und also

$$I_2^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^{(2)}} e^{-in \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2} d} \cdot \frac{2n^3 \gamma_2}{(\gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}) \sqrt{W(\cos \eta_2, \gamma_2)}} d\gamma_2. \quad (12)$$

Die Singularitäten des Integranden sind der unendlich ferne Punkt, die Punkte $A_1^{(2)}$, $A_2^{(2)}$, $P_2^{(2)}$ und die Nullstellen von $W(\cos \eta_2, \gamma_2) = 0$, d. h. die Punkte $\cos(\eta_2 \pm \vartheta_0)$. Nimmt man die in Fig. 22 stark ausgezogenen

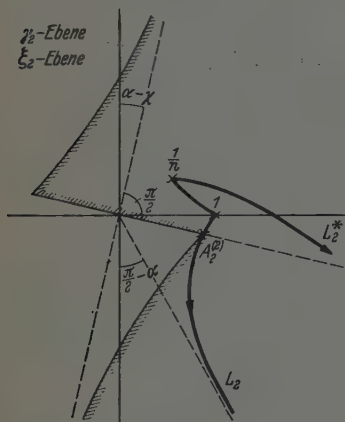


Fig. 21. Die durch die \cos -Funktion vermittelte Abbildung der (γ_2, η_2) -Ebene.

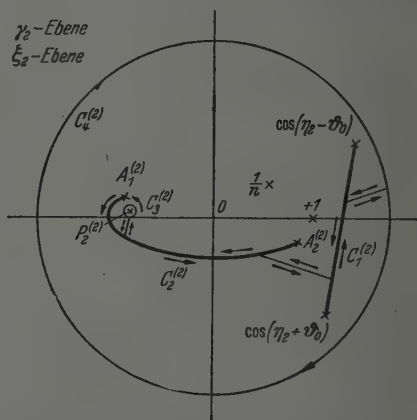


Fig. 22. Zur Veranschaulichung der Zerlegung des Integrals (15) in Teilintegrale.

Punktmengen und den unendlich fernen Punkt von der γ_2 -Ebene aus, so ist der Integrand von (12) in der übrigen γ_2 -Ebene eindeutig und regulär. Der Weg $C_1^{(2)}$ erstreckt sich im positiven Sinne um die geradlinie Verbindung von $\cos(\eta_2 + \vartheta_0)$ und $\cos(\eta_2 - \vartheta_0)$. Er kann, wie Fig. 22 zeigt, ersetzt werden durch die nacheinander zu durchlaufenden Wegstücke $C_2^{(2)}$, $C_3^{(2)}$, $C_4^{(2)}$, oder in sofort verständlicher Abkürzung

$$\int_{C_1^{(2)}} = - \int_{C_2^{(2)}} - \int_{C_3^{(2)}} - \int_{C_4^{(2)}}. \quad (13)$$

Setzt man in (7)

$$\xi_2 = \cos \eta_2, \quad (14)$$

so wird

$$2\pi i \prod^{(2)} = \int_{L_2^*} e^{-i R n \xi_2} d\xi_2 \int_{C_2^{(2)}} + \int_{C_3^{(2)}} e^{-i R n \xi_2} d\xi_2 \int_{C_4^{(2)}} + \int_{C_4^{(2)}} e^{-i R n \xi_2} d\xi_2 \int_{C_3^{(2)}}. \quad (15)$$

Ausführlicher geschrieben handelt es sich dann im folgenden um die Auswertung der Integrale:

$$J_I^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2^*} e^{-i R n \xi_2} d\xi_2 \int_{C_2^{(2)}} \frac{2n^3 \gamma_2}{\gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} \cdot \frac{e^{-in \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2} d}}{\sqrt{W(\xi_2, \gamma_2)}} d\gamma_2, \quad (16)$$

$$J_{II}^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2^*} e^{-i R n \xi_2} d\xi_2 \int_{C_3^{(2)}} \frac{2n^3 \gamma_2}{\gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} \cdot \frac{e^{-in \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2} d}}{\sqrt{W(\xi_2, \gamma_2)}} d\gamma_2, \quad (17)$$

$$J_{III}^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2^*} e^{-i R n \xi_2} d\xi_2 \int_{C_4^{(2)}} \frac{2n^3 \gamma_2}{\gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} \cdot \frac{e^{-in \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2} d}}{\sqrt{W(\xi_2, \gamma_2)}} d\gamma_2. \quad (18)$$

Für (16) kann man auch schreiben:

$$J_I^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(2)}} \frac{2n^3 \gamma_2 \cdot e^{-in \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2} d}}{\gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} d\gamma_2 \int_{L_2^*} \frac{e^{-i R n \xi_2}}{\sqrt{W(\xi_2, \gamma_2)}} d\xi_2. \quad (19)$$

Zur Sicherstellung von $\int_{L_2^*} \frac{e^{-i R n \xi_2}}{\sqrt{W(\xi_2, \gamma_2)}} d\xi_2$ für γ_2 auf $C_2^{(2)}$ ist anzugeben,

welche Werte $\xi_2^{(1)}$, $\xi_2^{(2)}$ aus $W(\xi_2, \gamma_2) = (\xi_2 - \xi_2^{(1)})(\xi_2 - \xi_2^{(2)})$ dabei annehmen kann bei festem ϑ_0 . Es ist

$$\xi_2^{(1)} = \gamma_2 \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - \gamma_2^2}; \quad \xi_2^{(2)} = \gamma_2 \cos \vartheta_0 - \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - \gamma_2^2}. \quad (20)$$

Der Ellipsenbogen zwischen $A_1^{(2)}$ und $A_2^{(2)}$ hat in der ϑ_2 -Ebene die in Fig. 23 stark ausgezogenen Strecken zum Bilde. $\xi_2^{(1)} = \cos(\vartheta_2 - \vartheta_0)$ durchläuft

in der γ_2 -Ebene den bei $A_2^{(2)} \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - (A_2^{(2)})^2}$ und $\xi_2^{(2)} = \cos(\vartheta_2 + \vartheta_0)$ den bei $A_2^{(2)} \cos \vartheta_0 - \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - (A_2^{(2)})^2}$ beginnenden Weg, falls γ_2 von $A_2^{(2)}$ nach $A_1^{(2)}$ auf dem Ellipsenbogen laufend gedacht wird (Fig. 24). Man erkennt in $1/n$ den einzigen Punkt der Ellipse, in welchem der Integrationsweg auch für $\vartheta_0 \sim \pi/2$ diese passieren kann. Die Integration

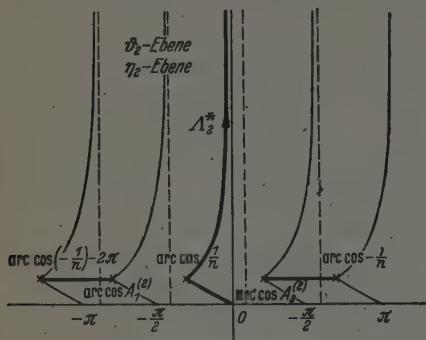


Fig. 23. Zur Veranschaulichung der Wurzeln von $W(\xi_2, \gamma_2) = 0$.

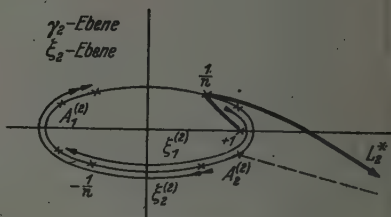


Fig. 24. Zur Veranschaulichung der Wurzeln von $W(\xi_2, \gamma_2) = 0$.

nach ξ_2 in (19) wird wieder am ehesten auf die Umgebung von $+1$ beschränkt werden können, wenn L_2^* in einen Weg L_2^{**} verlagert werden kann, auf dem der Integrand maximal abfällt. Um L_2^{**} zu finden, setze man $\xi_2 = 1 + \tau e^{i\psi}$, und erhält dann

$$-in\xi_2 = -i|n|\sin\alpha - |n|\cos\alpha + \tau|n|e^{i(\psi+\pi+\alpha)}.$$

Hier ist der Realteil am stärksten negativ, wenn $\psi + \pi + \alpha = \pi$ oder $\psi = -\alpha$ ist. Demnach wird man versuchen müssen, den Weg L_2^* in eine Gerade überzuführen, welche den Punkt $+1$ unter dem Winkel $-\alpha$ zur positiven reellen Achse verläßt. Die Verlagerung ist dann möglich, wenn bei festen γ_2 und ϑ_0 der Punkt $\xi_2^{(1)}$ umgangen wird (Fig. 25). Dies geschehe in folgender Weise: $e^{-iRu\xi_2}$ geht noch gegen Null für $\xi_2 \rightarrow \infty$ auf einer Geraden geringerer Neigung in beliebiger Nähe der Geraden durch 0 und $1/n$. Das Argument der Zahl

$$\xi_2^{(1)} - \xi_2^{(2)} = 2 \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - \gamma_2^2}$$

ist das von

$$\sqrt{1 - \gamma_2^2} = \sin \vartheta_2 = \cos \left(\vartheta_2 - \frac{\pi}{2} \right),$$

ist also, wie man aus Fig. 23 und 24 entnimmt, kleiner als das der Zahl $1/n$, wenn γ_2 auf dem Ellipsenbogen von $A_2^{(2)}$ nach $A_1^{(2)}$ läuft.

Es ist mithin gestattet, den Weg L_2^* in der aus Fig. 25 ersichtlichen Weise zu verlagern. $L_{2\alpha}^{**}$ ist ein Stück des Weges $1 + t_2 \cdot e^{-i\alpha}$, welches bis $1 + t_2^0 e^{-i\alpha}$ reicht. $L_{2\beta}^{**}$ schließt sich als halbkreisförmige Umgehung des Punktes $1 + (t_2^0 + \varrho_2) \cdot e^{-i\alpha}$ an, und $L_{2\gamma}^{**}$ ist der Rest des ins Unendliche

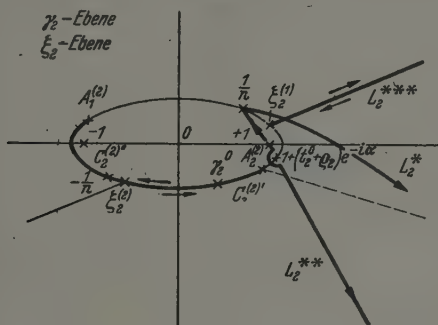


Fig. 25. Die Verlagerung des Weges L_9^* .

führenden Weges $1 + t_2 e^{-i\alpha}$. L_2^{***} umschlingt die geradlinige Verbindung von $\xi_2^{(1)}$ und ∞ , welche in Richtung $\xi_2^{(1)} - \xi_2^{(2)}$ geführt ist. Bezeichnet man mit γ_2^0 die Lösung der Gleichung

$$1 + (t_2^0 + \rho_2) e^{-t\alpha} = \gamma_2^0 \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - (\gamma_2^0)^2} \quad (21)$$

unter der Voraussetzung, daß gilt

$$\vartheta_0 > \vartheta_0^{(2)}; 1 + (t_2^0 + \varrho_2) e^{-i\alpha} = A_2^{(2)} \cos \vartheta_0^{(2)} + \sin \vartheta_0^{(2)} \sqrt{1 - (A_2^{(2)})^2}, \quad (22)$$

so hat man die Integration nach γ_2 in (19) längs der Schleife um $A_2^{(2)}$ bis γ_2^0 vorzunehmen und für die Integration über die Restschleife um den Punkt $A_2^{(2)}$ den Halbkreis $L_{2\beta}^{**'}$ auf die andere Seite des Punktes $1 + (t_2^0 + \varrho_2) e^{-i\alpha}$ zu legen. Ausführlich geschrieben lautet dann (19):

$$J_1^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int () d\gamma_2 \int_{L_{2\alpha}^{**}} () d\xi_2 + \frac{1}{2\pi i} \int () d\gamma_2 \int_{L_{2\beta}^{**'}} () d\xi_2 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int () d\gamma_3 \int_{L_{2\gamma}^{**}} () d\xi_2 + \frac{1}{2\pi i} \int () d\gamma_2 \int_{L_{2\delta}^{***}} () d\xi_2 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int () d\gamma_2 \int_{L_{2\alpha}^{**}} () d\xi_2 + \frac{1}{2\pi i} \int () d\gamma_2 \int_{L_{2\beta}^{***''}} () d\xi_2 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int () d\gamma_2 \int_{L_{2\gamma}^{**}} () d\xi_2, \quad (23)$$

bzw. abgekürzt:

$$J_{\text{I}}^{(2)} = J_{\text{I}\alpha}^{(2)} + J_{\text{I}\beta}^{(2)} + J_{\text{I}\gamma}^{(2)} + J_{\text{I}\delta}^{(2)} + J_{\text{I}\varepsilon}^{(2)} + J_{\text{I}\zeta}^{(2)} + J_{\text{I}\eta}^{(2)}. \quad (24)$$

Analog dem Vorgehen im Medium 1 werde wieder $J_{\text{I}\delta}^{(2)}$ zuerst ausgewertet. Es sei gesetzt:

$$J_{\text{I}\delta}^{(2)*} = \int_{L_2^{***}} \frac{e^{-i R n \xi_2}}{\sqrt{W(\xi_2, \gamma_2)}} d\xi_2 = \int_{L_2^{***}} \frac{e^{-i R n \xi_2}}{\sqrt{(\xi_2 - \xi_2^{(1)}) (\xi_2 - \xi_2^{(2)})}} d\xi_2. \quad (25)$$

Dann ergibt sich wie in Abschnitt 3:

$$J_{\text{I}\delta}^{(2)*} = -e^{-\frac{i R n}{2} (\xi_2^{(1)} + \xi_2^{(2)})} \int_{L_{2\sigma_2}^{***}} (\sigma_2^2 - 1)^{-1/2} \cdot e^{i v_2 \sigma_2} d\sigma_2, \quad (26)$$

worin $v_2 = -\frac{R}{2} n (\xi_2^{(1)} - \xi_2^{(2)})$ gesetzt wurde, und $\xi_2^{(1)} - \xi_2^{(2)}$ ein Argument besitzt, welches zwischen $\frac{\pi}{2} - \alpha$ und $\chi - \alpha$ liegt (vgl. Fig. 24). v_2 hat also ein Argument, das sich zwischen $\pi + \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \alpha$ und $\pi + \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \chi - \alpha$, d. h. zwischen π und $\frac{\pi}{2} + \chi$ bewegt. Mithin ist man nach (33), Abschnitt 3 berechtigt zu schreiben:

$$J_{\text{I}\delta}^{(2)} = -\frac{1}{2} \int_{C_{2\lambda_2}^{(2)}} \frac{2n^3 \gamma_2 e^{-i n \sqrt{\frac{1-\gamma_2^2}{n^2} + \gamma_2^2} d}}{\gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-\gamma_2^2}{n^2} + \gamma_2^2}} \cdot e^{-i R n \gamma_2 \cos \vartheta_0} \cdot H_0^{(1)}(-R n \sin \vartheta_0 \sqrt{1-\gamma_2^2}) d\gamma_2. \quad (27)$$

Hier setze man $\lambda_2 = -\sqrt{1-\gamma_2^2}$ und $-R \cos \vartheta_0 = z$; $R \sin \vartheta_0 = r$. Dann ist

$$J_{\text{I}\delta}^{(2)} = +\frac{1}{2} \int_{C_{2\lambda_2}^{(2)'}} \frac{2n^3 \sqrt{1-\lambda_2^2} \cdot e^{-i n \sqrt{\frac{1-\lambda_2^2}{n^2} - \lambda_2^2} d}}{-\sqrt{1-\lambda_2^2} + n^2 \sqrt{\frac{1-\lambda_2^2}{n^2} - \lambda_2^2}} \cdot e^{-i z n \sqrt{1-\lambda_2^2}} \cdot H_0^{(1)}(r n \lambda_2) \frac{\lambda_2}{\sqrt{1-\lambda_2^2}} d\lambda_2. \quad (28)$$

Dabei umschlingt der Weg $C_{2\lambda_2}^{(2)'}$ den Punkt $-\frac{1}{n}$ beiderseits des Ellipsenbogens bis $-\sqrt{1-(\gamma_2^0)^2}$. Entsprechend den beiden Bestandteilen $C_{2\lambda_2\alpha}^{(2)'}$,

$C_{2\lambda_2 i}^{(2)'}$, $C_{2\lambda_2 a}^{(2)'}$ der Weg am äußeren und $C_{2\lambda_2 i}^{(2)'}$ der Weg am inneren Ufer des Ellipsenbogens $C_{2\lambda_2}^{(2)'}$, kann man $J_{1\delta}^{(2)}$ zerlegen in

$$J_{1\delta}^{(2)} = J_{1\delta a}^{(2)} + J_{1\delta i}^{(2)}$$

$$= \int_{C_{2\lambda_2 a}^{(2)'}} \frac{n^2 \cdot e^{-in\sqrt{\frac{1}{n^2} - \lambda_2^2}d}}{-\sqrt{1-\lambda_2^2} + n^2\sqrt{\frac{1}{n^2} - \lambda_2^2}} \cdot e^{-inz\sqrt{1-\lambda_2^2}} \cdot H_0^{(1)}(rn\lambda_2) \frac{r\lambda_2 n}{r} d\lambda_2 +$$

$$+ \int_{C_{2\lambda_2 i}^{(2)'}} \frac{n^2 e^{+in\sqrt{\frac{1}{n^2} - \lambda_2^2}d}}{-\sqrt{1-\lambda_2^2} - n^2\sqrt{\frac{1}{n^2} - \lambda_2^2}} \cdot e^{-inz\sqrt{1-\lambda_2^2}} \cdot H_0^{(1)}(rn\lambda_2) \frac{r\lambda_2 n}{r} d\lambda_2. \quad (29)$$

Durch partielle Integration erhält man

$$J_{1\delta a}^{(2)} = - \frac{n^2 \cdot e^{-in\sqrt{\frac{1}{n^2} - \lambda_2^2}d}}{-\sqrt{1-\lambda_2^2} + n^2\sqrt{\frac{1}{n^2} - \lambda_2^2}} \cdot e^{-inz\sqrt{1-\lambda_2^2}} \cdot \frac{dH_0^{(1)}(rn\lambda_2)}{d(rn\lambda_2)} \cdot \frac{\lambda_2}{r} \cdot \frac{1}{-\sqrt{1-(\gamma_2^0)^2}} +$$

$$+ \int_{C_{2\lambda_2 a}^{(2)'}} \frac{d}{d\lambda_2} \left(\frac{n^2 e^{-in\sqrt{\frac{1}{n^2} - \lambda_2^2}d}}{-\sqrt{1-\lambda_2^2} + n^2\sqrt{\frac{1}{n^2} - \lambda_2^2}} \cdot e^{-inz\sqrt{1-\lambda_2^2}} \right) \frac{\lambda_2}{r} \cdot \frac{dH_0^{(1)}(rn\lambda_2)}{d(rn\lambda_2)} d\lambda_2.$$

und daraus weiter gemäß (40), Abschnitt 3, indem wie im folgenden die dem vorigen Abschnitt analogen Abschätzungen der höheren Reihenglieder nicht mehr ausdrücklich mitgeführt werden:

$$J_{1\delta a}^{(2)} = - \sqrt{\frac{2}{\pi}} i (rn\lambda_2)^{-1/2} \cdot \frac{n^2 \cdot e^{-in\sqrt{\frac{1}{n^2} - \lambda_2^2}d}}{-\sqrt{1-\lambda_2^2} + n^2\sqrt{\frac{1}{n^2} - \lambda_2^2}} \cdot$$

$$\cdot e^{-inz\sqrt{1-\lambda_2^2}} \cdot e^{i\left(rn\lambda_2 - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{\lambda_2}{r} \cdot \frac{1}{-\sqrt{1-(\gamma_2^0)^2}} +$$

$$+ \int_{C_{2\lambda_2 a}^{(2)'}} \frac{d}{d\lambda_2} \left(\frac{n^2 \cdot e^{-in\sqrt{\frac{1}{n^2} - \lambda_2^2}d}}{-\sqrt{1-\lambda_2^2} + n^2\sqrt{\frac{1}{n^2} - \lambda_2^2}} \cdot e^{-inz\sqrt{1-\lambda_2^2}} \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{\lambda_2}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} i (rn\lambda_2)^{-1/2} \cdot e^{i\left(rn\lambda_2 - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot d\lambda_2.$$

Hier setze man

$$\zeta_2 = \sqrt{\frac{1}{n^2} - \lambda_2^2}, \quad \frac{d\zeta_2}{d\lambda_2} = -\frac{\lambda_2}{\sqrt{\frac{1}{n^2} - \lambda_2^2}};$$

dann ergibt sich

$$\begin{aligned} J_{1\delta a}^{(2)} = & -\frac{e^{-in\sqrt{\frac{1}{n^2}-\lambda_2^2}d} \cdot e^{-izn\sqrt{1-\lambda_2^2}} \cdot e^{i(rn\lambda_2-\frac{\pi}{4})}}{r\sqrt{r}\sqrt{\pi}\left(-\sqrt{1-\lambda_2^2}+n^2\sqrt{\frac{1}{n^2}-\lambda_2^2}\right)} \cdot i\sqrt{2}\sqrt{\lambda_2}n\sqrt{n} \left| \frac{1}{- \sqrt{1-(\gamma_2^0)^2}} \right. \\ & - \int_{C_{2\lambda_2 a}^{(2)'}} \frac{\lambda_2}{\sqrt{\frac{1}{n^2}-\lambda_2^2}} \frac{d}{d\zeta_2} \left(\frac{n^2 e^{-in\sqrt{\frac{1}{n^2}-\lambda_2^2}d} \cdot e^{-izn\sqrt{1-\lambda_2^2}}}{-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\zeta_2^2}+n^2\zeta_2} \right) \\ & \cdot \frac{\lambda_2}{r} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} i (r\lambda_2 n)^{-1/2} \cdot e^{i(rn\lambda_2-\frac{\pi}{4})} d\lambda_2. \quad (30) \end{aligned}$$

Analog ergibt sich:

$$\begin{aligned} J_{1\delta i}^{(2)} = & -\frac{e^{+in\sqrt{\frac{1}{n^2}-\lambda_2^2}d} \cdot e^{-izn\sqrt{1-\lambda_2^2}} \cdot e^{i(rn\lambda_2-\frac{\pi}{4})}}{r\sqrt{r}\sqrt{\pi}\left(-\sqrt{1-\lambda_2^2}+n^2\sqrt{\frac{1}{n^2}-\lambda_2^2}\right)} \cdot i\sqrt{2}\sqrt{\lambda_2}n\sqrt{n} \left| \frac{-\sqrt{1-(\gamma_2^0)^2}}{-\frac{1}{n}} \right. \\ & - \int_{C_{2\lambda_2 i}^{(2)'}} \frac{\lambda_2}{\sqrt{\frac{1}{n^2}-\lambda_2^2}} \frac{d}{d\zeta_2} \left(\frac{n^2 e^{+in\sqrt{\frac{1}{n^2}-\lambda_2^2}d} \cdot e^{-izn\sqrt{1-\lambda_2^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\zeta_2^2}-n^2\zeta_2} \right) \times \\ & \times \frac{\lambda_2}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} i (r\lambda_2 n)^{-1/2} \cdot e^{i(rn\lambda_2-\frac{\pi}{4})} d\lambda_2. \quad (31) \end{aligned}$$

Mögen in (30) der erste und zweite Summand bzw. mit $J_{1\delta a\alpha}^{(2)}$ und $J_{1\delta a\beta}^{(2)}$, in (31) bzw. mit $J_{1\delta i\alpha}^{(2)}$ und $J_{1\delta i\beta}^{(2)}$ bezeichnet werden, dann ist zunächst, wenn man $\frac{1}{n} + \lambda_2 = m_2$ setzt:

$$\begin{aligned} J_{1\delta a\beta}^{(2)} = & r^{-3/2} \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} n\sqrt{n} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) e^{-ir} \int \left[\frac{\lambda_2 \sqrt{\lambda_2} i}{\sqrt{\frac{1}{n^2}-\lambda_2^2}} \times \right. \\ & \left. \times \frac{d}{d\zeta_2} \left(\frac{e^{-in\sqrt{\frac{1}{n^2}-\lambda_2^2}d} \cdot e^{-izn\sqrt{1-\lambda_2^2}}}{n^2\zeta_2 - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\zeta_2^2}} \right) \right] \frac{e^{irm_2 n}}{\sqrt{m_2}} dm_2. \quad (32) \end{aligned}$$

[] ist eine bei $m_2 = 0$ analytische Funktion $F_2(m_2)$, welche in erster Näherung gleich $F_2(0)$ gesetzt wird. $C_{2m_2a}^{(2)'}$ ist ein Weg, welcher aus $C_{2\lambda_2a}^{(2)}$ durch Parallelverschiebung um $1/n$ hervorgeht. Dann ergibt sich:

$$-\int_{C_{2m_2a}^{(2)'}} \frac{e^{-irn m_2}}{\sqrt{m_2}} d m_2 = \frac{1}{\sqrt{rn}} \sqrt{\pi} e^{i \frac{\pi}{4}} \quad (33)$$

(vgl. die analoge Rechnung in Abschnitt 3). Ferner ist:

$$\begin{aligned} F_2^{(0)} &= \frac{i \lambda_2 \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} - \lambda_2}} \cdot \frac{d}{d \zeta_2} \left(\frac{e^{-in \zeta_2 d} \cdot e^{-iz n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} + \zeta_2^2}}}{n^2 \zeta_2 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} + \zeta_2^2}} \right) \Big|_{\substack{\lambda_2 = -\frac{1}{n^2} \\ \zeta_2 = 0}} \\ &= \frac{i^2}{n \sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \left(-i n d e^{-iz n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} - n^2 e^{-\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \cdot iz n} \right)}{1 - \frac{1}{n^2}} \\ &= -e^{-iz n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \cdot n^2 \cdot \frac{id \sqrt{n^2 - 1} - n^2}{n \sqrt{2} (n^2 - 1)} \end{aligned} \quad (34)$$

(33) und (34) in (32) eingesetzt, liefern:

$$J_{1\partial a\beta}^{(2)} = -\frac{1}{r^2} e^{-ir - iz \sqrt{n^2 - 1}} \frac{n^2 i d \sqrt{n^2 - 1} - n^2}{n^2 - 1}$$

Analog ergibt sich:

$$J_{1\partial i\beta}^{(2)} = -\frac{1}{r^2} e^{-ir - iz \sqrt{n^2 - 1}} \frac{n^2 i d \sqrt{n^2 - 1} - n^2}{n^2 - 1}$$

Also ist insgesamt nach (29):

$$\begin{aligned} J_{1\partial}^{(2)} &= e^{iz \gamma_2^0} \cdot e^{-i \left(rn \sqrt{1 - (\gamma_2^0)^2} + \frac{\pi}{4} \right)} \cdot \frac{i \sqrt{2} n \sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \cdot r^{-3/2} \sqrt{-1 - (\gamma_2^0)^2} \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{e^{-in \sqrt{\frac{1}{n^2} - 1 + (\gamma_2^0)^2} \cdot d}}{\gamma_2^0 + n^2 \sqrt{\frac{1}{n^2} - 1 + (\gamma_2^0)^2}} + \frac{e^{+in \sqrt{\frac{1}{n^2} - 1 + (\gamma_2^0)^2} \cdot d}}{-\gamma_2^0 + n^2 \sqrt{\frac{1}{n^2} - 1 + (\gamma_2^0)^2}} \right\} - \\ &- \frac{2}{r^2} \frac{n^2 (id \sqrt{n^2 - 1} - n^2)}{n^2 - 1} \cdot e^{-ir - iz \sqrt{n^2 - 1}} \end{aligned} \quad (35)$$

Die Summanden $J_{1\beta}^{(2)}$, $J_{1\zeta}^{(2)}$ aus (24) geben, wie eine den analogen Summanden im Medium 1 entsprechende Rechnung zeigt, Beiträge zur Wellenform e^{-iRn}

von der Größe $e^{-iRn} O(\varrho_2^{1/2} e^{-R|n|(t_2^0 + \varrho_2)})$. Die beiden Bestandteile von (24) $J_{1\gamma}^{(2)}, J_{1\eta}^{(2)}$ tragen zu derselben Wellenform in der Größe

$$e^{-iRn} O\left(\frac{e^{-R|n|(t_2^0 + 2\varrho_2)}}{\sqrt{\varrho_2} R}\right)$$

bei. Indem die Summanden $J_{1\alpha}^{(2)}, J_{1\beta}^{(2)}$ wieder zu einem Integral über die Schleife $C_2^{(2)}$ (Fig. 25) vereinigt werden, ergibt sich insgesamt für $J_I^{(2)}$:

$$\begin{aligned} J_I^{(2)} = & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(2)}} \frac{2n^3 \gamma_2 e^{-in \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2} d}}{\gamma_2^2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} d\gamma_2 \int_{L_{2\alpha}^{**}} \frac{e^{-iRn\xi_2}}{\sqrt{W(\xi_2, \gamma_2)}} d\xi_2 + \\ & + e^{izn\gamma_2^0} \cdot e^{-i(rn\sqrt{1-(\gamma_2^0)^2})} \cdot e^{\frac{i\pi}{4} \frac{\sqrt{2n}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} r^{-3/2} \sqrt{-1-(\gamma_2^0)^2}} \cdot \\ & \cdot \left\{ \frac{e^{-in \sqrt{\frac{1}{n^2} - 1 + (\gamma_2^0)^2} d}}{\gamma_2^0 + n^2 \sqrt{\frac{1}{n^2} - 1 + (\gamma_2^0)^2}} + \frac{e^{+in \sqrt{\frac{1}{n^2} - 1 + (\gamma_2^0)^2} \cdot d}}{-\gamma_2^0 + n^2 \sqrt{\frac{1}{n^2} - 1 + (\gamma_2^0)^2}} + O(r^{-1}) \right\} - \\ & - e^{-ir-iz\sqrt{n^2-1}} \cdot \frac{2n^2(i d \sqrt{n^2-1-n^2})}{r^2(n^2-1)} + \\ & + e^{-iRn} O(R^{-1/2} \cdot e^{-R|n|(t_2^0 + \varrho_2)}), \quad (36) \end{aligned}$$

wobei $\varrho_2 = \frac{1}{R}$ angenommen wurde und $t_2^0 + \varrho_2$ gleich ist der Entfernung des Schnittpunktes der Geraden $1 + t_2 e^{-i\alpha}$ mit der Ellipse vom Brennpunkt $+1$ (Fig. 25). Wegen (21) darf man schreiben:

$$r \sqrt{1 - (\gamma_2^0)^2} - z \gamma_2^0 = R [1 + (t_2^0 + \varrho_2) e^{-i\alpha}],$$

weshalb in (36) gesetzt werden kann:

$$e^{-ir-iz\sqrt{n^2-1} + izn\gamma_2^0} = e^{-iRn} \cdot e^{-R|n|(t_2^0 + \varrho_2)}.$$

Dieser Summand geht also in den Wellentyp e^{-iRn} mit einer Größenordnung ein, wie sie bereits für den letzten Summanden in (36) angegeben ist. Endgültig ist mithin:

$$\begin{aligned} J_I^{(2)} = & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(2)}} \frac{2 \cdot n^3 \gamma_2 e^{-in \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2} d}}{\gamma_2^2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} d\gamma_2 \int_{L_{2\alpha}^{**}} \frac{e^{-iRn\xi_2}}{\sqrt{W(\xi_2, \gamma_2)}} d\xi_2 - \\ & - e^{-ir-iz\sqrt{n^2-1}} \left[\frac{2n^2(-n^2 + i d \sqrt{n^2-1})}{r^2(n^2-1)} + O(r^{-5/2}) \right] + \\ & + e^{-iRn} [O(r^{-3/2} \cdot e^{-R|n|(t_2^0 + \varrho_2)}) + O(R^{-1/2} \cdot e^{-R|n|(t_2^0 + \varrho_2)})]. \quad (37) \end{aligned}$$

Dem Vorgehen im Medium 1 entsprechend werden die beiden bleibenden Summanden $J_{\text{II}}^{(2)}$, $J_{\text{III}}^{(2)}$, welche in (17) bzw. (18) dargestellt sind, dadurch zerlegt, daß der Integrationsweg L_2^* erlaubterweise nach der Geraden $1 + t_2 e^{-i\alpha}$ verlagert und alsdann in zwei Teile gespalten wird, die durch den Punkt $1 + t_2^0 e^{-i\alpha}$ getrennt sind. Für $J_{\text{II}}^{(2)}$ liefert das Integral von $t_2 = t_2^0$ bis $t_2 = \infty$ den Beitrag $e^{-inR} O(R^{-1} \cdot e^{-R|n|(\ell_2^0 + \ell_2)})$, für $J_{\text{III}}^{(2)}$ das entsprechende Integral denselben Beitrag, so daß man gemäß (15) für $\Pi^{(2)}$ erhält:

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)} = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(2)}} \frac{2n^3 \gamma_2 e^{-in\sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2} d}}{\gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} d\gamma_2 \int_{L_{2\alpha}^{**}} \frac{e^{-iRn\xi_2}}{\sqrt{W(\xi_2, \gamma_2)}} d\xi_2 - \\ & - e^{-ir-iz\sqrt{n^2-1}} \left[\frac{2n^2(id\sqrt{n^2-1}-n^2)}{r^2(n^2-1)} + O(r^{-5/2}) \right] + \\ & + e^{-iRn} [O(r^{-3/2} e^{-R|n|(\ell_2^0 + \ell_2)}) + O(R^{-1/2} e^{-R|n|(\ell_2^0 + \ell_2)})]. \quad (38) \end{aligned}$$

Es sei gesetzt

$$\Pi^{(2)*} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^{(2)}} \frac{2n^3 \gamma_2 e^{-in\sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2} d}}{\gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} d\gamma_2 \int_{L_{2\alpha}^{**}} \frac{e^{-inR\xi_2}}{\sqrt{W(\xi_2, \gamma_2)}} d\xi_2, \quad (39)$$

und es werde durch (4) wieder ψ_2 statt γ_2 eingeführt:

$$\Pi^{(2)*} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2n^3 \gamma_2 e^{-in\sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2} d}}{\gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} d\psi_2 \int_{L_{2\alpha}^{**}} e^{-inR\xi_2} d\xi_2. \quad (40)$$

Dann interessiert zunächst der Ausdruck

$$f_2^*(t_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2n^3 \gamma_2 e^{-ind\sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}}}{\gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} d\psi_2, \quad (41)$$

und hier wieder

$$f_2(\gamma_2) = \frac{2n^3 \gamma_2 \cdot e^{-ind\sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}}}{\gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}}, \quad (42)$$

welches in der Umgebung von $\gamma_{20} = \cos \vartheta_0$ entwickelt werde:

$$f_2(\gamma_2) = f_2(\gamma_{20}) + f'_2(\gamma_{20})(\gamma_2 - \gamma_{20}) + \frac{f''_2(\gamma_{20})}{2!}(\gamma_2 - \gamma_{20})^2 + \dots \quad (43)$$

$$\text{mit } (\gamma_2 - \gamma_{20})^h = [\cos \vartheta_0 (\cos \gamma_{12} - 1) - \sin \gamma_{12} \cos \psi_2 \sin \vartheta_0]^h, \quad (h = 1, 2, 3, \dots). \quad (44)$$

Hier ist zu setzen

$$\cos \gamma_{12} = 1 + t_2 e^{-i\alpha}; \quad \sin^2 \gamma_{12} = -t_2 e^{-i\alpha} (2 + t_2 e^{-i\alpha}).$$

Das liefert ein Polynom in t_2 , welches bei geradem h als niedrigste vorkommende Potenz $t_2^{\frac{h}{2}}$ und $t_2^{\frac{h+1}{2}}$ bei ungeradem h hat. In der Entwicklung von $f_2(\gamma_2)$ hat man also bis $(\gamma_2 - \gamma_{20})^2$ zu gehen, wenn man sich mit der ersten Potenz von t_2 begnügen will. Dann ist

$$\begin{aligned} f_2^*(t_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f_2(\gamma_{20}) + f'_2(\gamma_{20}) \cos \vartheta_0 t_2 e^{-i\alpha} + \frac{f''_2(\gamma_{20})}{2!} \right. \\ \cdot [\cos^2 \vartheta_0 t_2^2 e^{-2i\alpha} - t_2 e^{-i\alpha} (2 + t_2 e^{-i\alpha}) \cos^2 \psi_2 \sin^2 \vartheta_0] + \\ \left. + (\gamma_2 - \gamma_{20})^3 F(\gamma_2 - \gamma_{20}) \right\} d\psi_2. \end{aligned} \quad (45)$$

F ist dabei eine bei $\gamma_2 = \gamma_{20}$ analytische Funktion. Die Integration nach ψ_2 liefert:

$$\begin{aligned} f_2^*(t_2) = f_2(\gamma_{20}) + t_2 f'_2(\gamma_{20}) \cos \vartheta_0 e^{-i\alpha} - \frac{f''_2(\gamma_{20})}{2} \sin^2 \vartheta_0 e^{-i\alpha} + \\ + t_2^2 \Phi(t_2). \end{aligned} \quad (46)$$

Daraus folgt gemäß (40):

$$\Pi^{(2)*} = -e^{-i(\alpha + nR)} \int_0^{t_2^0} e^{-R|n|t_2} f_2^*(t_2) dt_2. \quad (47)$$

Analog (82), Abschnitt 3, ist dann:

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)*} = -e^{-i(\alpha + nR)} \left[\frac{f_2(\gamma_{20})}{R|n|} + O(R^{-1} e^{-R|n|t_2^0}) \right] + \\ + \frac{e^{-i\alpha}}{R^2 |n|^2} \left(f'_2(\gamma_{20}) \cos \vartheta_0 - \frac{f''_2(\gamma_{20})}{2} \sin^2 \vartheta_0 + O(R^{-3}) \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Hier setze man

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{12}(\gamma_2) &= \frac{2n^3 \gamma_2}{\gamma_2 + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} \\ f_2(\gamma_2) &= g_2(\gamma_2) \cdot e^{-i n d \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} \end{aligned} \right\}, \quad (49)$$

und also

oder

$$f'_2(\gamma_2) = g'_2 e^{-ind \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} + g_2 \cdot \frac{-ind \gamma_2}{\sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} \cdot e^{-ind \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}}$$

$$f'_2(\gamma_2) = e^{-ind \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} \left(g'_2 - \frac{ind g_2 \gamma_2}{\sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}} \right), \quad (50)$$

und schließlich

$$f''_2(\gamma_2) = \frac{e^{-ind \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}}}{\sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}^3} \left[-2ind \gamma_2 g'_2 \left(\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2 \right) - \right.$$

$$\left. - n^2 d^2 \gamma_2^2 g_2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2} + g'_2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}^3 - \frac{id(1-n^2)g_1}{n} \right]. \quad (51)$$

Damit ergibt sich endgültig aus (38) für die Gesamterregung im Medium 2:

$$\Pi^{(2)} = -e^{-inR} \cdot e^{-i\alpha} \left\{ \frac{f_2(\gamma_{20})}{R|n|} + \frac{e^{-i\alpha}}{R^2|n|^2} \left[f'_2(\gamma_{20}) \cdot \gamma_{20} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{f''_2(\gamma_{20})}{2} (1 - \gamma_{20}^2)^2 \right] + O(R^{-3}) \right\} -$$

$$- e^{-ir - iz\sqrt{n^2-1}} \left[\frac{2n^2(-n^2 + id\sqrt{n^2-1})}{r^2(n^2-1)} + O(r^{-5/2}) \right]. \quad (52)$$

Die Bedeutung von $f_2(\gamma_{20})$, $f'_2(\gamma_{20})$, $f''_2(\gamma_{20})$ entnehme man bzw. (49), (50) und (51).

$d, R, r, \gamma_{20} = \cos \vartheta_0$ haben dieselbe Bedeutung wie in (86), Abschnitt 3 [Aufpunktdefinition nach (3)];

$\sqrt{n^2-1}$ ist im zweiten Quadranten gelegen;

$\sqrt{\frac{1-n^2}{n^2} + \gamma_2^2}$ ist so zu wählen, daß die Wurzel für große γ_2 in γ_2 übergeht;

α, n gemäß (2), Abschnitt 3, $O()$ vgl. (38), Abschnitt 3.

Die Lösung (52) im Medium 2 gibt die Glieder bis zur reziproken zweiten Potenz der Entfernungen explizit an. Im ersten Summanden erkennt man eine Kugelwelle, die gebrochene Welle, welche im Koordinatenanfangspunkt ihren Ursprung hat mit einer Amplitude, die in sehr komplizierter Weise von der Zenitdistanz ϑ_0 des Aufpunktes und der Entfernung d der im Medium befindlichen Kugelwellenquelle von der Trennungsebene der Medien abhängt. Eine nähere Diskussion der Amplitude dürfte nur in den konkreten Fällen der vielen Anwendungsmöglichkeiten fruchtbar sein. Im folgenden wird nur die Spezialisierung auf den Fall $d = 0$, $\vartheta_0 \sim \pi/2$

durchgeführt, welche der Theorie von Sommerfeld entspricht. Den zweiten Summanden in (52) erkennt man als gedämpfte Kugelwelle, wenn man beachtet, daß $r + z \sqrt{n^2 - 1} = R (\sin \vartheta_0 - \cos \vartheta_0 \sqrt{n^2 - 1}) = n R (A_2^{(2)} \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - (A_2^{(2)})^2})$ ist (Fig. 24). Für $\vartheta_0 = \vartheta_0^{(2)}$ geht sie analog der entsprechenden Welle im Medium 1 [vgl. (86), Abschnitt 3] in die Kugelwelle $e^{-i R n}$ über.

Die Spezialisierung auf $d = 0$, $\vartheta_0 \sim \pi/2$ ergibt zunächst für $d = 0$:

$$\begin{aligned} \prod_{d=0}^{(2)} = & -e^{-i n R} e^{-i \alpha} \left\{ \frac{g_2(\gamma_{20})}{R |n|} + \frac{e^{-i \alpha}}{R^2 |n|^2} \times \right. \\ & \times \left[g_2'(\gamma_{20}) \cdot \gamma_{20} - \frac{(1 - \gamma_{20})^2}{2} g_2''(\gamma_{20}) \right] + O(R^{-3}) \Big\} - \\ & - e^{-i(r+z\sqrt{n^2-1})} \left[\frac{2n^4}{r^2(1-n^2)} + O(r^{-5/2}) \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Hier sind $g_2(\gamma_{20})$, $g_2'(\gamma_{20})$ und $g_2''(\gamma_{20})$ gemäß (49) zu berechnen. Es ist für $\gamma_{20} = \cos \vartheta_0 = -\frac{z}{R}$ und $-z \ll R$:

$$\left. \begin{aligned} g_2(\gamma_{20}) &= \frac{-2n^3 \frac{z}{R}}{-\frac{z}{R} + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2}}} = -\frac{2n^3}{\sqrt{1-n^2}} \cdot \frac{z}{R}, \\ g_2'(\gamma_{20}) &= \frac{2n^3(1-n^2)}{\sqrt{\frac{1-n^2}{n^2}} \left(-\frac{z}{R} + n^2 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2}}\right)} = \frac{2n^2}{\sqrt{1-n^2}}, \\ g_2''(\gamma_{20}) &= \frac{-2n^2(1-n^2) \left(-3\frac{z}{R} n^2 + 2\sqrt{\frac{1-n^2}{n^2}}\right)}{\frac{1-n^2}{n^3} \cdot n^6 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2}} \cdot \frac{1-n^2}{n^3}} = \frac{-4n}{1-n^2}. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Also wird:

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{d=0 \\ \vartheta_0 \sim \frac{\pi}{2}}}^{(2)} = & -i \frac{e^{-i n R}}{R^2} \left(\frac{2nz}{\sqrt{1-n^2}} + \frac{2i}{n(1-n^2)} \right) - \\ & - e^{-i(r+z\sqrt{n^2-1})} \frac{2n^4}{r^2(1-n^2)}. \end{aligned} \quad (55)$$

($\sqrt{1-n^2}$, $\sqrt{n^2-1}$ bzw. im dritten und zweiten Quadranten gelegen).

Das Resultat ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Sommerfeld, welches für Medium 2 lautet¹⁾:

$$\begin{aligned} \prod_S^{(2)} = & -i n \frac{1+\bar{n}^2}{2\bar{n}^2} \left[\frac{2}{\bar{n}^2(n^2-1)} - \frac{2z}{\sqrt{\bar{n}^2-1}} \right] \cdot \frac{e^{i\bar{n}r}}{r^2} - \\ & - i \frac{1+\bar{n}^2}{2\bar{n}^3} \cdot \frac{2\bar{n}^4}{1-\bar{n}^2} \cdot \frac{e^{i\bar{r}+\sqrt{1-\bar{n}^2}z}}{r^2} \quad (z < 0). \end{aligned} \quad (56)$$

¹⁾ A. Sommerfeld, l. c., S. 700.

5. Die Hertzischen Funktionen in beiden Medien bei reellem Brechungsindex.

Den Übergang zu reellem Brechungsindex denke man sich im Medium 1 an Hand der Fig. 9 dadurch vollzogen, daß n auf die reelle positive Achse rückt. Dabei rücken $A_1^{(1)}$ auf die positive und $A_2^{(1)}$ auf die negative imaginäre Achse, während der Pol $P_2^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{n^2 + 1}}$ auf die negative reelle Achse zu liegen kommt. Die Integrationswege $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, $C_3^{(1)}$, $C_4^{(1)}$ können ohne Besonderheiten entsprechend gelegt werden, und die Verlagerung des Weges L_1^* nach L_1^{**} und L_1^{***} (Fig. 12) ist wie bei komplexem Brechungsindex möglich. Dann ist aber auch die Auswertung der Integrale ohne Berücksichtigung von Besonderheiten möglich. Das Ergebnis der Rechnung für komplexen Brechungsindex [(86), Abschnitt 3] kann direkt übernommen werden.

Die Hertzische Funktion $\Pi^{(1)}$ für reellen Brechungsindex im Medium 1 hat die Form:

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)} &= \frac{e^{-iR_d}}{-iR_d} + ie^{-iR} \cdot e^{-i\gamma_{10}d} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{R} g_1(\gamma_{10}) + \frac{i}{R^2} \left[\frac{1-\gamma_{10}^2}{2} (g_1'(\gamma_{10}) - 2idg_1'(\gamma_{10}) - d^2g_1(\gamma_{10})) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \gamma_{10}(g_1'(\gamma_{10}) - idg_1(\gamma_{10})) \right] + O(R^{-3}) \right\} - \\ &- e^{-irn-z\sqrt{n^2-1}} \cdot e^{-\sqrt{n^2-1}d} \left(\frac{2}{r^2} \cdot \frac{1}{n(n^2-1)} + O(r^{-5/2}) \right) \end{aligned} \quad (1)$$

mit den Bedeutungen der Buchstaben, wie sie in (86), Abschnitt 3, angenommen sind. Entsprechend der Lage von $\sqrt{1-n^2}$ im ersten Quadranten ist für reelles n gesetzt worden $\sqrt{1-n^2} = +i\sqrt{n^2-1}$. Die Spezialisierung auf $d=0$, $\vartheta_0 \sim \pi/2$ liefert entsprechend (96), Abschnitt 3

$$\Pi_{d=0}^{(1)} = \frac{ie^{-iR}}{R^2} \left(\frac{2n^2z}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{2in^4}{n^3-1} \right) - e^{-irn-z\sqrt{n^2-1}} \cdot \frac{2}{r^2} \cdot \frac{1}{n(n^2-1)}. \quad (2)$$

$\vartheta_0 \sim \frac{\pi}{2}$

Versucht man im Medium 2 entsprechend Fig. 22 durch $A_1^{(2)}$ und $A_2^{(2)}$ eine Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 zu legen und läßt dabei n allmählich reell werden, so sieht man, daß die Ellipse in die doppelt durchlaufene Strecke der reellen Achse von -1 bis $+1$ degeneriert. Fig. 26 zeigt für reelle n die Grenzlage der Singularitäten

$$A_2^{(2)} = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}; \quad A_2^{(2)} = -\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}; \quad P_2^{(2)} = -\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Der Punkt $1/n$ der Fig. 25 rückt dabei auf einen Platz zwischen 0 und $+1$ auf der reellen Achse. Der Punkt $1 + (t_2^0 + \varrho_2) e^{-i\alpha}$ derselben Abbildung fällt mit $+1$ zusammen, während der Weg L_2^{**} entsprechend $\alpha = \pi/2$ für

reelle n in die von $+1$ ausgehende Parallele zur negativen imaginären Achse übergeht und L_2^{***} das Stück der positiven reellen Achse von $\xi_2^{(1)}$ bis $+\infty$

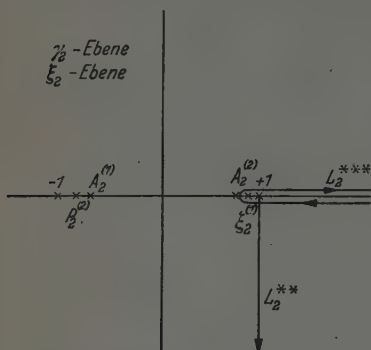


Fig. 26. Die Integrationswege bei reellem Brechungsindex (Medium 2).

umschlingt. Man erkennt aus dem Vergleich der Fig. 25 und 26, daß die Integration über die Wegbestandteile $L_{2\alpha}^{**}$ und $L_{2\beta}^{**}$ entfällt. Nach Aussonderung des Summanden $J_{I\beta}^{(2)}$ in (23), Abschnitt 4, können dann $J_{I\alpha}^{(2)}$, $J_{II}^{(2)}$, $J_{III}^{(2)}$ wie in (39), Abschnitt 4, zu einem $II^{(2)*}$ zusammengefaßt werden, nur daß statt des bis $1 + (t_2^0 + \varrho_2) e^{-i\alpha}$ reichenden Weges $L_{2\alpha}^{**}$ der Weg L_2^* genommen werden muß, woraus sich für $II^{(2)*}$ dasselbe ergibt wie in (48), Abschnitt 4, bei $\alpha = \pi/2$.

Die Hertz'sche Funktion $II^{(2)}$ für reellen Brechungsindex im Medium 2 hat also gemäß (52), Abschnitt 4, die Form:

$$\Pi^{(2)} = i e^{-i n R} \left\{ \frac{f_2(\gamma_{20})}{R n} - \frac{i}{R^2 n^2} \left[f_2'(\gamma_{20}) \cdot \gamma_{20} - \frac{f_2''(\gamma_{20})}{2} (1 - \gamma_{20}^2) \right] + O(R^{-3}) \right\} - e^{-i r - i z \sqrt{n^2 - 1}} \left[\frac{2 n^2 (-n^2 + i d \sqrt{n^2 - 1})}{r^2 (n^2 - 1)} + O(r^{-5/2}) \right]. \quad (3)$$

Die Spezialisierung auf $d = 0$, $\vartheta_0 \sim \pi/2$ ergibt nach (55), Abschnitt 4

$$\Pi_{d=0}^{(2)} = \frac{-i e^{-i n R}}{R^2} \left(+ \frac{2 n z i}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{2 i}{n (1 - n^2)} \right) - e^{-i(r+z\sqrt{n^2-1})} \cdot \frac{2 n^4}{r^2 (1 - n^2)}. \quad (4)$$

$\vartheta_0 \sim \frac{\pi}{2}$

Die Ergebnisse (2) und (4) müssen mit dem Resultat übereinstimmen, welches Joos und Teltow¹⁾ zur Deutung der von v. Schmidt²⁾ experimentell gefundenen Kegelwellenfront bei der Knallwellenausbreitung aus der Sommerfeld'schen Theorie fanden. Dies Resultat lautet, wenn $k_1 = +1$, $k_2 = n$ gesetzt werden

$$\Pi_{\mathcal{L}}^{(1)} = Q_1^{(1)} + Q_1^{(2)} = + \frac{n^2 + 1}{r^2} \left(\frac{i n^2}{n^2 - 1} + \frac{z}{\sqrt{n^2 - 1}} \right) e^{i r} - \frac{i n}{r^2} \cdot \frac{n^2 + 1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2 (n^2 - 1)} \cdot e^{i n r - \sqrt{n^2 - 1} z} (z > 0), \quad (5)$$

$$\Pi_{\mathcal{L}}^{(2)} = Q_2^{(1)} + Q_2^{(2)} = i n \frac{n^2 + 1}{r^2} \left(\frac{1}{n^4 (1 - n^2)} + \frac{z}{n^2 \sqrt{n^2 - 1}} \right) e^{i n r} + + i \frac{n^2 + 1}{r^2} \cdot \frac{n^2}{n^2 - 1} \cdot e^{i(r - \sqrt{n^2 - 1} z)} (z < 0). \quad (6)$$

¹⁾ G. Joos u. J. Teltow, l. c., S. 291. — ²⁾ O. v. Schmidt, l. c., S. 870.

Bildet man wie in den vorigen Abschnitten die konjugiert komplexen Werte $\overline{II_J^{(1)}}$, $\overline{II_J^{(2)}}$ und multipliziert mit $+i$, so erkennt man die Übereinstimmung von (2), (4) mit bzw. (5), (6). Die Ergebnisse (1), (3) gestatten über diesen speziellen von Joos und von Teltow behandelten Fall hinausgehend eine völlige Beschreibung der Versuchsergebnisse von v. Schmidt für den Fall, daß die Kugelwellenquelle in endlicher Entfernung von der Trennungsebene der Medien in dem Medium mit der größeren Fortpflanzungsgeschwindigkeit gelegen ist. Danach erhält man also im Medium 1 eine einfallende Kugelwelle e^{-iRd} , eine reflektierte Kugelwelle e^{-iR} und eine in z -Richtung exponentiell gedämpfte Welle e^{-irn} , welche außerdem noch um so stärker gedämpft ist, je weiter die Quelle der einfallenden Welle von der Trennungsebene entfernt ist. Im Medium 2 gibt es die durchgehende Welle e^{-inR} und eine Kugelwellenfront $r + z\sqrt{n^2 - 1} = \text{const}$, welche für $\sin \vartheta_0 + \cos \vartheta_0 \sqrt{n^2 - 1} = n$, d. h. $\sin \vartheta_0 = 1/n$ in die Welle e^{-inR} übergeht, wie es der Versuch von v. Schmidt zeigt¹⁾.

Es liegt im allgemeinen Charakter des Problems begründet, wenn die Ergebnisse (1) und (3) nicht nur für die Mechanik der Kontinua wichtig sind, wie im Falle der von v. Schmidt entdeckten Kegelknallwellenfront, sondern auch in der Optik zu fruchtbarer Anwendung tauglich scheinen.

Herrn Prof. Dr. Clemens Schaefer danke ich für die Anregung zur Behandlung des Gegenstandes und das stete Interesse, mit dem er das unter schwierigen äußeren Umständen erfolgte Zustandekommen der Arbeit begleitet hat, ebenso Herrn Dozent Dr. E. Mohr für manche Diskussion.

Breslau, Physikalisches Institut der Universität, im August 1942.

¹⁾ O. v. Schmidt, l. c., S. 870, Abb. 5, 6.

Beitrag zum Problem der Bestimmung von Größe und Gestalt ultramikroskopischer Teilchen.

Von Walter Hanke in Berlin.

Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 3. Januar 1943.)

Die Frage der Bestimmung von Größe und Gestalt ultramikroskopischer Teilchen wird an Hand von zwei Schulbeispielen behandelt. Als Kennzeichen für das beobachtete Beugungsbild dient die „Sichtbarkeitsfunktion“, deren allgemeiner Ausdruck in Abschnitt 1 entwickelt und diskutiert wird. Der entwickelte Ausdruck wird in Abschnitt 2 auf die Untersuchung eines Parallelogramms, in Abschnitt 3 auf die eines Dreiecks als Objektfigur angewandt. — Besonders einfach werden die Verhältnisse für ganz kleine Objekte (weit unterhalb der Grenze der Auflösung), wofür in Abschnitt 4 interessante Vergleiche gezogen werden. — Den experimentellen Gegebenheiten trägt Abschnitt 5 Rechnung durch Behandlung der Beugung am Doppelspalt endlicher Spaltbreite.

Einführung.

Die theoretische Behandlung des Problems, aus dem nach Unterschreitung der Auflösungsgrenze eines optischen Systems in Erscheinung tretenden Beugungsbilde Schlüsse zu ziehen auf die Beschaffenheit des abgebildeten Objekts, geschah bisher auf zwei voneinander völlig verschiedenen Grundlagen. Im Anschluß an die von Michelson gegebene Theorie der Ausmessung von Fixsternen behandelten einige Autoren auch die mikroskopische Abbildung unter Zugrundelegung des üblichen Kirchhoffschen Ansatzes. Andere dagegen gehen von den von Gans¹⁾ durchgeführten Entwicklungen aus, welche für die Verhältnisse bei der ultramikroskopischen Abbildung hergeleitet sind, wo die Objektdimension klein gegen die Wellenlänge ist, während für die zuerst genannte Theorie die entgegengesetzte Voraussetzung notwendig ist. Wir haben also zwei Grenzfälle vor uns, die jedoch, wie sich zeigen wird, in ihren Aussagen leicht zu vergleichen sind.

1. Abbildung durch den Doppelspalt.

Da wir es auf die Abbildung unterhalb der Grenze der Auflösung abgesehen haben, wo Objektähnlichkeit nicht mehr besteht, ist es gleichgültig, ob die Beugung an einer kreissymmetrischen Öffnung stattfindet oder ob eine Öffnung verwendet wird, die stets — auch oberhalb der Auflösungsgrenze — unähnliche Bilder liefert. Es wurde nun die Beugung an derjenigen Öffnung untersucht, welche mathematisch die wenigsten

¹⁾ R. Gans, Ann. d. Phys. 78, 1, 1925.

Schwierigkeiten macht; das ist der Doppelspalt mit Öffnungen, die klein gegen ihren Abstand sind. Zwar wurde für ein beliebiges Objekt die von Michelson¹⁾ als Charakteristikum des Beugungsbildes eingeführte V -Funktion bereits von Klimmeck²⁾ angegeben; jedoch ohne Rücksicht auf das Vorzeichen. Es erweist sich daher als notwendig, zunächst auf die Herleitung der Sichtbarkeitsfunktion für ein beliebiges, selbstleuchtendes Objekt einzugehen. Dabei sei ausgegangen vom Beugungsbild, welches auch bei genannten Autoren angegeben wird mit

$$J = \oint_{\text{Objekt}} f(x_0) \cdot \cos^2 \frac{\nu}{2} (x - x_0) \cdot dx_0$$

$$= \frac{1}{2} \oint f(x_0) \cdot (1 + \cos \nu x \cdot \cos \nu x_0 + \sin \nu x \cdot \sin \nu x_0) dx_0. \quad (1)$$

Hierin ist x_0 die Koordinate des mit gleichmäßiger Helligkeit strahlenden Objekts, x die Bildkoordinate; beide im Winkelmaß. $\nu = 2\mu\delta$, wo $\mu = \pi/\lambda$ und δ der Spaltabstand ist und $f(x_0)$ das Objekt angibt. Bildung von $\partial J / \partial x = 0$ ergibt für die Lage der Extremwerte:

$$\operatorname{tg} \nu x_{\text{extr}} = \frac{\oint f(x_0) \cdot \sin \nu x_0 \cdot dx_0}{\oint f(x_0) \cdot \cos \nu x_0 \cdot dx_0} = \frac{S}{C}. \quad (2)$$

Für den Abstand benachbarter Streifen des Interferenzbildes erhält man wegen der Periodizität des tg mit π :

$$x = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{\lambda}{\delta}.$$

Für Extremwerte von gerader Ordnungszahl ist

$$J_{\text{extr}} = J_{\text{min}}^{\text{max}} = \oint f(x_0) \cdot dx_0 \pm \sqrt{C^2 + S^2}; \quad \cos \nu x_{\text{extr}} \gtrless 0.$$

Entsprechend gilt für ungerade Ordnungszahl:

$$J_{\text{extr}} = J_{\text{min}}^{\text{max}} = \oint f(x_0) \cdot dx_0 \mp \sqrt{C^2 + S^2}; \quad \cos \nu x_{\text{extr}} \gtrless 0.$$

Somit erhält man für die in sinnvoller Verallgemeinerung des Michelsonschen Ausdrucks durch

$$V = \frac{J_{\text{extr } g} - J_{\text{extr } ug}}{J_{\text{extr } g} + J_{\text{extr } ug}} \quad \begin{array}{l} g = \text{gerade} \\ ug = \text{ungerade} \end{array}$$

¹⁾ W. Michelson, Phil. Mag. (5) 30, 1, 1890. — ²⁾ K. Klimmeck, ZS. f. Phys. 85, 68, 1933.

definierte „Sichtbarkeitsfunktion“ den Wert:

$$V = \pm \frac{\sqrt{C^2 + S^2}}{\oint f(x_0) dx_0}; \quad \cos \nu x_{extr} \geq 0. \quad (3)$$

Der in früheren Arbeiten außer bei Klimmäck angegebene einfachere Ausdruck folgt hieraus für $S = 0$. Dazu ist folgende Beschränkung der Objektgestalt notwendig:

$$\oint_{x_0 \leq t} f(x_0) dx_0 = \oint_{x_0 \geq t} f(x_0) \cdot dx_0 \quad \text{mit} \quad t = \frac{1}{2} (x_{max} + x_{min}). \quad (4)$$

Diese Bedingung ist nicht nur erfüllt bei symmetrischen Figuren senkrecht zur Symmetrieachse, sondern auch in jeder beliebigen Richtung bei solchen mit zwei zueinander senkrechten Symmetrieachsen sowie denen, die aus diesen durch affine Verzerrung hervorgehen.

Eine bemerkenswerte und für den ins Auge gefaßten Zweck willkommene Eigenschaft der V -Funktion leitet man leicht her, indem man das Objekt von x_0 nach $x_0 + a$ verschiebt. Dann bleibt nämlich die charakteristische Funktion unverändert; eine Eigenschaft, die einer anderen beugenden Öffnung wohl kaum noch zukommt.

Es sei nun auf die Frage eingegangen, inwieweit die Voraussetzungen unserer Rechnung bei der Abbildung im Mikroskop verwirklicht sind. Zwar wurden oben selbstleuchtende Objekte vorausgesetzt, während die im Ultramikroskop wahrgenommenen Gegenstände beleuchtet werden. Doch liefert nach dem Äquivalenzsatz ein mit großer Apertur abgebildeter Nichtselbstleuchter dasselbe Beugungsbild wie ein selbstleuchtendes Objekt. Somit sind, was den Abbildungsmechanismus anlangt, die Grundlagen der Rechnung bei der Ultramikroskopie erfüllt, und wir behandeln nur insofern einen Grenzfall, als die Annahme über die Objektgröße nicht zutrifft.

Wie bereits in der Einleitung angeführt, hat aber nun Gans, ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes, die physikalischen Verhältnisse zu erfassen gesucht, wie sie bei der Abbildung im Ultramikroskop auftreten. Jedoch bedurfte es vereinfachender Annahmen wie nur kleiner Aperturen bei Beleuchtung und Abbildung, welche von Schülern des Autors diskutiert worden sind. Ferner soll der Brechungsindex des homogenen, durchsichtigen Objekts nur sehr wenig von dem seiner Umgebung verschieden sein. Schließlich soll das abgebildete Objekt klein im Vergleich zur Wellenlänge sein; also wiederum ein Grenzfall. Die hierauf fußenden Entwicklungen ergeben für den Hertz'schen Vektor des Bild-

raumes entsprechend einem durch einen Doppelspalt abgebildeten, beleuchteten Objektpunkt folgendes:

$$Z = \cos \frac{\nu}{2} (x - x_0) \quad \text{mit} \quad \nu = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta.$$

Wenn die Vektoren der einzelnen Punkte des Objekts sich überlagern, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen (also wie schwingende Dipole), dann gilt für das Amplitudenquadrat:

$$W^2 = J = \left[\oint f(x_0) \cdot \cos \nu (x - x_0) \cdot dx_0 \right]^2.$$

Nach Anwendung der Additionstheoreme findet man in üblicher Weise für die Stellen extremer Intensität

$$\operatorname{tg} \nu x_{max}^* = \frac{S}{C}; \quad \operatorname{tg} \nu x_{min}^* = -\frac{S}{C}. \quad (5)$$

Damit wird die Helligkeit an den maximalen Stellen:

$$J_{max} = C^2 + S^2.$$

Andererseits beobachtet man bei sehr kleiner Apertur des abbildenden Systems die maximale Helligkeit:

$$J_{max} = \left[\oint_{x \rightarrow 0} f(x_0) dx_0 \right]^2.$$

Für das Verhältnis folgt das Quadrat eines bereits oben eingeführten Ausdrucks:

$$\frac{J_{\nu}}{J_{\nu=0}} = \frac{C^2 + S^2}{\left[\oint f(x_0) \cdot dx_0 \right]^2} = V^2. \quad (6)$$

Zusammenfassend hat also je nach dem ins Auge gefaßten Grenzfall die in Abschnitt 2 für einige einfache Figuren berechnete Funktion V eine völlig verschiedene Bedeutung.

Gegenüber rotationssymmetrischen Blenden hat unser Doppelspalt den einen Nachteil, daß er die berechnete Sichtbarkeit nur in einem einzigen Azimut wiedergibt. Will man jedoch erfahren, wie sich unsere charakteristische Funktion in anderen Richtungen verhält, dann muß man entweder den Beugungsspalt oder das Objekt in seiner Ebene drehen. Für den Gedanken der Ausmessung und Formbestimmung optisch nicht auflösbarer Teilchen ist eine Beschäftigung mit dieser Frage von grundlegender Bedeutung.

2. Abbildung eines Parallelogramms.

Als einfachste Objektfigur, für welche das Integral S verschwindet und die V -Funktion sich damit vereinfacht, sei das Parallelogramm mit allen seinen Unterteilungen behandelt. Als Bestimmungsstücke mögen Seite a , Seitenverhältnis $b/a = v$ und Winkel $\widehat{ab} = W$ dienen. Seite a bilde mit der $+x_0$ -Achse den Winkel α , und der Winkel W sei so festgelegt, daß Seite b auf a im mathematisch positiven Umlaufsinn folgt. Gedreht werde das Parallelogramm um seine Mitte, durch welche auch die Ordinatenachse hindurchgelegt ist. Die Gleichungen der Begrenzungsstrecken lauten dann:

$$f_1(x_0) = (\bar{d} + x_0) \operatorname{tg} \alpha + p; \quad -\bar{d} \leq x_0 \leq \Delta;$$

$$f_2(x_0) = (\bar{d} - x_0) \operatorname{tg} (\delta - \alpha) + q; \quad \Delta \leq x_0 \leq \bar{d};$$

$$f_3(x_0) = -(\bar{d} - x_0) \operatorname{tg} \alpha + q; \quad -\Delta \leq x_0 \leq \bar{d};$$

$$f_4(x_0) = -(\bar{d} + x_0) \operatorname{tg} (\delta - \alpha) + p; \quad -\bar{d} \leq x_0 \leq -\Delta.$$

Wir haben nun die Funktion V , für die gemäß dem zu Anfang dieses Abschnitts Gesägten der einfachere Ausdruck

$$V = \frac{\oint f(x_0) \cdot \cos v x_0 \cdot dx_0}{\oint f(x_0) \cdot dx_0} \quad (7)$$

gilt, auszurechnen.

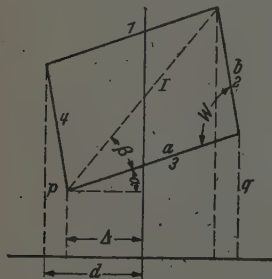


Fig. 1. Objektparallelogramm in allgemeiner Lage.

Elementare Integration ergibt

$$\begin{aligned} & \int_{-\bar{d}}^{\Delta} f_1(x_0) \cos v x_0 \cdot dx_0 + \\ & + \int_{\Delta}^{\bar{d}} f_2(x_0) \cos v x_0 \cdot dx_0 \\ & = 2 \operatorname{tg} \alpha \left[(\bar{d} + \Delta) \frac{\sin v \Delta}{v} + \frac{\cos v \Delta - \cos v \bar{d}}{v^2} \right] + \\ & + (p - q) \frac{\sin v \Delta + \sin v \bar{d}}{v}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\bar{d}}^{\Delta} f_3(x_0) \cdot \cos v x_0 \cdot dx_0 + \int_{\Delta}^{\bar{d}} f_4(x_0) \cdot \cos v x_0 \cdot dx_0 \\ & = 2 \operatorname{tg} (\delta - \alpha) \left[(\Delta - \bar{d}) \frac{\sin v \Delta}{v} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\cos v \Delta - \cos v \bar{d}}{v^2} \right] + (p - q) \frac{\sin v \Delta - \sin v \bar{d}}{v}. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen von

$$p - q = (d - D) \operatorname{tg} (W - \alpha) - (d + D) \operatorname{tg} \alpha$$

und

$$\oint f(x_0) \cdot dx_0 = a^2 v \cdot \sin \delta$$

findet man als Ergebnis:

$$V = \frac{\sin\left(v \frac{a}{2} \cos \alpha\right) \cdot \sin\left(v \frac{a v}{2} \cos (W - \alpha)\right)}{v \frac{a}{2} \cos \alpha \quad v \frac{a v}{2} \cos (W - \alpha)} \quad (8)$$

Es ist bequem, durch die Substitution $v \frac{a}{2} = \pi m$ den Einfluß von Objektgröße und Abbildungsapertur zusammenzufassen. Dann heißt die V -Funktion in Richtung α für ein Parallelogramm mit den Gestaltsparametern v, δ :

$$V = \frac{\sin(\pi m \cos \alpha) \cdot \sin(\pi m v \cos (W - \alpha))}{\pi m \cos \alpha \quad \pi m v \cos (W - \alpha)} \quad (9)$$

Man sieht unmittelbar ein, daß zwei Richtungspaare ausgezeichnet sind; nämlich:

1. Die Lötrecchten auf den Parallelogrammseiten.

$$\alpha = \delta - \frac{\pi}{2} : V = \frac{\sin(\pi m \sin W)}{\pi m \sin W},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} : V = \frac{\sin(\pi m v \sin W)}{\pi m v \sin W}.$$

2. Richtungen mit nur positiven Werten.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - v \cos W}{v \sin \delta} : V = \left[\frac{\sin \pi m \frac{v \sin W}{\sqrt{1 - 2v \cos W + v^2}}}{\pi m \frac{v \sin W}{\sqrt{1 - 2v \cos W + v^2}}} \right]^2,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1 + v \cos W}{v \sin \delta} : V = \left[\frac{\sin \pi m \frac{v \sin W}{\sqrt{1 + 2v \cos W + v^2}}}{\pi m \frac{v \sin W}{\sqrt{1 + 2v \cos W + v^2}}} \right]^2.$$

Die Nullstellen der V -Funktion liegen bei den Parameterwerten

$$m = \frac{\kappa}{\cos \alpha}; \quad m = \frac{\kappa}{v \cos (\delta - \alpha)} \quad \text{mit } \kappa = 1, 2, 3 \dots$$

Zur Veranschaulichung denke man sich die Sichtbarkeitsfunktion als räumliche Koordinate über den ebenen Polarkoordinaten m, α aufgetragen. Dann schneidet die V -Fläche die Grundebene in Punkten, welche zusammen ein Netz paralleler, äquidistanter Geraden bilden. Im mittelsten Felde

dieses Netzes, welches uns besonders interessiert, ist V stets positiv; in den seitlich angrenzenden dagegen liegt die Fläche unterhalb der Grundebene, so daß sich immer Felder mit ungleichem Vorzeichen abwechseln.

An Quadrat und Rhombus sei der Verlauf im mittleren Feld durch Einzeichnen der Höhenlinien $V = 0,75; 0,50; 0,25$ veranschaulicht. In dem gleich dem Objekt quadratischen Feld bilden die inneren Linien konzentrische Kreise, die sich allmählich in Diagonalrichtung ausbuchten, so daß schließlich die quadratische Nulllinie hervorgeht.

Wie das Rechteck durch Verzerrung des Quadrats entsteht, so geht dessen V -Feld durch affine Verzerrung in dazu senkrechter Richtung aus

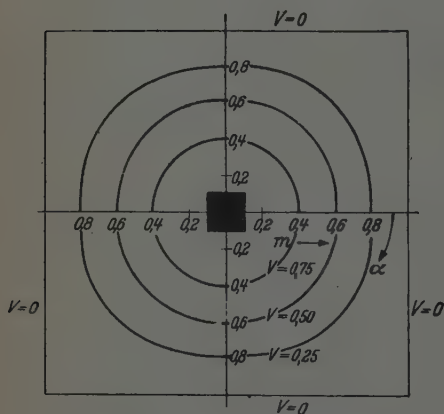


Fig. 2. Kurven gleicher Sichtbarkeit eines Quadrats.

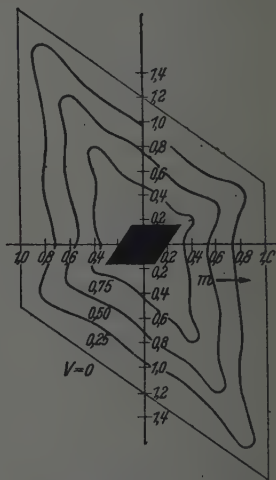


Fig. 3. Kurven gleicher Sichtbarkeit eines Rhombus.

dem eben behandelten hervor. Ganz ähnlich gestaltet sich das Bild für den in Fig. 3 gezeichneten Rhombus der Gestalt $\tan(\delta/2) = +2$.

Die bereits früh vorhandenen Ausbuchtungen der Niveaulinien gehen langsam in gerade Linien über, so daß das mittlere Feld wiederum eine Begrenzung von der gleichen Gestalt wie das abgebildete Objekt aufweist. Bezüglich der Entstehung des Rhombus durch affine Verzerrung eines Quadrates in Diagonalrichtung gilt dasselbe bereits für das Rechteck Gesagte; jedoch mit Beschränkung auf die Nulllinien. Daher entspricht, wie auch zu erwarten ist, hier wie dort, großer Objektausdehnung ein kleiner m -Wert und umgekehrt.

Tabelle 1. Zusammenstellung der Sichtbarkeitswerte

Objektfigur	Sichtbarkeit		Parameterwerte m der Nullstellen
	seitlich	diagonal	
Quadrat	$\frac{\sin \pi m}{\pi m}$	$\left[\frac{\sin \frac{\pi m}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi m}{\sqrt{2}}} \right]^2$	$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
Rechteck	$\frac{\sin \pi m}{\pi m}; \frac{\sin \pi m v}{\pi m v}$	$\left[\frac{\sin \frac{\pi m}{\sqrt{1+v^2}}}{\frac{\pi m}{\sqrt{1+v^2}}} \right]^2$	$\frac{\kappa}{\cos \alpha}$
Rhombus	$\frac{\sin (\pi m \sin \delta)}{\pi m \sin \delta}$	$\left[\frac{\sin \left(\pi m \sin \frac{\delta}{2} \right)}{\pi m \sin \frac{\delta}{2}} \right]^2; \left[\frac{\sin \left(\pi m \cos \frac{\delta}{2} \right)}{\pi m \cos \frac{\delta}{2}} \right]^2$	$\frac{\kappa}{\cos (\delta - \alpha)}$

In Tabelle 1 sind die charakteristischen Größen zusammengestellt. Als Anwendung der hergeleiteten Beziehungen und gleichzeitig als Gegenbeispiel zu den bisher diskutierten einfachsten Fällen, wo die von den Nulllinien gebildeten Felder in einfacher Beziehung zur Objektgestalt stehen, sei schließlich ein aus fünf Quadraten zusammengesetztes Kreuz behandelt. Wir bilden es am einfachsten aus drei achsensymmetrischen Figuren; nämlich

einem Rechteck mit der Grundseite $a/3$, für das

$$\oint f(x_0) \cdot \cos v x_0 \cdot dx_0 = \frac{v a^2 \sin (\pi m \cos \alpha) \cdot \sin (\pi m v \sin \alpha)}{(\pi m \cos \alpha) \pi m v \sin \alpha}$$

ist, vermehrt um dieselbe Figur mit der Grundseite a und vermindert um das mittlere Quadrat mit der Seite $a/3$. Das Ergebnis dieser Operation ist:

$$V_{\text{Kreuz}} = \frac{9}{5} \cdot \frac{\sin (\pi m \cos \alpha) \cdot \sin \left(\frac{\pi m}{3} \sin \alpha \right) + \sin \left(\frac{\pi m}{3} \cos \alpha \right) \sin (\pi m \sin \alpha) - \sin \left(\frac{\pi m}{3} \cos \alpha \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi m}{3} \sin \alpha \right)}{(\pi m)^3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

Neben den verschiedenen in Fig. 4 gezeichneten Höhenlinien interessieren vor allem die Nullstellen der V -Funktion. Die das mittlere Feld begrenzenden ergeben sich hier aus der transzendenten Gleichung

$$\cos^2\left(\frac{\pi m}{3} \cos \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{\pi m}{3} \sin \alpha\right) = \frac{3}{4}.$$

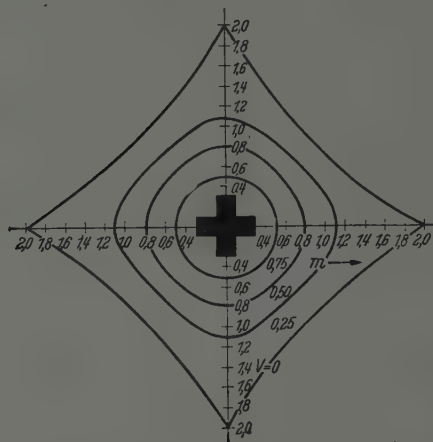


Fig. 4. Kurven gleicher Sichtbarkeit eines Objektkreuzes.

Für die Lage der nächsten, sich periodisch wiederholenden Nullstellen gilt dieselbe Gesetzmäßigkeit, wie wenn nur das mittlere Quadrat mit der Seite $a/3$ vorhanden wäre; nämlich

$$m = \frac{3\pi}{\cos \alpha}; \quad m = \frac{3\pi}{\sin \alpha}.$$

3. Abbildung eines Dreiecks.

In Abschnitt 1 wurde unterschieden zwischen allgemeinen Figuren und solchen, deren Gestalt einer dort angegebenen Beschränkung unterliegt. Zu letzteren gehörte das eben behandelte Parallelogramm, während das Dreieck gemäß unserer Klassifikation den allgemeinen Figuren zuzuordnen ist, für welche der allgemeine Ausdruck der Sichtbarkeit gilt. Wir lassen es aus dem in Fig. 1 gezeichneten Parallelogramm durch Ziehen einer Diagonalen entstehen, so daß der Drehpunkt der entstandenen neuen Figur auf der Mitte der Seite I liegt. Die Begrenzungslinien des betrachteten unteren Dreiecks sind

$$f_1(x_0) = (\Delta + x_0) \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \beta); \quad -\Delta \leq x_0 \leq \Delta;$$

$$f_2(x_0) = (\delta - x_0) \operatorname{tg}(\delta - \alpha) + q; \quad \Delta \leq x_0 \leq \delta;$$

$$f_3(x_0) = -(\delta - x_0) \operatorname{tg} \alpha + q; \quad -\Delta \leq x_0 \leq \delta.$$

Durch elementare Integration erhält man

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta}^{\Delta} f_1(x_0) \cdot \cos \nu x_0 \cdot dx_0 &= 2 \Delta \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \cdot \frac{\sin \nu \Delta}{\nu}, \\ \int_{\delta}^d f_2(x_0) \cdot \cos \nu x_0 \cdot dx_0 + \int_d^{-\Delta} f_3(x_0) \cos \nu x_0 \cdot dx_0 \\ &= [\operatorname{tg} \alpha \cdot (d + \Delta) + \operatorname{tg}(\delta - \alpha) \cdot (\Delta - d) - 2q] \frac{\sin \nu \Delta}{\nu} + \\ &\quad + [\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\delta - \alpha)] \frac{\cos \nu \Delta - \cos \nu d}{\nu^2}. \end{aligned}$$

Addition und Einsetzen der Werte für Δ , d , q ergibt

$$\oint f(x_0) \cdot \cos \nu x_0 \cdot dx_0 = - \frac{\sin \delta}{\nu^2 \cos \alpha \cdot \cos(\delta - \alpha)} [\cos A_1 - \cos A_2];$$

$$A_2^1 = \frac{\nu a}{2} [\cos \alpha \pm \nu \cos(\delta - \alpha)].$$

Wir bilden nun den entsprechenden Ausdruck: Es ist

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta}^{\Delta} f_1(x_0) \sin \nu x_0 \cdot dx_0 &= -2 \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \left[\Delta \frac{\cos \nu \Delta}{\nu} - \frac{\sin \nu \Delta}{\nu^2} \right], \\ \int_{\delta}^d f_2(x_0) \sin \nu x_0 \cdot dx_0 &= -\operatorname{tg}(\delta - \alpha) \left[(\Delta - d) \frac{\cos \nu \Delta}{\nu} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \nu \Delta - \sin \nu d}{\nu^2} \right] + q \cdot \frac{\cos \nu \Delta - \cos \nu d}{\nu}, \\ \int_d^{-\Delta} f_3(x_0) \cdot \sin \nu x_0 \cdot dx_0 &= \operatorname{tg} \alpha \left[(\Delta + d) \frac{\cos \nu \Delta}{\nu} - \frac{\sin \nu \Delta + \sin \nu d}{\nu^2} \right] - \\ &\quad - q \cdot \frac{\cos \nu \Delta - \cos \nu d}{\nu}. \end{aligned}$$

Daher folgt

$$\oint f(x_0) \cdot \sin \nu x_0 \cdot dx_0 = - \frac{\sin \delta}{\nu^2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos(\delta - \alpha)} \cdot \left[\sin A_1 - \frac{A_1}{A_2} \sin A_2 \right].$$

Nach (2) liegen die Streifen an den Stellen

$$\operatorname{tg} \nu x^* = \frac{\sin A_1 - \frac{A_1}{A_2} \sin A_2}{\cos A_1 - \cos A_2}, \quad (10a)$$

welche Beziehung für zwei Punkte zu ergänzen ist, nämlich

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{2} : \operatorname{tg} \nu x^* = \frac{1}{\pi m \nu \sin \delta} - \operatorname{ctg}(\pi m \nu \sin \delta), \\ \alpha &= \frac{\pi}{2} + \delta : \operatorname{tg} \nu x^* = \frac{1}{\pi m \sin \delta} - \operatorname{ctg}(\pi m \sin \delta). \end{aligned} \right\} \quad (10b)$$

Da ferner $\oint f(x_0) \cdot dx_0 = \frac{a^2}{2v} \cdot \sin \delta$ ist, ergibt sich als Sichtbarkeit der Interferenzstreifen der Ausdruck

$$V = \pm \frac{2}{A_1^2 - A_2^2} \sqrt{(\cos A_1 - \cos A_2)^2 + \left(\sin A_1 - \frac{A_1}{A_2} \sin A_2\right)^2}. \quad (11a)$$

$\cos \alpha \neq 0; \quad \cos(\delta - \alpha) \neq 0.$

Für einige Richtungen treten erhebliche Vereinfachungen auf; nämlich für

$$\left. \begin{aligned} \alpha = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} : V &= \frac{1}{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 - 2 \frac{\sin(2n)}{2n}}; \quad n = \pi m v \sin \delta, \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \delta : V &= \frac{1}{o} \sqrt{1 + \left(\frac{\sin o}{o}\right)^2 - 2 \frac{\sin(2o)}{2o}}; \quad o = \pi m \sin \delta. \end{aligned} \right\} \quad (11b)$$

Besondere Beachtung wollen wir wiederum den Nullstellen der V -Funktion schenken. Das notwendige Verschwinden von C sowohl wie von S liefert

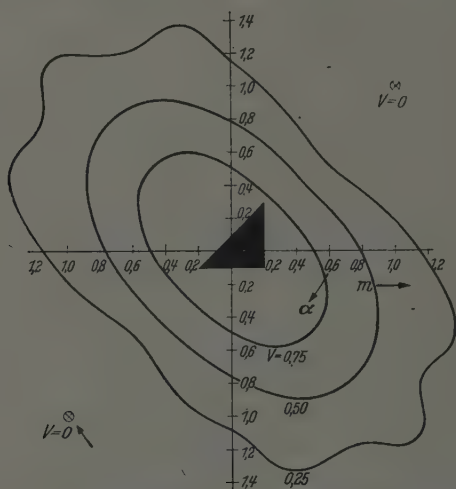


Fig. 5. Kurven gleicher Sichtbarkeit für das gleichschenklige-rechtwinklige Dreieck.

zwei Relationen zwischen den Polarkoordinaten m, α . Daher sind im Gegensatz zu den in Abschnitt 2 behandelten Figuren mit der Eigenschaft $S = 0$, unabhängig von m, α , im allgemeinen Falle Nullstellen nur in einzelnen Punkten der Grundebene zu erwarten. Für das allgemeine Dreieck heißen die betreffenden Relationen:

$$1. \quad m = \frac{x}{v \cos(\delta - \alpha)},$$

$$2. \quad \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}(\pi m v \cos(\delta - \alpha)) = v \cos(\delta - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(\pi m \cos \alpha).$$

Aus ihnen folgt für die Koordinaten der Nullstellen

$$m = \pm \frac{x}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{1 + v \cos \delta}{\sin \delta}.$$

Der Ausdruck für unsere V -Funktion nimmt in dieser Richtung den einfachen, an die Ergebnisse des vorigen Abschnitts anklingenden Wert an:

$$V = \left(\frac{\sin(\pi m \cos \alpha)}{\pi m \cos \alpha} \right)^2.$$

Beim gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck, für welches in üblicher Weise die Veranschaulichung erfolgte, liegen die Nullstellen in Hypotenusenrichtung bei $m = x\sqrt{2}$; das ist die einzige Richtung, in welcher die Bedingung (4) zutrifft. Daher sind auch beim gleichschenkligen Dreieck der

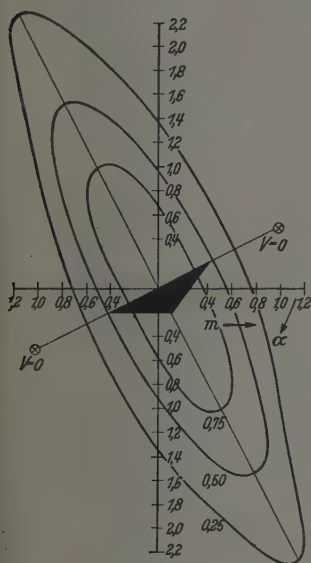


Fig. 6.

V -Feld eines gleichschenkligen Dreiecks

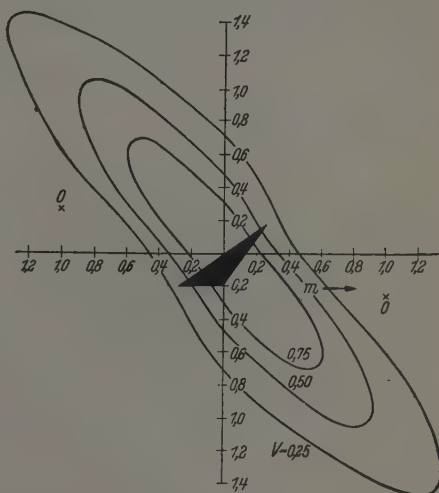


Fig. 7.

V -Feld eines allgemeinen Dreiecks.

Gestalt $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = 2$ nur in Grundlinienrichtung, und zwar im Punkte $m = \frac{x}{\sin \frac{\delta}{2}}$

Stellen des Verschwindens von V vorhanden. Beim gezeichneten allgemeinen Dreieck der Gestalt $v = 2$, $\operatorname{tg}(\delta/2) = 2$ jedoch ist eine Richtung von dieser Eigenschaft nicht mehr vorhanden; nur in Richtung von $\alpha = 14^\circ$ gibt es einzelne Punkte, in denen die Integrale S und C gleichzeitig verschwinden.

4. Sichtbarkeit von Objekten weit unter der Auflösungsgrenze.

Beim Versuch einer systematischen Behandlung der Frage, aus dem Beugungsbild Form und Größe des Objekts zu ermitteln, wird man zweckmäßig von der Voraussetzung ausgehen, daß das abgebildete Objekt weit unterhalb der Auflösungsgrenze liegt. Dann ist auch die Annahme Objekt $\ll \lambda$, welche den Gansschen Entwicklungen zugrunde liegt, bei der mikroskopischen Abbildung gerechtfertigt. Unsere Voraussetzung berechtigt uns, den Ausdruck (7), welcher an die einschränkende Bedingung (4) geknüpft ist, nach $v x_0$ zu entwickeln. Das so erhaltene Ergebnis

$$1 - V = \frac{v^2}{2} \left[\frac{\oint f(x_0) \cdot x_0^2 \cdot dx_0}{\oint f(x_0) \cdot dx_0} - \frac{v^2}{12} \cdot \frac{\oint f(x_0) \cdot x_0^4 \cdot dx_0}{\oint f(x_0) \cdot dx_0} \right] \quad (12)$$

auf das Parallelogramm angewendet, liefert für die Kurven mit gleichen V -Werten ($V = V_c$) die Ellipsengleichung

$$1 - V_c = \frac{(\pi m)^2}{6} [\cos^2 \alpha + v^2 \cos^2 (\delta - \alpha)]$$

mit den Hauptachsen bei

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{v^2 \sin (2\delta)}{1 + v^2 \cdot \cos (2\delta)} = \frac{p}{q}.$$

Für die Achsenrichtungen folgt durch Einsetzen des betreffenden α -Wertes

$$1 - V_c = \frac{(\pi m)^2}{12} [1 + v^2 \pm \sqrt{p^2 + q^2}]. \quad (12a)$$

Angenommen, wir hätten von einem ultramikroskopischen Objekt, von dem wir wissen, daß es nichts anderes sein kann als ein Parallelogramm, eine V -Ellipse aufgenommen, dann ist uns wohl seine Gestalt unbekannt, nicht aber seine Flächengröße. Ich behaupte also: Parallelogramme mit gleicher V -Ellipse sind flächengleich. Zum Beweise leitet man zunächst aus (12a) her:

$$a^2(1 + v^2 + \sqrt{p^2 + q^2}) = C.$$

$$a^2(1 + v^2 - \sqrt{p^2 + q^2}) = s^2 C$$

mit $C = \frac{48(1 - V_c)}{v^2}$; $\pi m = \frac{v \cdot a}{2}$ und dem Achsenverhältnis s . Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt

$$a^2(1 + v^2) = \frac{C}{2} (1 + s^2), \quad (12b)$$

$$a^2 \sqrt{p^2 + q^2} = \frac{C}{2} (1 - s^2). \quad (12c)$$

Durch Division folgt

$$\left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}\right)^2 = 1 - \frac{4 v^2 \sin^2 \delta}{(1 + v^2)^2}; \quad \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} = \frac{v \sin \delta}{1 + v^2}.$$

Berücksichtigung von (12b) ergibt schließlich das gewünschte Resultat:

$$a^2 \cdot v \sin \delta = \frac{C}{2} \cdot \varepsilon = \text{konstant.} \quad (13)$$

Neben der Größe der Fläche des Objekts gibt uns die aufgenommene Ellipse eine die Mannigfaltigkeit der Objektgestalt einschränkende Beziehung zwischen den beiden Gestaltparametern:

$$\frac{v \sin \delta}{1 + v^2} = \kappa; \quad \kappa = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}.$$

In welcher Weise sich diese Relation zusammen mit der Flächengleichheit auswirkt, veranschaulicht Fig. 8, welche Figuren mit derselben V -Ellipse wiedergibt.

Es liegt nahe, dieselben Überlegungen wie eben für das Parallelogramm auf das Dreieck anzuwenden. Ausgehend von dem allgemeinen Ausdruck (3)

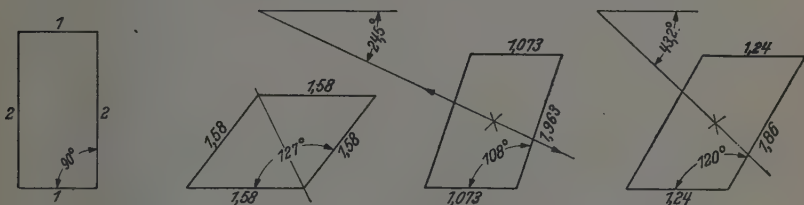


Fig. 8. Flächengleiche Parallelogrammobjekte, welche die gleiche V -Ellipse mit dem Achsenverhältnis 2 liefern.
(Die Pfeile geben die Richtung der großen Achse an.)

findet man durch Anwendung dessen Entwicklung nach v auf das Dreieck die Ellipsengleichung mit den Hauptachsen bei

$$\operatorname{tg} \alpha_1^1 = \frac{p}{q} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2},$$

wo $p = 1 - v \cos \delta + v^2 \cos (2 \delta)$; $q = v \sin \delta - v^2 \sin (2 \delta)$ ist. In Hauptachsenrichtung gilt daher

$$a^2 (1 - v \cos \delta + v^2 + \sqrt{p^2 + q^2}) = 3 C;$$

$$a^2 (1 - v \cos \delta + v^2 - \sqrt{p^2 + q^2}) = 3 C \varepsilon^2; \text{ mit } C = \frac{48 \sqrt{1 - \frac{V}{c}}}{v^3}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion

$$a^2 (1 - v \cos \delta + v^2) = \frac{3}{2} C (1 + \varepsilon^2), \quad (13a)$$

$$a^2 \sqrt{p^2 + q^2} = \frac{3}{2} C (1 - \varepsilon^2). \quad (13b)$$

Das Ergebnis der Division mit (13a) kombiniert liefert, wie beim Parallelogramm, Flächengleichheit der Dreiecksfiguren mit gleicher Sichtbarkeitsellipse:

$$\frac{1}{2} a^2 v \sin \delta = \sqrt{3} \cdot \varepsilon \frac{C}{2}. \quad (14)$$

Wir wissen ferner, daß sich die Dreiecksflächen zu den Flächen der Parallelogramme wie $\sqrt{3}$ zu 2 verhalten (Fig. 9). Wird jedoch statt einer Ellipse ein

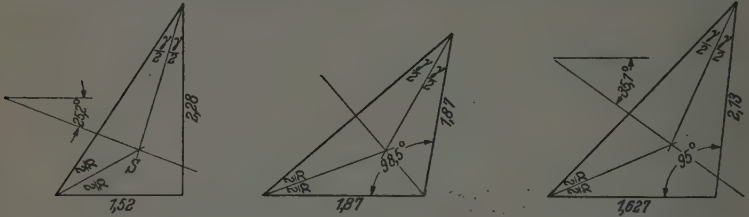


Fig. 9. Flächengleiche Dreiecksobjekte, welche die gleiche V-Ellipse mit dem Achsenverhältnis 2 liefern. (Die Pfeile zeigen die Richtung der großen Achse an.)

Sichtbarkeitskreis festgestellt, dann ist die Mannigfaltigkeit der entsprechenden Objektfiguren wesentlich geringer; denn ihm entspricht nur ein Parallelogramm, nämlich das Quadrat und nur ein einziges Dreieck; das gleichseitige.

Es ist vielleicht interessant, einmal Figuren verschiedener Gestalt, welche denselben V-Kreis ergeben, miteinander zu vergleichen, wie es in Fig. 10 geschehen ist. Man entnimmt dieser Darstellung folgende qualitative

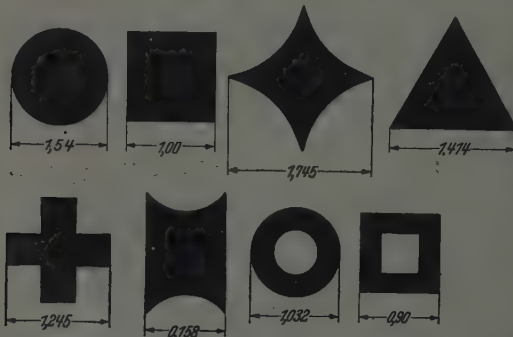


Fig. 10. Verschiedene Objekte, welche einen V-Kreis von derselben Größe liefern.

Ihre Flächen verhalten sich von links nach rechts wie folgt:

Obere Reihe:	1,05	1	0,898	0,866
Untere Reihe:	0,862	0,855	0,629	0,602

Gesetzmäßigkeit: Je mehr sich die Fläche um ihre Mitte konzentriert, desto größer darf sie sein und umgekehrt. Weitere Auskunft über die Beschaffen-

heit des Objekts wird man von den höheren Gliedern in v erwarten dürfen. Der Anstieg von $1 - V$ mit v^2 sei nicht mehr linear, sondern dargestellt durch die erweiterte Beziehung: $1 - V = A v^2 + B v^4$. Es liegt dann nahe, den Ausdruck

$$B/A^2 = \beta = \frac{\oint f(x_0) \cdot dx_0}{6} \cdot \frac{\oint f(x_0) \cdot x_0^4 \cdot dx_0}{\left(\oint f(x_0) \cdot x_0^2 \cdot dx_0\right)^2}$$

als einen von v unabhängigen und daher allein die Objektgestalt kennzeichnenden Parameter zu betrachten. In Tabelle 2 ist dessen Wert für einige Figuren angegeben, zu denen der gleiche V -Kreis gehört.

Tabelle 2.

Werte des Gestaltungsparameters β für verschiedene Figuren.

Figur	Kreis	Achteck	Quadrat	Gleichseitiges Dreieck	Unendlich schmaler Kreisrahmen	Unendlich schmaler Rahmen
β	0,166	0,333	$\begin{cases} \alpha = 0^\circ: 0,300 \\ \alpha = \frac{\pi}{4}: 0,400 \end{cases}$	3,1	0,083	$\begin{cases} \alpha = 0^\circ: 0,225 \\ \alpha = \frac{\pi}{4}: 0,300 \end{cases}$

5. Beugung am Doppelspalt endlicher Spaltbreite.

Den bisherigen Betrachtungen lag die Voraussetzung zugrunde, daß die Beugung an einem Doppelspalt mit großem Spaltabstand im Verhältnis zur Breite der beiden Spalte erfolgt (Verhältnis $a/\delta = 0$, wenn a die Spaltbreite und δ den Abstand der Spaltmitten bezeichnet). Da diese Voraussetzung jedoch experimentell nicht erfüllbar ist, erscheint es geboten, unsere charakteristische Funktion auch für ein endliches Verhältnis herzuleiten; es sei jedoch so klein, daß das erste Glied der Entwicklung nach $a/\delta = p$ bereits eine ausreichende Näherung liefert. Die gleiche Aufgabe stellte sich bereits der Verfasser einer experimentellen Dissertation¹⁾, ohne allerdings eine glaubhafte Lösung anzugeben. Wir gehen wie dort aus von der Intensitätsverteilung im Beugungsbild, die wir wie verabredet entwickeln:

$$K = \frac{\sin^2 \frac{vp}{2} (x - x_0)}{\left(\frac{vp}{2} (x - x_0)\right)^3} \cdot \cos^2 \frac{v}{2} (x - x_0) \\ = \left(1 - \frac{p^2 v^2}{12} (x - x_0)^2\right) \left(1 + \cos v (x - x_0)\right). \quad (15)$$

¹⁾ K. Kühne, Ann. d. Phys. (5) 4, 240, 1930.

Für ein ausgedehntes Objekt erhält man nach Anwendung der Additionstheoreme

$$J = \oint f(x_0) \cdot [1 + \cos \nu x \cdot \cos \nu x_0 + \sin \nu x \cdot \sin \nu x_0] \cdot [1 - \kappa^2 (x - x_0)^2] \cdot dx_0$$

$$\text{mit } \kappa^2 = \frac{p^2 \nu^2}{12}. \quad (16)$$

Wir wollen uns auf Objekte beschränken, welche die bekannte Bedingung (4) erfüllen; dann gelten für beliebige α, β folgende vereinfachende Beziehungen:

$$\oint f(x_0) \cdot (\alpha + \beta x_0^2) \cdot \sin \nu x_0 \cdot dx_0 = \oint f(x_0) \cdot \alpha \cdot x_0 \cdot \cos \nu x_0 \cdot dx_0$$

$$= \oint f(x_0) \cdot x_0 \cdot dx_0 = 0.$$

Damit wird die Intensitätsverteilung statt (16):

$$J = \oint f(x_0) (1 + \cos \nu x \cdot \cos \nu x_0) \cdot dx_0 - \kappa^2 \oint f(x_0) \cdot [(x^2 + x_0^2) (1 + \cos \nu x \cdot \cos \nu x_0) - x x_0 \sin \nu x \cdot \sin \nu x_0] \cdot dx_0. \quad (17)$$

Bei der in Abschnitt 1 behandelten 0ten Näherung im Sinne unserer Entwicklung waren die Extremwerte für die als erfüllt vorausgesetzte, aus (4) folgende Beziehung $S = 0$ in ihrer Lage nur abhängig von der Abbildungsanordnung; nicht dagegen von Größe und Gestalt des abgebildeten Objekts. Hier jedoch liegen diese Werte statt bei $k\tau$ mit $\tau = \pi/\nu$ und ganzzahligem k um einen Betrag Δ davon verschoben, der abhängt vom Objekt wie vom Parameter κ , dem Kennzeichen der endlichen Spaltbreite. Es gilt daher statt (17):

$$J_{\tau+k\Delta} = \oint f(x_0) \cdot [1 \pm \cos \nu \Delta \cdot \cos \nu x_0] dx_0 -$$

$$- \kappa^2 \left[\oint f(x_0) ((k\tau + \Delta)^2 + x_0^2) (1 \pm \cos \nu \Delta \cos \nu x_0) dx_0 \mp \right.$$

$$\left. \mp \sin \nu \Delta \cdot (k\tau + \Delta) \oint f(x_0) \cdot x_0 \cdot \sin \nu x_0 \cdot dx_0 \right]$$

Die zur Bestimmung der extremen Werte ausgeführte Operation $\partial J / \partial \Delta = 0$ liefert für das unbekannte Δ die Bestimmungsgleichung

$$\mp \nu \sin \nu \Delta \oint f(x_0) \cdot \cos \nu x_0 \cdot dx_0$$

$$= \kappa^2 \left[2 \oint f(x_0) (k\tau + \Delta) (1 \pm \cos \nu \Delta \cdot \cos \nu x_0) \cdot dx_0 \mp \right.$$

$$\mp \nu \sin \nu \Delta \oint f(x_0) ((k\tau + \Delta)^2 + x_0^2) \cos \nu x_0 \cdot dx_0 \mp$$

$$\left. \mp \nu (k\tau + \Delta) \cos \nu \Delta + \sin \nu \Delta \right] \oint f(x_0) \cdot x_0 \cdot \sin \nu x_0 \cdot dx_0.$$

Wir wollen annehmen, daß die Verschiebung Δ so gering ist, daß man sich auf das lineare Glied der Entwicklung beschränken darf; dann gilt

$$\mp \Delta \cdot V_0 = \frac{p^2}{12} [2 k \tau (1 \pm V_0) \mp v^2 \cdot \Delta (k^2 \tau^2 V_0 + U) \mp \pi k \cdot W]$$

mit

$$V_0 = \frac{\oint f(x_0) \cdot \cos v x_0 \cdot dx_0}{\oint f(x_0) \cdot dx_0}; \quad U = \frac{\oint f(x_0) x_0^2 \cdot \cos v x_0 \cdot dx_0}{\oint f(x_0) dx_0};$$

$$W = \frac{\oint f(x_0) \cdot x_0 \cdot \sin v x_0 \cdot dx_0}{\oint f(x_0) \cdot dx_0}.$$

Da wir ferner uns auf das erste Glied der Entwicklung nach p^2 beschränken, lautet die Lösung dieser Gleichung

$$\Delta = - \frac{\pi \cdot k \left[W - \frac{2}{v} (V_0 \pm 1) \right]}{12 V_0} p^2. \quad (18)$$

Einsetzen des gefundenen Wertes für Δ ergibt die folgende Beziehung:

$$J_{k\tau + \Delta} - J_{k\tau} = \pm \frac{(v \Delta)^2}{2} [V + \kappa^2 (k^2 \tau^2 V + U)]. \quad (19)$$

Wir interessieren uns nun dafür, unter welchen Bedingungen es erlaubt ist, die Lage der Streifen nach wie vor bei $k\tau$ anzusetzen und damit die Verschiebung Δ unberücksichtigt zu lassen. Offenbar solange, wie der Fehler, hervorgerufen durch die an unrichtiger Stelle angesetzten extremen Intensitäten, vernachlässigbar klein ist. Für ein Quadrat in Seitenrichtung als Beispiel wurde diese Frage untersucht und dabei als Kriterium für die Nichtbeachtung der Streifenverlagerung angesetzt, daß $V_{k\tau + \Delta} - V_{k\tau} \leq 0,02$ ist. Es ergab sich, daß diese Bedingung in folgenden Bereichen des S. 443 definierten Parameters m erfüllt ist:

$$\begin{array}{lll} \text{Für } p = 0,1: & 0 \leq m \leq 0,9 & p = 0,2: \quad 0 \leq m \leq 0,7 \\ & 1,1 \leq m \leq 1,9 & 1,3 \leq m \leq 1,7 \\ & 2,15 \leq m \leq 2,8 & \end{array}$$

Da die Nullstellen von V in unserem Beispiel (s. Fig. 2) bei $m = 1, 2, 3, \dots$ liegen, so darf man wohl das erhaltene Ergebnis folgendermaßen verallgemeinern: Schließt man die Umgebung der Nullstellen im Bereiche 0,1

bei $p = 0,1$ bzw. $0,3$ bei $p = 0,2$ aus, dann ist es erlaubt, so zu rechnen, als lägen die Streifen unverändert bei den Werten $k\tau$, und es ist dann

$$\left. \begin{aligned} J_{extr\ 2k} &= \oint f(x_0) \cdot [1 - \kappa^2 (4k^2\tau^2 + x_0^2)] \cdot [1 + \cos \nu x_0] \cdot dx_0, \\ J_{extr\ 2k+1} &= \oint f(x_0) [1 - \kappa^2 (4(k+1)^2\tau^2 + x_0^2)] \cdot [1 - \cos \nu x_0] \cdot dx_0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Während das Beugungsbild bei der in Abschnitt 1 behandelten 0ten Näherung aus lauter gleich hell und dunklen Streifen bestand und daher der Wert der V -Funktion von der Wahl der Maxima und Minima unabhängig war, ist es bei der hier behandelten 1. Näherung anders. Gleichung (20) zeigt eine Abhängigkeit sowohl von κ wie von der Ordnungszahl k , und zwar in dem Sinne, daß mit zunehmendem k die Intensität immer kleiner wird. Daher verzichtete Bechmann¹⁾, der sich mit Beugungsbildern spezieller Figuren beschäftigte, auf die Betrachtung der Sichtbarkeitsfunktion ganz. Verfasser dagegen will die in der Wahl der Definition liegende Freiheit ausnutzen, um zu einem möglichst zweckmäßigen Wert zu gelangen. Als solchen wird man denjenigen ansprechen, der eine möglichst erschöpfende Auswertung des Beugungsbildes erlaubt.

Wir definieren zunächst wie folgt:

$$1. \quad V_p = \frac{\text{Extr}_{2k} - \text{Extr}_{2k+1}}{\text{Extr}_{2k} + \text{Extr}_{2k+1}}.$$

Entwickelt man nun

$$V_p = V_p = 0 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{p=0} \frac{p^2}{2} = V_0 + \Delta V_p,$$

so findet man

$$\Delta V_p = 2\kappa^2 \left\{ \frac{\tau^2}{2} [(2k+1)^2 - (2k)^2] (1 - V_0^2) + \right. \\ \left. + V_0 \frac{\oint f(x_0) \cdot x_0^2 \cdot dx_0}{\oint f(x_0) \cdot dx_0} - \frac{\oint f(x_0) \cdot x_0^2 \cdot \cos \nu x_0 \cdot dx_0}{\oint f(x_0) \cdot dx_0} \right\}.$$

Der so definierte V -Wert ist also verschieden; je nachdem, welche Extremwerte zu seiner Bildung verwendet werden. Wir wollen nun eine andere

¹⁾ R. Bechmann, Ann. d. Phys. (4) 84, 61, 1927.

Definition angeben, welche von dieser für die Auswertung der experimentellen Ergebnisse recht ungünstigen Eigenschaft frei ist:

$$2. \quad \left. \begin{aligned} V_p &= \frac{\Sigma_g - \Sigma_{ug}}{\Sigma_g + \Sigma_{ug}}; \quad \Sigma_g = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=m}^{k=m+n-1} \text{Extr}_{2k}; \\ \Sigma_{ug} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=m}^{k=m+n-1+1} \text{Extr}_{2k+1}. \end{aligned} \right\}$$

Das Ergebnis der Aufsummierung ist:

$$\Sigma_g = \oint f(x_0) \{1 - \kappa^2 [4\tau^2 (\eta + \vartheta_1) + x_0^2]\} (1 + \cos \nu x_0) \cdot dx_0,$$

$$\Sigma_{ug} = \oint f(x_0) \{1 - \kappa^2 [4\tau^2 (\eta + \vartheta_2) + x_0^2]\} (1 - \cos \nu x_0) \cdot dx_0$$

mit

$$\vartheta_1 = \frac{1}{n} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2];$$

$$\vartheta_2 = \frac{1}{4(n+1)} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-2+1)^2 \right];$$

$$\eta = m^2 - m + nm.$$

Die übliche Entwicklung liefert dann mit $\vartheta = 2(\vartheta_1 - \vartheta_2)$:

$$\Delta V_p = \kappa^2 \left[\tau^2 \cdot \vartheta (V_0^2 - 1) + \frac{1}{\oint f(x_0) \cdot dx_0} \left(V_0 \oint f(x_0) \cdot x_0^2 \cdot dx_0 - \oint f(x_0) \cdot x_0^2 \cdot \cos \nu x_0 \cdot dx_0 \right) \right].$$

Wir haben also, was wir wünschten, durch diese Definition gewonnen. Jedoch stört uns noch, daß V_p von der Anzahl der ausgewählten Extremwerte abhängt. Dies beseitigen wir durch die folgende Festsetzung:

$$3. \quad V = \frac{1}{2} [V_{a(n+1)} + V_{i(n)}] \quad \text{mit} \quad V_a = \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2^a}{\Sigma_1 + \Sigma_2^a}, \quad V_i = \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2^i}{\Sigma_1 + \Sigma_2^i},$$

$$\text{da} \quad \vartheta_{a(n+1)} = -\vartheta_{i(n)}.$$

Wertetabellen zu Fig. 2, 3, 5, 6 und 7.

Quadrat.

ν	α		
	0°	30°	45°
0,75	0,407	0,41	0,41
0,50	0,6035	0,62	0,626
0,25	0,788	0,83	0,853

Rhombus.

V	α					
	0°	90°, 27°	53°	$R - \delta/2$	δ	$-\delta$
0,75	0,35	0,509	0,4575	0,914	0,61	0,32
0,50	0,534	0,755	0,698	1,395	0,915	0,49
0,25	0,72	0,985	0,953	1,9	1,24	0,66

Rhomboid.

V	α					
	0°	$R - \delta$	$R - 15,9^\circ$	R	δ	$R + \delta$
0,75	0,392	0,509	1,06	1,016	0,636	0,436
0,50	0,582	0,754	1,616	1,51	0,98	0,662
0,25	0,77	0,985	2,195	1,97	1,30	0,89

Gleichschenkliges-rechtwinkliges Dreieck.

V	α				
	20°	15°	30°	45°	-15°
0,75	0,505	0,57	0,66	0,708	
0,50	0,775	0,85	1,02	1,094	0,69
0,25	1,14	1,39	1,39	1,60	0,975

Gleichschenkliges Dreieck. $\delta = 126,86^\circ$.

V	α						
	0°	$-26,5^\circ$	$63,43^\circ$	45°	90°	20°	53°
0,75	0,36	0,324	1,125	0,78	0,64	0,45	0,96
0,50	0,55	0,495	1,727	1,185	0,97	0,69	1,46
0,25	0,758	0,674	2,55	1,68	1,42	0,97	2,00
0		1,117					

Allgemeines Dreieck. $v = 2$; $\delta = 126,86^\circ$.

V	α						
	90°	$36,86^\circ$	0°	25°	$50,65^\circ$	$76,30^\circ$	$64,45^\circ$
0,75	0,32	0,64	0,222	0,425	0,884	0,425	
0,50	0,485	0,97	0,337	0,66	1,350	0,66	0,95
0,25	0,71	1,42	0,46	0,91	1,905	0,935	1,30

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften, Budapest.)

Über das Bandenspektrum des Silberhydrids.

Von L. Gerö und R. Schmid in Budapest.

(Zugleich Meßergebnisse der Dissertationen von I. Doktorits und K. Mészáros enthaltend.)

Mit 22 Abbildungen. (Eingegangen am 14. Januar 1943.)

Das Bandenspektrum des AgH-Moleküls wurde neu aufgenommen und 60 Banden des ${}^1\Sigma - {}^1\Sigma$ -Systems analysiert; Schwingungstermdifferenzen und Rotationskonstanten des unteren Elektronenterms wurden berechnet. Durch Anwendung der Methode der $B' - B''$ -Kurven wurde die starke homogene Störung des oberen Zustandes analysiert. Die Termreihen zweier einander störenden Elektronenterme, ${}^1\Sigma_a$ und ${}^1\Sigma_b$, bilden ein Gewebe, in dem die Rotationstermfolgen mit verschiedensten Schwingungsquantenzahlen wechselseitig ineinander übergehen. In dieser Weise werden die Anomalien der Rotations- und Schwingungstermdifferenzen an den oberen Molekülzuständen, die ungewöhnliche Intensitätsverteilung in den Banden und die unregelmäßigen Isotopieaufspaltungen der Bandenlinien verständlich.

In einer Arbeit über das Bandenspektrum des AgH-Moleküls führten Bengtsson und Olsson¹⁾ die Rotationsanalyse von 27 Banden des ${}^1\Sigma - {}^1\Sigma$ -Bandensystems zwischen 3180 und 4700 Å durch. Ausführliche Messungsergebnisse wurden nicht mitgeteilt, nur Kombinationsdifferenzen, Schwingungstermdifferenzen und Rotationskonstanten des oberen und unteren Zustandes. Es wurde festgestellt, daß während der untere Zustand der Banden regelmäßig zu sein scheint, der obere ${}^1\Sigma$ -Zustand ganz ungewöhnliche Eigenschaften hat. Wie die Fig. 4, 5 und 6 der zitierten Arbeit zeigen, verlaufen Kombinationsdifferenzen, $\Delta G(v)$ -Werte und Rotationskonstanten des oberen Zustandes durchaus unregelmäßig. Da es sich schon in einigen solchen Fällen [z. B. bei CO²⁾, PbH³⁾, C₂⁴⁾] herausstellte, daß es sich eigentlich um starke homogene Störungen handelt, haben wir uns vorgenommen, das AgH-Spektrum neu aufzunehmen und zu untersuchen⁵⁾. Allerdings würde uns ein Teil dieser Arbeit erspart geblieben sein, wenn einige der Meßdaten von Bengtsson und Olsson zur Verfügung gestanden hätten.

¹⁾ E. Bengtsson u. E. Olsson, ZS. f. Phys. **72**, 163, 1931. — ²⁾ L. Gerö, ebenda **95**, 747, 1935; **101**, 311, 1936. — ³⁾ L. Gerö, ebenda **116**, 379, 1940. — ⁴⁾ L. Gerö u. R. Schmid, Naturwiss. **30**, 420, 1942. — ⁵⁾ Siehe eine vorläufige Mitteilung in der Naturwiss. **30**, Heft 51/52, 1942.

Die Aufnahmen erfolgten mit einem in einer Wasserstoffatmosphäre brennenden Silberbogen. Die ersten Versuche wurden mit der von Bengtsson und Olsson benutzten Anordnung vorgenommen, bei der die eine Elektrode aus Kohle, die andere aus Silber-Aluminium-Legierung bestand. Da aber die stärksten AlH-Banden sich eben dort überlagern, wo die meisten AgH-Banden mit höheren Schwingungsquantenzahlen liegen, benutzten wir später wassergekühlte Elektroden aus reinem Silber. Die mehrtägigen Aufnahmen mit dem 6,5 m-Gitter (30000 Furchen/Zoll) lieferten gut ausexponierte Platten zwischen 3100 und 4800 Å.

Das Spektrum war fast völlig frei von Verunreinigungen. Es wurden nur eine Ca I- und zwei Ca II-Restlinien gefunden, sowie zwei Cu II- und zwei Al-I-Restlinien. Von den stärksten Eisenlinien waren auch einige, herrührend von den Eisenbehältern der Silberelektroden, anwesend; diese waren sehr nützlich, indem man an ihnen die — übrigens sehr geringe — Verschiebung des Spektrums des Eisenbogens relativ zu dem des Silberbogens prüfen konnte. Von dem Ag I-Spektrum waren auch nur die stärkeren Linien zu finden. Im ausgemessenen Teil des Spektrums zeigten sich acht ziemlich starke Linien, die mit Hilfe des Tabellenwerkes: Massachusetts Institute of Technology, Wavelength Tables, sich nicht identifizieren ließen¹⁾.

Die Einordnung der Bandenlinien in Zweige wurde einerseits durch die Unregelmäßigkeiten einigermaßen erschwert, andererseits aber infolge der von den zwei fast gleich häufigen Silberisotopen hervorgerufenen Isotopieaufspaltung auch sehr erleichtert. Die gemessenen Linien konnten größtenteils in 60 Banden eingeordnet werden. Unter den nicht eingeordneten Linien sind etwa 50 bis 60 zu finden, die nicht sehr schwach sind und wegen ihrer Dublettaufspaltungen höchstwahrscheinlich dem AgH-Molekül angehören; die anderen sind zumeist äußerst schwach. Nur im sichtbaren Teil des Spektrums, etwa oberhalb von 4550 Å, bleiben Linien in größerer Anzahl uneingeordnet; diese könnten entweder zu höheren Schwingungsstufen des analysierten Bandensystems, oder zu anderen Bandensystemen gehören.

Die nur hier analysierten Banden sind in dem angegebenen Schema mit X, die auch von Bengtsson und Olsson teilweise analysierten mit + bezeichnet. Die Banden weisen ungewöhnliche Intensitätsverteilungen auf. Während einige von den Banden bei kleinen Rotationsquantenzahlen beginnen und bis zu mäßigen oder hohen Rotationsquantenzahlen ent-

¹⁾ Ihre Wellenlängen sind die folgenden:

3942,48	4582,51	4640,46	4662,71
4492,81	4634,04	4649,32	4715,81

wickelt erscheinen, sind viele andere vorhanden, die nur bei hohen Quantenzahlen anfangen eine merkliche Intensität zu haben. Eben diese letzteren wurden von Bengtsson und Olsson nicht eingeordnet.

v'	v''											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	+	+	×	×	×	×						
1	+	+	+	+	×	×	×					
2		+	+	+	+	×	×	×				
3		×	+	+	+	+	+	×	×			
4			+	×	×	+	+	+	+	×		
5				×	×	×	×	+	+	+		
6				×	×	×	×	×	×	+	+	+
7				×	×	×	×			×	×	+

In den Tabellen 1 bis 16 sind Meßergebnisse von 16 Banden des Systems angegeben¹⁾. Diese Banden wurden so ausgewählt, daß sie für jeden Schwingungszustand von $v' = 0$ bis 7 des Anfangsterms sämtliche Rotationsniveaus enthalten sollen von $J = 0$ bis zu möglichst hohen Rotationsquantenzahlen. Wegen der erwähnten Intensitätsverteilung mußten zu diesem Zweck je zwei Banden zu jeder Anfangsterm-Schwingungsquantenzahl ausgewählt werden. Tabellen 17 und 18 enthalten Mittelwerte der Kombinationsdifferenzen der oberen und unteren Zustände, berechnet aus allen Banden. Wo meßbare Isotopieaufspaltungen auftraten, wurde ein Mittelwert aus den beiden Komponenten gebildet, so daß die erhaltenen Zahlen eigentlich zu dem hypothetischen Silberatom mit dem Atomgewicht 108 gehören.

Die Schwingungstermdifferenzen des unteren Zustandes in der Tabelle 19 wurden durch Subtraktion der Wellenzahlen entsprechender Bandenlinien von solchen Banden erhalten, die gemeinsame Anfangszustände haben; diese Differenzen wurden auf $J = 0$ extrapoliert. Die $\Delta G''(v)$ -Werte sind bei den kleinsten v -Quantenzahlen fast völlig linear und nehmen nur bei höheren v -Werten schneller ab.

Die Rotationskonstanten der Tabelle 19 wurden aus den Endterm-Kombinationsdifferenzen ermittelt durch Dividieren mit $4(J + 1/2)$ und graphische Auftragung gegen $(J + 1/2)^2$. Die B -Werte haben bis etwa $v = 4$ einen fast völlig linearen Verlauf, nehmen aber von $v = 5$ immer rascher ab. Ebenfalls bei $v = 4$ nehmen die D -Werte einen Minimalwert an.

¹⁾ Die anderen Banden des Systems siehe in den Dissertationen von I. Doktorics u. K. Mészáros.

Tabelle 1. AgH (0,0).

J	$R(J)$		$P(J)$	
0	29910,23			
1	921,81		29885,42	
2	932,94		872,14	
3	943,50		858,42	
4	953,49		844,16	
5	962,86		829,49	
6	971,66		814,24	
7	979,81		798,55	
8	987,35		782,35	
9	994,31		765,81	
10	30000,62		748,54	
11	006,23		730,92	
12	011,21		712,79	
13	015,26		694,14	
14	018,87		675,03	
15	021,39		655,38	
16	023,59		635,28	
17	024,24		614,61	
18	024,24		593,49	
19	023,59		571,66	
20	021,78		549,32	
21	018,87		526,33	
22	015,26		502,74	
23	010,36		478,46	
24	004,17		453,50	
25	29996,78		427,75	
26	988,03		401,07	
27	977,81		373,56	
28	965,94		345,10	
29	952,47		315,72	
30	937,06		285,00	
31	919,62		252,98	
32	899,94		219,60	
33	877,72		184,69	
34	852,60		147,99	
35	824,38		109,19	
36	792,46		068,06	
37	756,12		024,24	
38	714,51		28977,19	
39	666,22		926,30	
40	608,99		870,69	
41	538,14		808,94	
42	442,64	442,92	738,72	
43	300,93	301,51	655,54	
44			547,90	548,47
45			395,18	

Tabelle 2. AgH (0,4).

J	$R(J)$		$P(J)$	
40	24560,93	24561,22		
41	556,17	556,85	23827,08	23827,59
42	529,22	529,65	825,24	825,67

<i>J</i>	<i>R</i> (<i>J</i>)		<i>P</i> (<i>J</i>)	
43	24457,74	24458,51	23811,95	23812,48
44	338,91	339,79	776,86	777,35
45	196,32	196,29	698,36	699,09
46	040,60	041,65	572,96	573,84
47	23879,32	23880,44	423,68	424,66
48	714,52	715,50	264,01	265,02
49	547,01	548,06	098,96	100,04
50	377,85	379,10	22930,89	22932,00
51	208,35	209,39	761,38	762,51
52	038,74	039,85	591,57	592,61
53	22869,96	22871,04	422,22	423,25
54	703,10	704,11	254,18	255,30
55			088,79	089,76
56			21927,41	21928,29

Tabelle 3. AgH (1,2).

<i>J</i>	<i>R</i> (<i>J</i>)		<i>P</i> (<i>J</i>)	
0	28083,54			
1	094,55		28060,03	
2	105,17		047,77	
3	115,42		035,15	
4	125,20		022,10	
5	134,40		008,64	
6	143,16		27994,79	
7	151,34		980,55	
8	159,02		965,86	
9	166,11		950,82	
10	172,57		935,34	
11	178,39		919,52	
12	183,53		903,14	
13	187,88		886,31	
14	191,48		869,03	
15	194,20		851,12	
16	196,04		832,65	
17	196,72		813,62	
18	196,72		793,93	
19	195,26		773,55	
20	192,60		752,38	
21	188,60		730,45	
22	183,13		707,51	
23	175,95		683,51	
24	166,96		658,42	
25	156,00		631,97	
26	142,78		604,04	
27	127,04		574,60	
28	108,39		543,18	
29	086,52		509,75	
30	060,88		473,82	
31	030,97		435,07	
32	27995,88		393,06	
33	954,64		347,06	
34	905,85	906,10	296,46	296,71

<i>J</i>	<i>R</i> (<i>J</i>)		<i>P</i> (<i>J</i>)	
35	27847,93	27848,14	27240,19	27240,52
36	778,35	778,63	176,98	177,33
37	694,52	694,91	105,00	105,40
38	593,71	594,24	021,94	022,48
39	474,65	475,25	26925,11	26925,77
40	339,02	339,72	811,81	812,49
41			680,92	681,67
42			534,03	534,79

Tabelle 4. AgH (1,6).

<i>J</i>	<i>R</i> (<i>J</i>)		<i>P</i> (<i>J</i>)	
37	23045,12	23045,50		
38	009,55	010,24	22437,79	22438,40
39	22957,84	22958,51	408,30	408,89
40	891,94	892,49	364,70	365,36
41	817,26	818,02	305,89	306,64
42	745,88	746,54	233,64	234,32
43	697,79	698,33	153,49	154,25
44	672,58	673,14	077,44	078,11
45			025,26	025,76
46			21996,51	21996,96

Tabelle 5. AgH (2,3).

<i>J</i>	<i>R</i> (<i>J</i>)		<i>P</i> (<i>J</i>)
0	27842,55		
1	852,01		27820,33
2	861,31		808,03
3	869,34		794,86
4	876,53		780,89
5	882,71		766,10
6	888,07		750,47
7	892,13		734,09
8	895,29		716,67
9	897,33		698,39
10	898,11		679,22
11	897,65		659,04
12	896,03		637,86
13	892,83		615,62
14	888,07		592,25
15	881,91		567,69
16	873,89		541,90
17	863,98		514,67
18	852,01		485,96
19	837,79		455,71
20	821,14		423,47
21	801,83		389,42
22	779,58		353,29

<i>J</i>	<i>R (J)</i>		<i>P (J)</i>	
23	27 754,06		27 314,91	
24	724,99		273,80	
25	691,86		229,83	
26	654,06		182,39	182,53
27	611,04	611,38	131,48	131,72
28	562,59	562,74	076,34	076,68
29	507,58	507,95	016,59	016,92
30	445,52	445,80	26 951,55	26 952,00
31	375,55	375,91	880,53	880,84
32	297,41	297,91	802,70	803,12
33	210,84	211,29	717,66	718,22
34	115,91	116,50	624,91	625,39
35	013,88	014,37	524,04	524,63
36	26 906,25	26 906,80	415,43	416,11
37			300,03	300,67
38			179,67	180,31

Tabelle 6. AgH (2,6).

<i>J</i>	<i>R (J)</i>		<i>P (J)</i>	
26	23 831,91	23 832,17		
27	822,88	823,40		
28	809,28	809,79	23 323,00	23 323,54
29	790,48	791,21	299,62	300,26
30	766,26	766,76	272,21	272,76
31	735,42	735,99	240,28	240,88
32	697,68	698,36	203,08	203,58
33	653,06	653,64	159,97	160,57
34	601,60	602,22	110,43	110,97
35	544,43	545,01	054,61	055,28
36	483,21	483,77	22 992,55	993,26
37	420,23	420,89	925,33	926,01
38	358,09	358,72	854,79	855,55
39	297,67	298,42	783,27	784,03
40	238,57	239,10	713,22	713,94
41	178,14	178,61	645,79	646,47
42	115,76	116,11	580,18	580,82
43	051,53	052,11	514,14	514,88
44			446,60	447,37
45			378,05	378,83

Tabelle 7. AgH (3,1).

<i>J</i>	<i>R (J)</i>		<i>P (J)</i>	
26	31 210,49			
27	111,61			
28	007,37			
29	30 896,63			
30			30 349,41	
31	659,92		221,73	
32			088,29	
33	405,06		29 950,25	

<i>J</i>	<i>R</i> (<i>J</i>)		<i>P</i> (<i>J</i>)	
34	30271,64		29808,71	
35	134,13		663,26	
36	29992,80		514,41	
37	847,79	848,28	362,54	
38	699,35	699,85	207,13	
39			047,98	
40	393,43	393,86	28886,28	28886,88
41	236,90	237,43	721,87	722,45
42	078,34	078,88	555,38	556,09
43	28918,47	28918,47	387,48	388,13
44	756,62	756,62	217,82	218,49
45			046,86	047,37
46			27875,23	27875,70

Tabelle 8. AgH (3,5).

<i>J</i>	<i>R</i> (<i>J</i>)		<i>P</i> (<i>J</i>)	
0	26045,04			
1	053,38		26024,61	
2	060,93		013,17	
3	067,38		000,25	
4	072,45		25986,30	25986,61
5	076,70	077,04	971,52	971,77
6	079,63	079,85	955,63	955,82
7	081,01	081,22	938,62	938,86
8	081,01	081,22	920,33	920,62
9	079,63	079,85	900,93	901,24
10	076,70	077,04	880,28	880,69
11	072,14	072,45	858,41	858,76
12	065,71	066,06	835,10	835,39
13	057,44	057,67	810,16	810,51
14	047,07	047,33	783,85	784,21
15	034,40	034,70	755,82	756,08
16	019,46	019,78	725,81	726,18
17	001,92	002,17	693,90	694,20
18	25981,47	25981,80	659,89	660,25
19	958,05	958,38	623,49	623,89
20	931,40	931,76	584,62	585,03
21	901,24	901,54	543,05	543,40
22	867,36	867,71	498,47	498,93
23	829,48	829,88	450,80	451,28
24	787,45	787,85	399,72	400,19
25	741,07	741,53	345,05	345,58
26	690,31	690,78	286,68	287,14
27	635,12	635,68	224,28	224,76
28	575,64	576,12	157,88	158,42
29	512,02	512,51	087,30	087,84
30	444,69	445,19	013,11	013,59
31	374,02	374,60	24935,20	24935,80
32	300,66	301,22	854,04	854,65
33	224,28	224,76	770,08	770,68
34	146,74	147,16	683,78	684,37

Tabelle 9. AgH (4,3).

<i>J</i>	<i>R</i> (<i>J</i>)		<i>P</i> (<i>J</i>)	
0	29842,01			
1	847,79		29821,71	
2	850,07		807,47	
3	849,64		790,23	
4	846,34		769,95	
5	839,88		746,77	
6	830,14		720,24	
7	817,47		691,43	
8	801,37		659,11	
9	782,35		623,84	
10	759,45		585,41	
11	733,23		543,75	
12	702,85		498,92	
13	669,18		450,80	
14	631,68		399,16	
15	590,56		344,04	
16	544,81		285,00	
17	495,68		223,07	
18	442,64		157,19	
19	385,02		087,37	
20	323,27		014,09	
21	257,27		28936,32	28936,78
22	187,30		855,38	855,70
23	113,07		770,40	
24	034,83		681,34	681,70
25	28952,79		588,55	588,84
26	866,17	866,45	492,14	492,48
27	776,03	776,50	392,10	392,42
28		682,55	288,44	289,06
29		585,11	181,50	181,86
30			071,13	071,56
31			27957,41	27958,01
32			840,71	841,29

Tabelle 10. AgH (4,9).

<i>J</i>	<i>R</i> (<i>J</i>)		<i>P</i> (<i>J</i>)	
21	21988,71	21989,49		
22	976,22	976,70		
23	962,16	962,72	21619,28	21619,90
24	946,87	947,48	593,69	594,11
25	930,63	931,13	566,90	567,58
26	913,23	913,87	539,38	540,05
27	895,29	895,77	511,44	512,18
28	876,62	877,11	483,08	483,70
29	857,48	858,03	454,35	454,83
30	838,25	838,62	425,71	426,23
31	818,90	819,44	397,19	397,83

<i>J</i>	<i>R (J)</i>		<i>P (J)</i>	
32	21799,91	21800,31	21369,29	21369,83
33	781,33	781,82	342,07	342,49
34	763,82	764,22	316,88	316,42
35	747,49	747,95	291,16	291,63
36	732,93	733,38	268,30	268,84
37	720,59	720,86	247,81	248,31
38	710,70	711,06	230,29	230,70
39	703,91	704,37	215,86	216,17
40	701,47	701,72	204,51	204,97
41	703,91	704,37	197,60	198,24
42			195,71	196,18
43			199,34	199,66

Tabelle 11. AgH (5,8).

<i>J</i>	<i>R (J)</i>		<i>P (J)</i>	
0	23 842,02	23 842,71		
1	848,41	848,98	23 825,24	23 825,67
2	852,93	853,59	814,02	814,48
3	855,82	856,37	801,53	802,01
4	856,88	857,27	787,46	788,06
5	856,37	856,88	771,42	771,91
6	854,11	854,60	753,93	754,51
7	850,05	850,51	734,90	735,42
8	844,23	844,72	714,27	714,75
9	836,56	837,08	691,86	692,39
10	827,08	827,59	667,95	668,43
11	815,79	816,26	642,28	642,84
12	802,57	803,07	615,02	615,53
13	787,46	788,06	586,11	586,59
14	770,53	771,07	555,48	556,03
15	751,62	752,14	523,21	523,74
16	730,88	731,43	489,34	489,85
17	708,20	708,66	453,78	454,33
18	683,69	684,15	416,62	417,13
19	657,29	657,73	377,85	378,41
20	629,08	629,59	337,56	338,09
21	599,08	599,62	295,72	296,31
22	567,48	567,96	252,43	253,07
23	534,13	534,68	207,78	208,35
24	499,40	499,87	161,83	162,40
25	463,02	463,70	114,70	115,24
26	425,38	425,86	066,32	066,86
27	386,48	387,08	017,05	017,57
28	346,21	346,55	22 966,89	22 967,47
29			915,96	916,49
30			864,36	864,86

Tabelle 12. AgH (5,10).

<i>J</i>	<i>R (J)</i>		<i>P (J)</i>	
9	21704,37	21704,86		
10	704,37	704,86		
11	703,20	703,74		
12	701,47	701,72	21514,04	21514,46
13	698,74	699,30	497,36	497,90
14	695,15	695,71	480,19	480,60
15	690,77	691,28	462,27	462,88
16	685,37	685,87	443,81	444,43
17		679,56	424,74	425,44
18	672,22	672,66	405,20	405,73
19	664,44	664,96	385,09	385,79
20	656,06	656,68	364,68	365,12
21	21647,11	647,54	343,78	344,33
22	637,66	638,07	322,61	323,13
23	627,65	628,07	301,33	301,84
24	617,33	617,89	279,94	280,46
25	607,02	607,51	258,70	259,16
26	596,63	597,24	237,71	238,23
27	586,51	586,97	217,16	217,64
28	576,78	577,26	197,22	197,60
29	567,79	568,26	178,09	178,60
30	559,51	559,84	160,23	160,58
31	552,28	552,70	143,66	144,02
32	546,82	547,18	128,90	129,32
33	543,11	543,57	116,21	116,67
34	541,97	542,25	106,18	106,56
35	543,57	544,08	099,21	099,60
36	550,06	550,50	096,00	096,32
37	562,83	563,19		097,26
38	583,55	583,70		103,91
39	613,66	614,00		117,18
40				138,92
41				170,89

Tabelle 13. AgH (6,3).

<i>J</i>	<i>R (J)</i>	<i>P (J)</i>
10	31088,96	
11	050,18	
12	007,37	
13	30959,95	30828,94
14	907,79	767,82
15	852,68	703,23
16	792,99	634,57
17	729,03	561,95
18	660,95	485,74
19	588,97	405,06
20	512,84	320,80
21	432,78	232,47
22	348,59	141,01
		044,90

<i>J</i>	<i>R (J)</i>	<i>P (J)</i>
23	30260,65	29945,53
24	168,72	842,52
25	072,93	736,02
26	29973,65	626,37
27	870,71	512,75
28	763,90	396,22
29	654,54	276,23
30	541,07	153,15
31	424,67	027,03
32	304,72	28898,22
33	181,97	766,46
34	056,37	632,07
35	28928,00	495,25
36	797,07	355,91
37		214,32
38		071,13
39		27925,91
40		778,63

Tabelle 14. AgH (6,10).

<i>J</i>	<i>R (J)</i>	<i>P (J)</i>
2	22347,55	22348,01
3	351,73	352,08
4		354,82
5	355,92	356,39
6	356,39	356,77
7	355,54	355,92
8	353,51	354,00
9	350,51	350,98
10	346,13	346,68
11	340,74	341,21
12		334,95
13	326,70	327,01
14	317,99	318,42
15	308,15	308,67
16	297,53	297,99
17	285,84	286,37
18	273,35	273,79
19	260,07	260,46
20	245,99	246,51
21	231,28	231,73
22	216,09	216,57
23	200,34	200,89
24	184,48	184,95
25	168,42	168,84
26	152,29	152,72
27	136,48	137,02
28	121,01	121,42
29	106,14	106,61
30		
31		

Tabelle 15. AgH (7,9).

<i>J</i>	<i>R</i> (<i>J</i>)		<i>P</i> (<i>J</i>)	
25	23 614,51	23 615,02	23 287,45	23 288,04
26	579,28	579,90	241,78	242,13
27	543,28	543,86	195,42	195,80
28	506,86	507,29	148,96	149,26
29	469,95	470,47	102,47	102,83
30	433,17	433,68	056,03	056,67
31	396,24	396,76	009,55	010,24
32	360,02	360,53	22 964,17	22 964,64
33			919,29	919,80
34			875,51	876,15

Tabelle 16. AgH (7,11).

<i>J</i>	<i>R</i> (<i>J</i>)		<i>P</i> (<i>J</i>)	
5	22 040,56	22 041,18		
6	041,71	042,19		
7	042,19	042,84	21 936,32	21 937,17
8	041,71	042,19	922,86	923,43
9	040,17	040,56	908,22	908,61
10	038,02	038,54	892,70	893,44
11	035,22	035,62	876,62	877,11
12	031,64	031,99	859,79	860,35
13	027,26	027,72	842,40	842,82
14	022,31	022,73	824,48	824,96
15	016,74	017,27	806,22	806,77
16	010,55	010,98	787,58	787,98
17	003,99	004,36	768,58	769,12
18	21 996,96	21 997,37	749,42	749,86
19	989,79	990,14	730,31	730,65
20	982,42	982,80	711,06	711,58
21	974,96	975,42	692,13	692,54
22	967,73	968,25	673,55	673,87
23	960,58	960,98	655,26	655,67
24	954,06	954,43	637,66	638,07
25	948,02	948,51	621,14	621,40
26	943,04	943,36	605,45	605,87
27	939,19	939,63	591,20	591,85
28	936,62	937,17	578,59	578,98
29			567,58	567,99

Da die oberen Zustände der Banden gestört sind, können weder Rotationskonstanten noch Schwingungstermdifferenzen derselben in der üblichen Weise bestimmt werden. Statt dessen kann man von dem $B' - B''$ -Verfahren Gebrauch machen. Wenn nur R - und P -Zweige existieren und die oberen Terme die gestörten sind, so bildet man:

$$\frac{R(J) - R(J-1) + P(J+2) - P(J+1)}{4J} = B' - B'' - 6D'' - 2J^2(D' - D'').$$

Tabelle 17. $\Delta_2 F'(J) = R(J) - P(J)$.

J	0	1	2	3	4	5	6	7
1	36,39	34,51	31,64	28,88	25,88	23,25	20,01	
2	60,80	57,37	53,27	47,97	42,49	38,86	35,29	
3	85,09	80,33	74,45	67,30	59,68	54,98	51,02	
4	109,21	103,02	95,56	86,25	76,59	69,73	65,92	
5	133,37	125,88	116,61	105,13	93,15	84,89	80,27	
6	157,42	148,36	137,48	123,88	109,86	100,11	94,60	
7	181,29	170,90	158,08	142,37	126,26	115,13	108,91	105,62
8	205,00	193,19	178,59	160,62	142,29	129,90	123,28	118,76
9	228,54	215,29	198,90	178,61	158,17	144,68	137,30	131,96
10	252,08	237,22	218,88	196,35	173,79	159,15	150,99	145,21
11	275,34	258,86	238,58	213,62	189,07	173,49	164,60	158,57
12	298,42	280,39	258,14	230,61	203,92	187,57	178,39	171,70
13	321,17	301,58	277,30	247,15	218,47	201,50	191,98	184,86
14	343,67	322,44	295,92	263,18	232,61	215,05	204,93	197,77
15	366,02	343,08	314,23	278,67	246,47	228,44	218,10	210,85
16	387,95	363,35	332,04	293,59	259,83	241,52	230,99	223,00
17	409,64	382,85	349,31	307,98	272,97	254,38	243,53	235,33
18	431,01	402,48	366,08	321,64	285,40	267,01	255,98	247,51
19	452,00	421,65	382,25	334,59	297,55	279,40	268,24	259,49
20	472,54	440,14	397,67	346,72	309,34	291,48	280,18	271,18
21	492,69	458,11	412,38	358,20	320,68	303,38	292,17	282,92
22	512,54	475,61	426,22	368,84	331,91	314,97	303,64	294,32
23	531,91	492,42	439,12	378,70	342,81	326,34	314,98	305,41
24	550,73	508,55	451,19	387,78	353,33	337,50	326,13	316,38
25	569,12	524,06	462,01	396,03	363,65	348,31	336,96	326,94
26	586,90	538,69	471,54	403,79	373,93	358,97	347,56	337,54
27	604,21	552,41	479,66	411,00	383,86	369,32	358,04	347,96
28	620,85	565,18	486,24	417,85	393,56	379,29	368,22	357,97
29	637,12	576,81	491,01	424,71	403,21	389,56	378,18	367,56
30	652,19	587,00	494,00	431,66	412,50	399,11	387,94	377,08
31	666,66	595,79	495,18	438,80	421,66	408,69	397,13	386,61
32	680,33	602,84	494,72	446,54	430,60	417,91	406,39	395,87
33	693,18	607,67	493,12	454,53	439,30	426,97	415,30	
34	704,59	609,43	491,13	462,71	447,92	435,60	424,03	
35	715,29	607,74	489,76	470,73	456,40	444,44	432,54	
36	724,41	601,55	490,52	478,35	464,68	454,00	440,42	
37	731,91	589,64	494,86	485,62	472,64	465,75		
38	737,39	571,82	503,18	492,54	480,38	479,71		
39	740,07	549,51	514,41	499,65	488,12	496,65		
40	738,30	527,20	525,24	507,07	496,86			
41	729,27	511,45	532,38	515,01	506,22			
42	704,09	512,24	535,52	522,87				
43	645,82	544,27	537,34	530,66				
44	562,27	595,12		538,47				
45	497,09	631,15						
46	467,57							
47	455,71							
48	450,50							
49	448,05							
50	447,03							
51	446,93							
52	447,21							
53	447,76							
54	448,86							

Tabelle 18. $\Delta_2 F''(J) = R(J-1) - P(J+1)$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
38,09	36,90	35,77	34,49	33,28	31,88		29,39	28,12			
63,39	61,44	59,47	57,24	55,41	53,23	51,51	49,10	46,93			
88,75	85,88	83,20	80,27	77,47	74,44	71,65	68,78	65,50	61,96	58,83	
14,01	110,37	106,78	103,24	99,56	95,83	92,12	88,29	84,43	80,02	75,81	
39,39	134,84	130,36	125,91	121,64	116,96	112,52	107,89	102,86	98,00	92,52	
64,39	159,13	153,87	148,67	143,35	138,04	132,87	127,13	121,47	115,58	109,28	103,98
89,27	183,21	177,24	171,20	165,41	159,14	152,87	146,51	139,85	133,05	126,14	118,81
14,00	207,35	200,51	193,73	186,80	179,87	172,81	165,58	158,15	150,41	142,13	134,10
38,81	231,31	223,64	216,03	208,30	200,49	192,63	184,61	176,30	167,73	158,34	148,88
63,39	255,01	246,61	238,29	229,70	221,24	212,42	203,45	194,26	184,65	174,45	163,50
87,85	278,65	269,51	260,29	250,92	241,71	232,09	222,23	212,14	201,45	190,26	178,21
12,12	302,14	292,07	282,13	272,04	261,91	251,32	240,72	229,68	218,22	205,87	192,71
36,11	325,32	314,54	303,79	292,73	281,87	270,47	258,99	247,07	234,60	221,27	207,10
59,79	348,33	336,78	325,14	313,51	301,64	289,47	277,14	264,39	250,88	236,47	221,09
83,32	371,17	358,86	346,33	333,76	321,16	308,19	294,91	281,23	266,71	251,35	234,65
106,65	393,65	380,56	367,38	353,99	340,47	326,67	312,52	297,83	282,46	265,94	248,16
29,84	415,91	402,03	387,97	373,81	359,56	344,93	329,96	314,23	297,79	280,18	261,13
52,59	437,89	423,36	408,32	393,52	378,36	362,95	347,01	330,35	312,88	294,09	273,70
74,98	459,58	444,05	428,47	412,74	396,80	380,46	363,70	346,10	327,65	307,57	285,85
97,27	481,00	464,78	448,46	431,68	414,97	397,84	380,08	361,50	342,02	320,65	297,63
19,08	502,11	485,02	467,80	450,56	432,86	414,77	396,19	376,59	355,82	333,50	308,90
40,59	522,79	505,00	487,07	469,02	450,45	431,60	411,85	391,25	369,51	345,80	319,73
61,85	543,25	524,70	505,87	486,87	467,69	447,84	427,17	405,61	382,56	357,69	329,94
82,67	563,31	543,88	524,34	504,65	484,44	463,61	442,17	419,44	395,20	368,94	339,62
103,16	583,07	562,88	542,51	521,87	500,80	479,31	456,70	432,84	407,49	379,71	348,59
123,25	602,40	581,28	560,31	538,79	516,87	494,38	470,76	445,92	419,24	389,92	356,74
142,93	621,32	599,46	577,54	555,21	532,45	508,89	484,43	458,44	430,34	399,44	364,42
162,07	639,82	617,25	594,46	571,38	547,78	523,33	497,69	470,56	440,95	408,43	371,54
180,92	657,96	634,69	611,12	587,06	562,53	537,08	510,43	481,88	450,92	416,62	378,78
199,38	675,72	651,47	627,29	602,16	576,76	550,30	522,46	492,74	460,60	424,19	385,42
217,29	692,76	667,79	642,63	617,08	590,60	563,13	534,17	503,06	468,94	430,57	
234,79	709,54	683,87	657,85	631,66	603,93	575,43	545,30	512,85	476,92	436,05	
251,95	725,74	699,30	672,45	645,13	616,87	587,21	555,82	521,69	484,87	440,63	
268,53	741,54	714,41	686,68	658,30	629,08	598,38	565,60	529,97	490,24	443,94	
284,54	757,01	728,91	700,51	670,99	640,83	608,95	574,86	537,55	495,49	445,95	
299,14	771,68	742,83	713,71	683,41	652,12	619,05	583,39	544,27	499,78	446,57	
313,25	785,93	756,64	726,40	695,07	662,70	628,23	591,20	550,08	502,57	446,37	
326,98	799,89	769,59	738,24	706,23	672,55	636,72	598,16	554,92	504,78	445,83	
340,48	813,08	781,82	749,82	716,73	681,93	644,83	604,23		506,14	444,71	
353,78	825,75	793,65	761,31	726,46	690,56	651,91	609,48		506,22	442,94	
366,02	837,91	804,96	771,44	735,69	698,51	658,29	614,34		505,65		
378,20	849,46	815,70	780,72	744,37	705,82	663,77	618,23		504,64		
389,45	860,50	825,74	789,92	752,34	712,28	668,44	620,55				
400,57	871,63	835,41	798,29	759,40	718,01	672,55					
411,50	881,16	844,37	806,06	765,95	722,62	676,13					
			813,00	771,64	726,45	678,54					
			819,63	776,61	729,43						
			825,12	780,38	732,03						
			829,99	783,57	734,53						
			833,90	785,59							
				786,39							
				786,14							
				784,56							
				781,23							
				775,76							

Tabelle 19.

v	$\Delta G''(v)$	Δ_2	Δ_3	B''	$\Delta B''$	D''
0	1691,68			6,348		0,000345
1	1623,75	67,93		6,147	0,201	0,000335
2	1555,78	67,97	0,04	5,946	0,201	0,000330
3	1487,32	68,46	0,49	5,745	0,201	0,000325
4	1418,38	68,94	0,48	5,543	0,202	0,000325
5	1348,52	69,86	0,92	5,341	0,202	0,000335
6	1276,95	71,57	1,71	5,132	0,209	0,000340
7	1203,45	73,50	1,93	4,919	0,213	0,000340
8	1127,40	76,05	2,55	4,701	0,218	0,000345
9	1047,58	79,82	3,77	4,476	0,225	0,000365
10				4,235	0,241	0,000380
11				3,992	0,243	0,000430

Tabelle 20.

v	$(\Delta v_i)_{\text{vibr}}$	$[(1 - e^2) B_e - (1 - e^3) \alpha (v + 1/2) - (1 - e^4) (B_v^* - B_v)]$	$(1 - e^4) D_v \cdot 10^7$
0	0,07	0,001070	1,173
1	0,21	0,001019	1,139
2	0,33	0,000968	1,122
3	0,45	0,000917	1,105
4	0,55	0,000865	1,105
5	0,65	0,000833	1,139
6	0,73	0,000760	1,156
7	0,80	0,000706	1,156
8	0,85	0,000647	1,173
9	0,90	0,000588	1,241
10	0,93	0,000523	1,292
11	0,96	0,000458	1,462

Diese Werte wurden für alle Banden berechnet und in den Fig. 1 bis 8 für alle oberen Zustände von $v' = 0$ bis $v' = 7$ wiedergegeben. Wenn Anfangs- und Endterme ungestört sind, verlaufen die $B' - B''$ -Kurven horizontal, nur bei den größten J -Quantenzahlen erhält man in einigen Fällen wegen des kleinen quadratischen Gliedes eine Biegung. Wenn der obere Zustand gestört ist, so zeigt die $B' - B''$ -Kurve den Übergang der B' -Werte von den der gestörten in den der störenden Terme.

In Fig. 1 sind die $B' - B''$ -Kurven aller Banden mit $v' = 0$ aufgetragen. Ihre beinahe konstante Entfernung von etwa $0,2 \text{ cm}^{-1}$ stellt die Differenzen der Rotationskonstanten von je zwei benachbarten Schwingungszuständen des unteren Terms dar. Bei $J = 0$ verlaufen die Kurven

nahezu horizontal; zwischen $J = 40$ und 45 findet ein Übergang in eine Termfolge mit beträchtlich kleinerem B' -Wert statt. Bei noch höheren Rotationsquantenzahlen würden die Kurven wieder horizontal verlaufen, wenn nicht schon hier ein Ansteigen der Kurven wegen des quadratischen Gliedes $2J^2 (D' - D'')$ merkbar wäre. Den $B'_a - B''$ -Wert für den gestörten

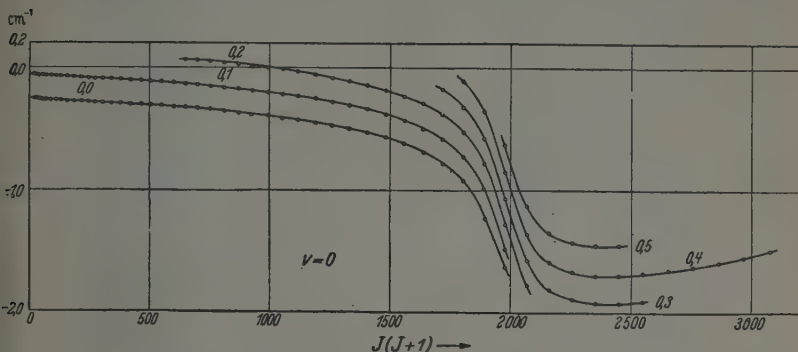


Fig. 1. $B' - B''$ -Kurven der Banden mit $v' = 0$.

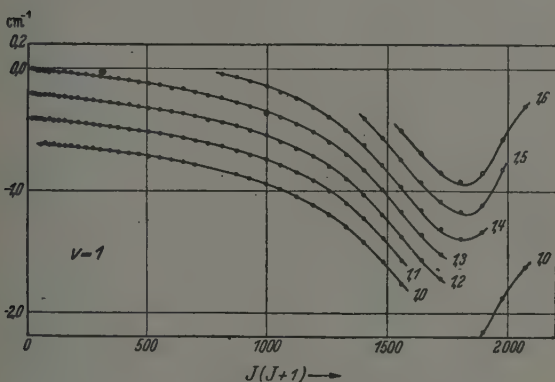


Fig. 2. $B' - B''$ -Kurven der Banden mit $v' = 1$.

$1\Sigma_a$ -Term können wir zu $-0,2 \text{ cm}^{-1}$, den $B'_b - B''$ -Wert für den störenden $1\Sigma_b$ -Term zu $-3,0 \text{ cm}^{-1}$ abschätzen; wir erhalten also $B_a = 6,1 \text{ cm}^{-1}$ für den gestörten und $B_b = 3,3 \text{ cm}^{-1}$ für den störenden Term.

In Fig. 9 sind die Terme des oberen Zustandes gegen $J(J+1)$ aufgetragen. Die Berechnung derselben wurde durch Addition der Wellenzahlen der Bandenlinien zu den entsprechenden Termwerten des unteren Zustandes durchgeführt, die aus den Rotations- und Schwingungstermdifferenzen aufgebaut wurden. Hier sieht man auch ganz deutlich, daß

die Termreihe mit $v' = 0$ von einem anfangs steileren Gang bei höheren Rotationsquantenzahlen in einen flacheren übergeht. Der Übergang muß

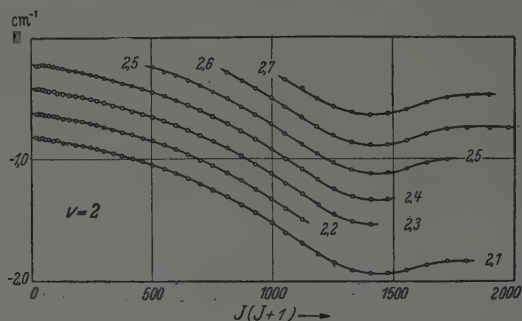


Fig. 3. $B' - B''$ -Kurven der Banden mit $v' = 2$.

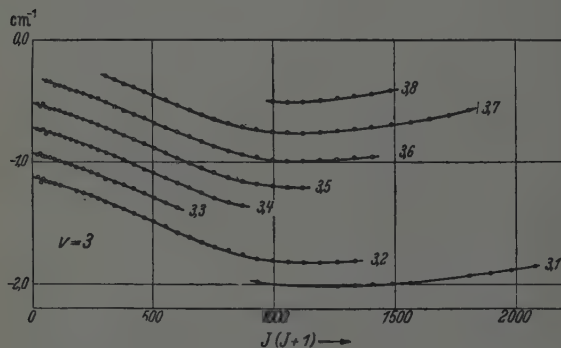


Fig. 4. $B' - B''$ -Kurven der Banden mit $v' = 3$.

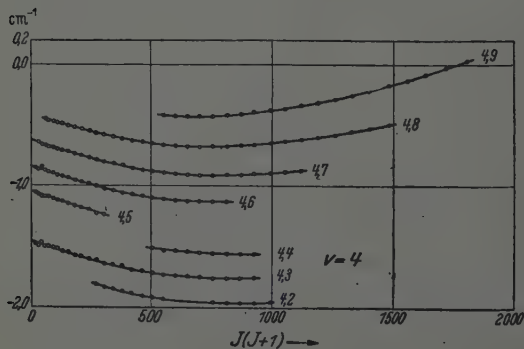


Fig. 5. $B' - B''$ -Kurven der Banden mit $v' = 4$.

in den untersten Schwingungszustand des störenden $^1\Sigma_b$ -Terms führen, dessen Vibrationsquantenzahl also ebenfalls $v_b = 0$ ist.

Aus Fig. 2 und aus der Termkurve $v' = 1$ in Abb. 9 ersieht man, daß der gestörte $v_a = 1$ -Zustand ebenfalls in den störenden Zustand $v_b = 0$ überzugehen anfängt, aber schon bei kleineren Rotationsquantenzahlen als der $v_a = 0$ -Zustand; die Rotationskonstante vermindert sich schnell

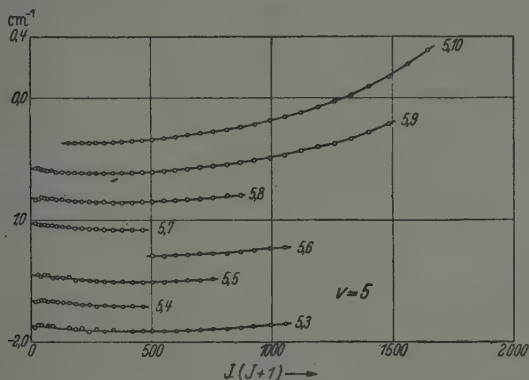


Fig. 6. $B' - B''$ Kurven der Banden mit $v' = 5$.

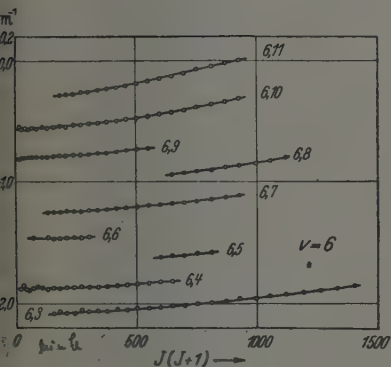


Fig. 7. $B' - B''$ -Kurven der Banden mit $v' = 6$.

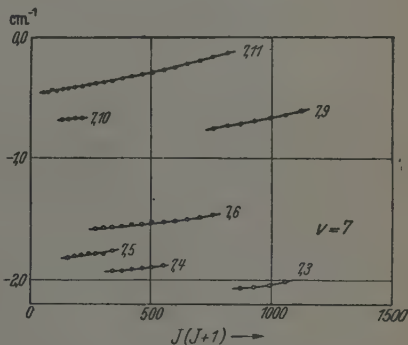


Fig. 8. $B' - B''$ -Kurven der Banden mit $v' = 7$.

und erreicht bei etwa $J = 42$ ein Minimum. Von hier an steigen die $B' - B''$ -Kurven wieder steil an und auch die Termkurve in Fig. 9 wird von hier an wieder steiler. Es erfolgt also wiederum eine Störung, noch bevor die frühere abgeklungen ist; diese neue Störung wird am $v_b = 0$ -Zustand von dem $v_a = 0$ -Zustand verursacht und ist das Gegenstück zu der Störung, die am $v_a = 0$ -Zustand von dem $v_b = 0$ -Zustand hervorgerufen wird.

An der $B' - B''$ -Kurve des $v = 2$ -Zustandes (Fig. 3) wird das Minimum bei noch kleinerer Rotationsquantenzahl, bei etwa $J = 37$, erreicht; darauf

folgt aber hier ein Maximum bei etwa $J = 43$. In dieser Termreihe folgen also wenigstens drei Störungen nacheinander. Man sieht auch, daß, wenn die Störungen dicht gelagert sind, die Termkurven immer weniger stark hin- und herbiegen. Je größer v wird, desto kleiner wird die Schwankung der $B' - B''$ -Kurven, bis sie bei den größten v -Werten fast ungestört zu

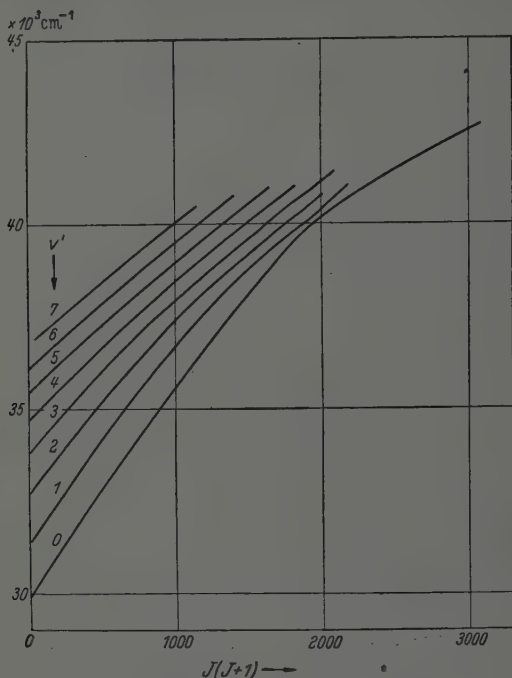


Fig. 9. Rotationstermreihen der oberen $^1\Sigma$ -Zustände.

sein scheinen. Die Banden mit $v' = 6$ und 7 zeigen schon einen fast regelmäßigen Verlauf; nur die eigentümlichen Intensitätsverteilungen weisen hier auf die Störungen hin (s. unten).

Um einen besseren Überblick über den ganzen Störungsvorgang zu gewinnen, wurde die schematische Fig. 10 entworfen. Die steilere, „gestörte“ Termreihe des $^1\Sigma_a$ wird durch strichpunktierte, die flachere, „störende“ des $^1\Sigma_b$ -Zustandes durch gestrichelte Linien (hier der Einfachheit halber Geraden) bezeichnet. Das Ergebnis der Störungen wurde voll ausgezogen.

Der Beginn der störenden $v_b = 0$ -Termreihe wurde zwischen $v_a = 4$ und $v_a = 5$ gelegt, da an der $B' - B''$ -Kurve des $v' = 5$ -Zustandes (Fig. 6)

noch ein kleines Sinken in der Gegend von $J = 0$ festzustellen ist, die $B' - B''$ -Kurve von $v' = 6$ (Fig. 7) dagegen schon von Anfang an steigt. Die Zustände $v' = 6$ und $v' = 7$ liegen schon gänzlich in dem Gewebe der einander überschneidenden Termreihen. Auf sie wirken von beiden Seiten her viele andere Terme abstoßend; darum sind in ihnen die Eigenschaften

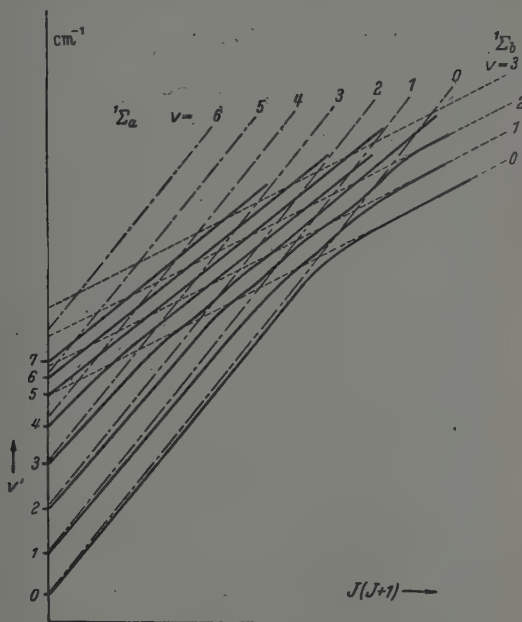


Fig. 10. Schematischer Verlauf der homogenen Störungen an den oberen Zuständen des $1\Sigma-1\Sigma$ -AgH-Bandensystems.

der $1\Sigma_a$ - und $1\Sigma_b$ -Terme ganz zusammengeschmolzen. Sie stellen sich in der Richtung der Winkelhalbierenden ein und haben infolgedessen Rotationskonstanten, die zwischen den Konstanten der $1\Sigma_a$ - und $1\Sigma_b$ -Terme liegen.

Von der Fig. 10 kann auch abgelesen werden, daß die v' -Numerierung nicht mehr die übliche Bedeutung besitzt. Nur die mit $v' = 0$ bezeichnete Termreihe behält in ihrem ganzen Lauf die Quantenzahl $v = 0$; schon die mit $v' = 1$ bezeichnete verliert allmählich die Quantenzahl $v_a = 1$ und nähert sich immer mehr einem Zustand, der eher mit $v_b = 0$ zu bezeichnen wäre, um dann in $v_a = 0$ und endlich in $v_b = 1$ überzugehen. Die Termreihe $v' = 2$ geht von $v_a = 2$ in $v_b = 0$, dann nacheinander in $v_a = 1$, $v_b = 1$, $v_a = 0$, $v_b = 2$ über usw. Die Termreihe $v' = 5$ ist bei $J = 0$ zu

der $v_b = 0$, die $v' = 6$ zu der $v_a = 5$ und die $v' = 7$ zu der $v_b = 1$ am nächsten. Die v' -Zahlen stellen hier also keine Schwingungsquantenzahlen dar, sondern sind nur Laufnummern und dürfen als solche nur zum Unterscheiden der verschiedenen Termreihen benutzt werden.

In der ebenfalls schematischen Fig. 11 wurden einige Beispiele für das Verhalten der Rotationskonstanten bei wachsendem J ($J + 1$) im Laufe

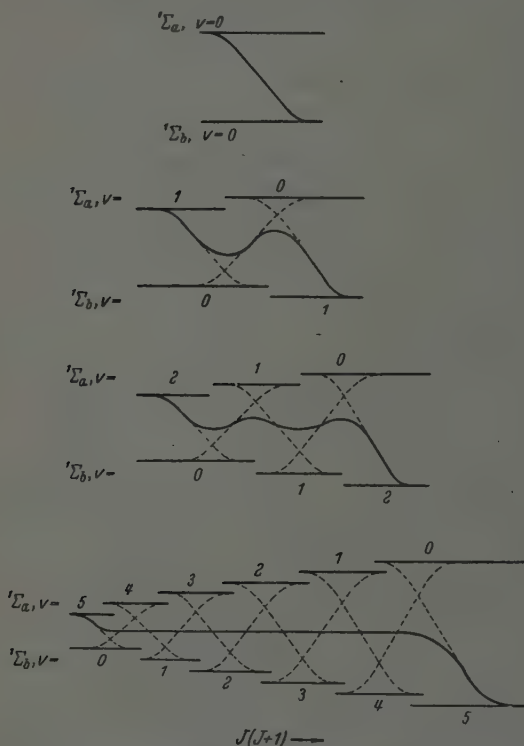


Fig. 11. Beispiele für die Übergänge der Rotationskonstanten der ${}^1\Sigma_a$ - und ${}^1\Sigma_b$ -Terme, bei homogenen Störungen.

aufeinanderfolgender Störungen skizziert. Die punktierten Linien stellen die voneinander isoliert gedachten Übergänge dar, durch deren Superposition man die resultierenden, voll ausgezogenen Rotationskonstantenkurven erhält. Vom vollständigen Verlauf der Rotationskonstanten während der einander folgenden Störungen werden natürlicherweise nur Teile verwirklicht, und zwar abhängig davon, wohin die Stelle mit $J = 0$ fällt. Diesen Teilen entsprechen eben die Kurven der Fig. 1 bis 8.

In Fig. 5 und 6 ihrer Arbeit tragen Bengtsson und Olsson auch für den oberen Zustand der AgH-Banden $\Delta G(v)$ - und B_v -Werte auf. Diese Werte erhält man, indem man die Tangentenrichtungen und die Entfernungen der Termreihen des oberen Zustandes bei $J = 0$ abliest. Da bei homogenen Störungen diese Stellen gar nicht bevorzugt sind, sind auch diese Werte für die entsprechenden Termreihen gar nicht charakteristisch; einen völlig anderen Gang würden diese Kurven z. B. bei $J = 20$ oder 40

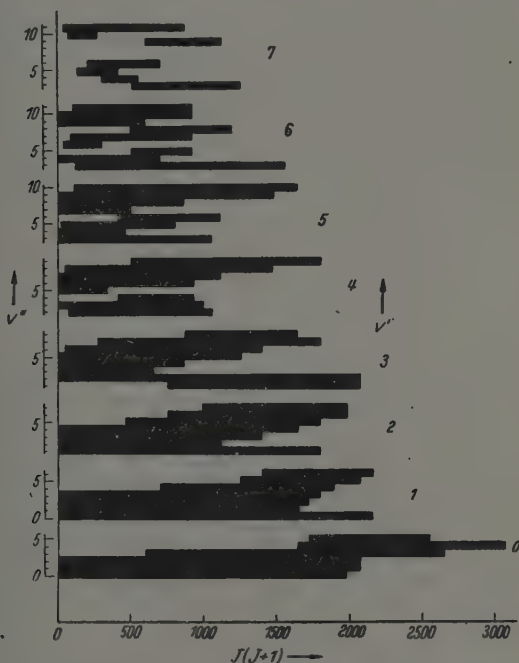


Fig. 12. Intensitätsverteilung in dem ${}^1\Sigma-{}^1\Sigma$ AgH-Bandsystem. Die Länge der schwarzen Streifen bei einem bestimmten (v' , v'') zeigt den $J(J+1)$ -Intervall, in dem die Linien der betreffenden Bande genügende Intensität haben, um ausmeßbar zu werden.

annehmen. Trotzdem nimmt Herzberg die Fig. 5 als ΔG -Kurve des oberen ${}^1\Sigma$ -Termes von AgH in seinem Buche über Molekülspektren (S. 220) auf und betrachtet sie als Beispiel für die Nichtüberschneidung von Potentialkurven gleicher Rasse. Wie wir uns aber überzeugen konnten, findet in Wirklichkeit überhaupt kein Ausweichen der Potentialkurven statt, sondern es zeigt sich im Gegenteil ein untrennbares Geflecht der Termreihen und ein Zusammenfließen der Eigenfunktionen.

Wie schon erwähnt wurde, zeigt auch die Intensitätsverteilung im Bandensystem Anomalien. Einige Banden sind nur bei kleinen Rotationsquantenzahlen intensiv, andere nur bei größeren. Einen Überblick über die Intensitätsverteilung kann man etwa auf Grund der Fig. 12 gewinnen. Hier zeigt nämlich die Länge der schwarzen Streifen bei einem bestimmten (v', v'') -Wert das $J(J+1)$ -Intervall, in dem die Linien der betreffenden Bande genügende Intensität haben, um auf unseren Platten ausgemessen werden zu können. Im Schwingungsschema der Fig. 13 wurden diejenigen Banden, die bereits bei den kleinsten J -Werten eine genügende Intensität haben und zur Beobachtung gelangten, mit leeren Kreisen, und diejenigen,



Fig. 13. Die Verteilung der stärksten Banden im Schwingungsschema. \bigcirc bedeutet Banden, die bereits bei $J = 0$ genügende Intensität haben, um ausgemessen zu werden, \bullet solche, die bei den größten Rotationsquantenzahlen die stärksten sind.

die bis zu den relativ höchsten $J(J+1)$ -Werten gehen, mit ausgefüllten Kreisen bezeichnet. Es scheint, als ob die zwei Arten von Zeichen in der Nähe von zwei verschiedenen Condon-Parabeln liegen, einer mit enger Öffnung (leere Kreise) und einer mit weiter Öffnung (ausgefüllte Kreise). Dies ist auch zu erwarten, da die Rotationskonstanten des ${}^1\Sigma_a$ -Terms fast die gleiche Größe haben wie die des ${}^1\Sigma$ -Endterms und daher einem ungestört gedachten Bandensystem ${}^1\Sigma_a - {}^1\Sigma$ eine enge Condon-Parabel entsprechen würde. Ein ungestörtes ${}^1\Sigma_b - {}^1\Sigma$ -System würde dagegen eine Condon-Parabel mit weiter Öffnung besitzen, da die Rotationskonstanten des ${}^1\Sigma_b$ -Terms erheblich kleiner sind. Da bei kleinen J -Werten die Termreihen der oberen Zustände — besonders die, die nicht zu den höchsten v' -Zahlen gehören — viel näher zu dem ${}^1\Sigma_a$ -Elektronenterm als zu dem ${}^1\Sigma_b$ stehen, kann die durch den leeren Kreisen gezogene Linie angenähert als eine Condon-Parabel für ein ${}^1\Sigma_a - {}^1\Sigma$ -Bandensystem betrachtet werden. Die andere, durch die vollen Kreise gezogene Linie gehört aber nur in viel kleinerem Maße zu ${}^1\Sigma_b - {}^1\Sigma$, denn bei höheren Rotationsquantenzahlen sind die Verhältnisse schon viel verwickelter. Wenn nämlich

eine Rotationstermreihe z. B. von $1\Sigma_a$ bei wachsenden Rotationsquantenzahlen in eine andere des $1\Sigma_b$ -Zustandes übergeht, so gehen auch ihre Eigenfunktionen allmählich in die des anderen über. Es werden daher im Laufe

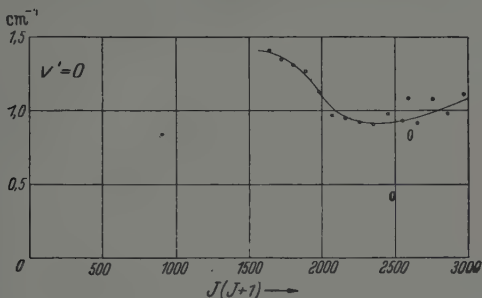


Fig. 14. Isotopieaufspaltung der Rotationstermreihe mit $v' = 0$.

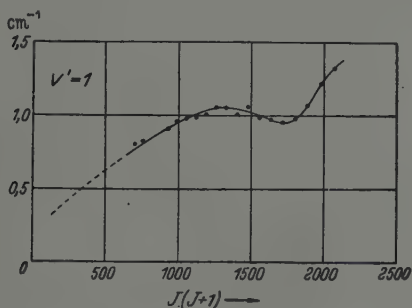


Fig. 15. Isotopieaufspaltung der Rotationstermreihe mit $v' = 1$.

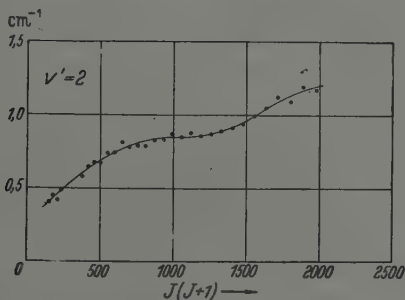


Fig. 16. Isotopieaufspaltung der Rotationstermreihe mit $v' = 2$.

des Überganges immer andere Banden intensiv, da sich die Maxima der Eigenfunktionen mit immer anderen Eigenfunktionen des Endzustandes überlagern. Das kann am reinsten bei den Banden mit $v' = 0$ beobachtet

werden, von welchen bei kleinen Rotationsquantenzahlen die (0,0)-Bande die größte Intensität hat, oberhalb $J = 50$ dagegen die (0,4)-Bande. Wo nicht nur zwei, sondern mehrere Eigenfunktionen sich vermischen, sind selbstverständlich die Intensitätsverhältnisse viel komplizierter. Z. B. bei

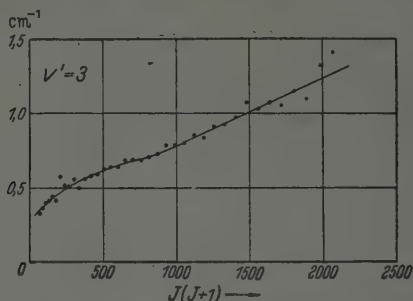


Fig. 17. Isotopieaufspaltung der Rotationstermreihe mit $v' = 3$.

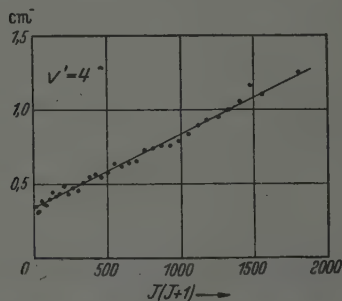


Fig. 18. Isotopieaufspaltung der Rotationstermreihe mit $v' = 4$.

den Banden mit $v' = 6$ und 7 sind die Intensitätsanomalien die größten, obzwar die Rotationskonstanten der $v' = 6$ - und 7-Termreihen sich kaum zu ändern scheinen.

Wie bereits Bengtsson und Olsson feststellten, zeigen auch die Isotopieaufspaltungen der Bandenlinien Anomalien. Statt der üblichen theoretischen Formel versuchten sie die folgende einzuführen:

$$\Delta v_i = \frac{(e-1)(J + \frac{1}{2}) \Delta_2 F(J)}{2}$$

und fanden, daß diese Formel annähernd richtige Werte liefert. Wenn man aber schon die Störungen in den Banden kennt, so ist es klar, daß es überhaupt keine einfache Formel geben kann, die die Isotopieaufspaltungen einigermaßen wiedergeben könnte, denn nicht nur B , α , D , ω usw. ändern sich mit J in einer einzigen Termreihe, sondern auch die Quantenzahl v .

Durch die Formel von Bengtsson und Olsson konnte eben deshalb eine etwas bessere Übereinstimmung erzielt werden, weil diese durch Verwendung der Kombinationsdifferenzenreihen die Veränderung der Rotationskonstanten einigermaßen berücksichtigt.

Um die Isotopieaufspaltungen der oberen und unteren Zustände voneinander zu trennen, wurden die Vibrations- und Rotationsisotopieeffekte

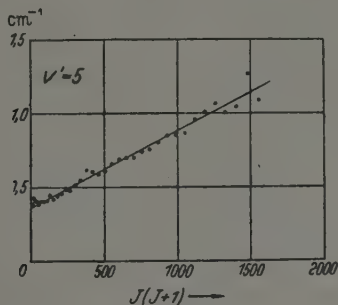


Fig. 19. Isotopieaufspaltung der Rotationstermreihe mit $v' = 5$.

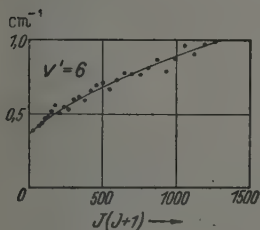


Fig. 20. Isotopieaufspaltung der Rotationstermreihe mit $v' = 6$.

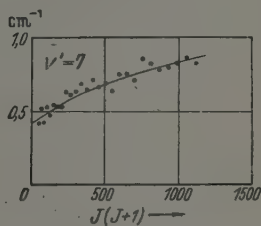


Fig. 21. Isotopieaufspaltung der Rotationstermreihe mit $v' = 7$.

der unteren Zustände berechnet. Mit $\varrho^2 = 0,999830$, $\omega_e = 1759,61 \text{ cm}^{-1}$ und $\omega_e x_e = 33,97 \text{ cm}^{-1}$ erhält man auf Grund der Formel

$$(\Delta\nu_i)_{\text{vibr}} = (1 - \varrho) \omega_e (v + 1/2) - (1 - \varrho^2) \omega_e x_e (v + 1/2)^2$$

die in der Tabelle 20 aufgenommenen Schwingungsisotopieaufspaltungen der Endterme. Die Glieder höheren Grades geben nur eine unbedeutende Korrektur.

Der Rotationsisotopieeffekt wird ganz allgemein durch folgende Formel dargestellt:

$$(\Delta\nu_i)_{\text{rot}}$$

$$= [(1 - \varrho^2) B_e - (1 - \varrho^3) \alpha_1 (v + 1/2) - (1 - \varrho^4) \alpha_2 (v + 1/2)^2 + \dots] J(J+1) - [(1 - \varrho^4) D_e + (1 - \varrho^5) \beta_1 (v + 1/2) + (1 - \varrho^6) \beta_2 (v + 1/2)^2 + \dots] J^2(J+1)^2 + \dots$$

Die B_v -Werte für den unteren AgH-Zustand verlaufen bei kleinen v -Quantenzahlen völlig linear mit v , es ist $B_e = 6,448 \text{ cm}^{-1}$ und $\alpha = 0,201 \text{ cm}^{-1}$. Bei höheren v -Werten vermindert sich aber B_v immer schneller, so daß der Gang mit v durch keine einheitliche Formel gut wiederzugeben ist. Darum wurde so verfahren, daß man durch lineare Extrapolation $B_v^* = B_e - \alpha(v + \frac{1}{2})$ -Werte berechnete, die experimentelle B_v -Werte von diesen subtrahierte und den Rest mit $(1 - \varrho^4)$ multiplizierte. Für D_v konnte

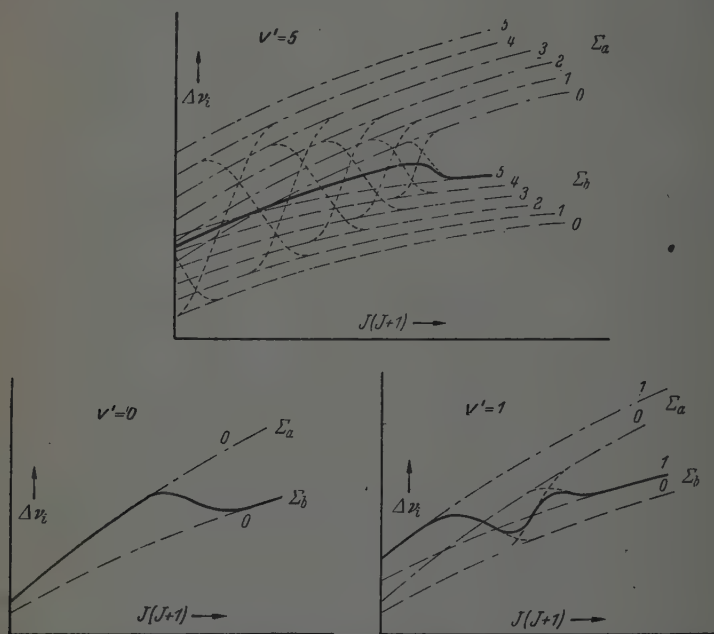


Fig. 22. Beispiele für die Zusammensetzung der tatsächlichen Isotopieaufspaltungen von den Aufspaltungen der gestörten und störenden Terme.

ebenfalls keine Formel aufgestellt werden; es war aber wohl kein bedeutender Fehler, wenn man D_v mit $(1 - \varrho^4) J^2 (J + 1)^2$ multiplizierte. Der ganze Rotationseffekt wurde also auf Grund folgender Näherungsformel berechnet:

$$(\Delta \nu_i)_{\text{rot}} = [(1 - \varrho^2) B_e - (1 - \varrho^3) \alpha (v + \frac{1}{2}) - (B_v^* - B_v) (1 - \varrho^4)] \times \\ \times J (J + 1) - (1 - \varrho^4) D_v J^2 (J + 1)^2.$$

Die Faktoren von $J (J + 1)$ und $J^2 (J + 1)^2$ sind ebenfalls in die Tabelle 20 aufgenommen worden.

Die Isotopieaufspaltungen der oberen Zustände wurden berechnet, indem man die an den Bandenlinien beobachteten Aufspaltungen mit den

berechneten Aufspaltungen ihrer Endterme kombinierte. Da die aus den *R*- und *P*-Zweigen von Banden mit gemeinsamen oberen- und verschiedenen Endzuständen berechneten Term aufspaltungen für die oberen Zustände miteinander sehr gut übereinstimmten, war das Verfahren für die Ermittlung der Endterm aufspaltungen gewissermaßen gerechtfertigt.

Die Fig. 14 bis 21 enthalten die Mittelwerte der Isotopieaufspaltungen der oberen Zustände bei allen *v*- und *J*-Quantenzahlen. Ebenso wie die *B'* — *B''*-Kurven, zeigen auch diese an den Störungsstellen starke Krümmungen (vgl. z. B. Fig. 1 und 14, 2 und 15 usw.). Dies ist auch zu erwarten, denn — wie in der schematischen Fig. 22 für einige typische Fälle dargestellt wurde — die Größe der Isotopieaufspaltung der gestörten Termreihe geht im Laufe der Störung in die der störenden über.

Vorliegende Untersuchung wurde im Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften in Budapest durchgeführt, das einen Teil seiner Ausrüstung dem Naturwissenschaftlichen Forschungsfonds und der Széchenyi-Gesellschaft verdankt.

Bemerkungen zu der Arbeit von Th. Neugebauer: „Der absolute Diamagnetismus der Supraleiter“.

Von K. M. Koch.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 20. Januar 1943.)

Die Einwände, die Neugebauer¹⁾ unlängst gegen meine Erklärung der Vorgänge in einer supraleitenden Hohlkugel vorgebracht hat, richten sich im Grunde genommen nur gegen eine Ungenauigkeit der Ausdrucksweise. Wie ich inzwischen an anderer Stelle ausgeführt habe²⁾, kann beim Aufbau eines Körpers aus supraleitenden Mikrobereichen, die notwendigerweise durch normalleitende Zwischenräume voneinander getrennt sind, nie exakt die Permeabilität 0 erreicht werden, wenn auch der Unterschied vielleicht noch innerhalb der Fehlergrenzen liegt. Man müßte denn annehmen, daß das äußere Feld innerhalb der Mikrobereiche so überkompensiert wird, daß ein negativer Rest verbleibt; dann könnte der Mittelwert der Induktion trotzdem 0 werden. Zur Annahme eines solchen „Ultra-Diamagnetismus“, entsprechend $\mu < 0$, fehlt aber jeder Anhaltspunkt. Ich hätte also betonen müssen, daß in den behandelten Problemen μ nur annähernd gleich 0 ist und lediglich zur Vereinfachung der Rechnung gleich 0 gesetzt wurde. Trotzdem scheint es mir nicht überflüssig, auf die Einwände Neugebauers etwas näher einzugehen. Daß die Formulierung mit $\mu = 0$ zu Mißverständnissen Anlaß gibt, ist ja auch aus den Bemerkungen v. Laues³⁾ zu entnehmen, obgleich dieser Autor den Folgerungen, die ich aus meinen Rechnungen gezogen habe, zustimmt.

1. Vor allem ist es instruktiv, sich zu überzeugen, daß der Unterschied der inneren Feldstärke in Pol- und in Äquatornähe auch dann noch besteht, wenn die Permeabilität zwischen 0 und 1 liegt. In der nachstehenden kleinen Tabelle ist H_i am Pol und am Äquator für einige Werte von μ angegeben, und zwar ist in beiden Fällen der Höchstwert angegeben, der am Pol an der inneren, am Äquator an der äußeren Grenzfläche liegt. Zur Berechnung wurden die Gln. (6) aus⁴⁾ verwendet. Es ist bemerkenswert, daß selbst für $\mu = 0,9$, also wenn 90% des Körpers bereits normalleitend sind, die Feldstärke am Pol noch immer überwiegt.

¹⁾ Th. Neugebauer, ZS. f. Phys. 119, 581, 1942. — ²⁾ K. M. Koch, ebenda 120, 86, 1942. Weiterhin als III. bezeichnet. — ³⁾ M. v. Laue, Phys. ZS. 43, 274, 1942. — ⁴⁾ K. M. Koch, ZS. f. Phys. 118, 1, 1941. Weiterhin als II. bezeichnet.

	$\mu = 0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,9
H_d/H_e { am Pol	6,74	4,16	3,00	2,38	1,93	1,12
am Äquator	1,23	1,16	1,10	1,07	1,06	1,01

Die Überlegungen, die uns zu dem Schluß geführt haben, daß eine Hohlkugel beim Übergang $N \rightarrow S$ nur in einer schmalen Zone zu beiden Seiten des Äquators supraleitend werden könnte, lassen sich aber auch anschaulich darstellen. Wenn wir vom normalleitenden Zustand und einem gegebenen Magnetfeld ausgehen und durch Abkühlung oder Verminderung der Feldstärke den supraleitenden Zustand einzuleiten suchen, so setzt diese Umwandlung, wie ich dies zuletzt (III.) dargelegt habe, zuerst an Keimen von überatomaren Ausmaßen ein, die durch ihr Wachstum einen Abschirmstrom in ihrer Oberfläche induzieren: wir kommen so zu einem Verständnis des Meißner-Ochsenfeld-Effekts. Das Wachstum dieser Keime bzw. der aus ihnen entstehenden Mikrobereiche, ist in der Richtung senkrecht zum Feld durch den elektrodynamischen Druck $\frac{H^2}{8\pi} df$ behindert, es werden also, soweit dies aus räumlichen und strukturellen Gründen möglich ist, nadel-förmige Gebilde entstehen, deren Längsrichtung in die Richtung des Feldes fällt. Denken wir uns nun eine Hohlkugel aus derartigen Nadeln aufgebaut und nehmen wir zunächst — wieder nur zur Vereinfachung — an, daß diese Gebilde im Durchschnitt gleich dick sind. Die Feldverteilung, die sich in den Raum zwischen den Nadeln ergibt, können wir leicht beurteilen. Die zylindrischen Nadeln lassen sich annähernd durch Rotationsellipsoide ersetzen, dann ist die Feldstärke am Äquator, wo sich die Kraftlinien am stärksten zusammendrängen,

$$H_{\text{Äqu}} = \frac{H_e}{1-n}. \quad (1)$$

Hier ist H_e die Intensität des äußeren Feldes und n der Entmagnetisierungsfaktor, der für die Kugel $1/3$, für Ellipsoide dagegen, je nachdem ob $a \geq b$, $\geq 1/3$ ist. Ist also die Erhöhung der Feldstärke am Äquator bei der Kugel durch $H_{\text{Äqu}} = 3/2 H_e$ gegeben, so ist dieser Faktor bei kurzen Ellipsoiden größer, bei länglichen kleiner als $3/2$. Fig. 1 veranschaulicht uns in schematischer Weise, daß die Nadeln am Pol wesentlich kürzer sind als in Äquatornähe. Wir müssen auf Grund unserer Überlegungen demnach in der Gegend des Pols viel größere Feldstärken zwischen den Bereichen erwarten als in Äquatornähe, in Übereinstimmung mit der in (II.) durchgeführten Rechnung. Nun werden die Bereiche im großen und ganzen sicher verschieden dick ausfallen, dann sind aber in Polnähe die dünneren Bereiche begünstigt und

das Ergebnis wird dasselbe sein, nämlich dieses, daß in Polnähe bedeutende normalleitende Zwischenräume entstehen, durch die das äußere Feld ins

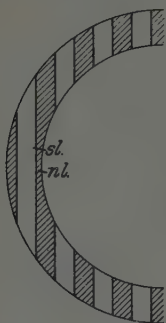


Fig. 1.

Die Figur deutet schematisch die Verteilung der supraleitenden Bereiche in einer Hohlkugel an.

Innere der Hohlkugel eindringen kann, während in einer Ringzone zu beiden Seiten des Äquators der volle Supraleitzustand erreicht wird.

2. Neugebauer hat aber auch darauf hingewiesen, daß die Annahme $\mu = 0$ bei einer *dünnen Platte* in einem zu ihrer Fläche senkrechten Feld zu, wie er meint, ganz paradox hohen Feldstärken führen würde. Versuchen wir uns auch dieses Problem anschaulich zu vergegenwärtigen, so finden wir, daß seine Lösung durchaus plausibel ist. Ebenso wie am Pol der Hohlkugel werden die Bereiche innerhalb der dünnen Platte durch flache Ellipsoide anzunähern sein, so daß wir in den Zwischenräumen tatsächlich sehr hohe Feldstärken erwarten müssen. Für den Entmagnetisierungsfaktor eines flachen Ellipsoides gibt das Handbuch der Physik, Bd. XV, S. 90, die Gleichung

$$4\pi n = A = 4\pi \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^3} \arcsin \varepsilon \right).$$

Dies liefert für $\varepsilon = 0,99$ ($a/b = 10/1$) den Wert $n = 0,77$. In Gl. (1) eingesetzt, gibt das für $H_{\text{Äqu}} \sim 4,3 H_e$. Würde sich die dünne Platte im Magnetfeld genau so benehmen wie die Kugel, so wäre demnach zu erwarten, daß der Zwischenzustand schon bei ganz kleinen Werten von H_e einsetzt und sich bis $H_e = H_k$ erstreckt. Die an sich recht schwierigen und daher nur mit Vorsicht zu beurteilenden Messungen liefern aber ein ganz anderes Ergebnis. Ihnen zufolge wird die Platte nur am Rand voll supraleitend und dort induziert das eingeschaltete Magnetfeld einen Dauerstrom; in der Mitte bleibt sie normalleitend. Dies läßt sich nach Alekseyewski¹⁾ äußerst

¹⁾ N. E. Alekseyewski, Journ. Phys. USSR. 4, 381, 1941.

drastisch nachweisen, indem man den mittleren Teil der Platte entfernt, so daß nur mehr ein Ring übrigbleibt: das magnetische Moment der Platte bleibt dadurch vollkommen ungeändert. Dieser Versuch bestätigt einerseits den Schluß, den wir aus unseren Überlegungen gezogen haben, daß nämlich ein voller Supraleitzustand in einer Platte äußerst unstabil ist, zeigt aber auf der anderen Seite, daß die Dynamik des Übergangs $S \rightarrow N$ nicht mit dem einfachen Schema zu erschöpfen ist, das von London im Anschluß an die Versuchsergebnisse von de Haas und Guinau entwickelt worden ist. Diesem zufolge umgibt sich der Supraleiter beim Einschalten eines Magnetfeldes mit einem makroskopischen Abschirmstrom, der sich bei Überschreitung von H_k am Äquator in viele mikroskopische Teilströme aufteilt. Oder, anders gesagt, der im ganzen im Supraleitzustand befindliche Körper unterteilt sich in sehr viele, aber immer noch aus einer großen Anzahl von Atomen bestehende supraleitende Mikrobereiche, die durch normalleitende Zwischenräume getrennt sind, so daß im Durchschnitt ein $0 < \mu < 1$ resultiert. Dieser Wert von μ ist mit dem jeweiligen äußeren Feld durch die Forderung verknüpft, daß die Feldstärke am Äquator den kritischen Wert nicht überschreiten darf. Nun gilt für $H_{\text{Äqu}}$, wenn $\mu \neq 0$ ist,

$$H_{\text{Äqu}} = \frac{3}{2 + \mu} H_e = H_k; \quad \text{also} \quad \mu = \frac{3 H_e}{H_k} - 2.$$

Es ist schon von Landau¹⁾ mehrfach versucht worden, in diese Überlegungen den Begriff der *Oberflächenspannung* zwischen der normal- und der supraleitenden Phase einzuschalten und damit z. B. Größe und Form der Bereiche zu berechnen. Dagegen ist es noch nicht versucht worden, auch den Übergang vom Makrostrom zu den Mikrobereichen mit der Oberflächenspannung in Beziehung zu setzen. Das Problem ist nicht ganz einfach, weil die Oberflächenspannung des Gesamtkörpers gegen das Vakuum anzusetzen ist, während für die Verteilung der Mikrobereiche, wie schon gesagt, die Oberflächenspannung der beiden Phasen gegeneinander berücksichtigt werden muß. Die Oberflächenspannung bewirkt, darauf hat schon Landau hingewiesen, eine Begünstigung der großen Bereiche gegenüber den kleineren, sie begünstigt aber ebenso den Makrozustand gegenüber den Mikrozuständen. Im nächsten Abschnitt soll gezeigt werden, daß auch die Messungen von Shalnikov an der Hohlkugel für die Begünstigung des Makrozustandes sprechen.

3. Betrachten wir die Kurven (Fig. 2), die nach den Messungen von Shalnikov den Feldverlauf am Äquator und am 60. Parallelkreis einer

¹⁾ L. Landau, Nature **141**, 688, 1938.

Hohlkugel im ansteigenden Feld darstellen. Bis annähernd $H_e = \frac{2}{3} H_k$ zeigen beide Kurven bei einem Versuch an einer unmittelbar vorher im Feld Null abgekühlten Probe den Verlauf, der nur durch einen makroskopischen Abschirmstrom zu erklären ist, also $H_{\text{Äqu}} = \frac{3}{2} H_e$ und $H_{60} = \frac{3}{4} H_e$; genau so, wie es auch bei einer Vollkugel zu erwarten wäre. Wenn nun bei der Überschreitung von $\frac{2}{3} H_k$ (d. h. $H_{\text{Äqu}} = H_k$) die Dinge sich so entwickeln würden, wie es den Vorstellungen über den Zwischenzustand entspricht, so müßten also zunächst Mikrobereiche in einer mehr oder minder gleichmäßigen Verteilung entstehen, die aber an den Polen rasch durch die nach unseren Berechnungen dort auftretende hohe innere Feldstärke zerstört würden, so daß nur ein Ring zu beiden Seiten des

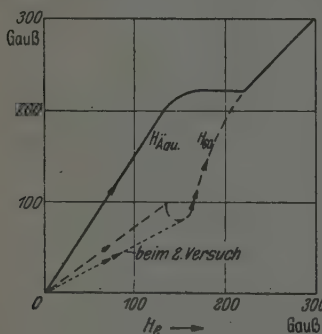


Fig. 2.

Feldstärkenverlauf am Äquator und am 60. Parallelkreis einer supraleitenden Hohlkugel nach den Messungen von Shalnikov.

Äquators die Permeabilität 0 beibehält. (Wir nehmen an, daß die Überschreitung von H_k am Äquator nicht sehr bedeutend ist.) Die Kurve für H_{60} scheint diese Voraussage zu bestätigen, denn sie weist für $H_e = \frac{2}{3} H_k$ einen plötzlichen Abstieg auf, der nur durch eine Abnahme der Abschirmwirkung in der Polgegend erklärt werden kann. Ein analoger Abfall müßte aber auch in der Kurve für $H_{\text{Äqu}}$ zu beobachten sein, denn ein dünnwandiger Ring von $\mu = 0$ kann naturgemäß nicht annähernd die Feldverdrängung ergeben, die einer Vollkugel zukommt. Wir haben überdies einen Maßstab zur Beurteilung, wie tief dieser Abfall von $H_{\text{Äqu}}$ sein müßte, denn Shalnikov hat Messungen an einer Hohlkugel angestellt, die mit einem Schnitt in meridionaler Richtung versehen war. Ein makroskopischer Strom konnte hier kaum mehr auftreten, die beobachtete Feldverteilung kann also nur mehr durch die Feldverdrängung aus der Wandung bedingt sein. Fig. 7 in (II.) zeigt, daß in diesem Fall die Feldstärke am Äquator nur mehr wenig über H_e liegt. Da bei der unverletzten Hohlkugel im Gegensatz dazu nur eine recht geringfügige Abweichung von der für die Vollkugel geltenden

Kurve festzustellen ist, kann bei der Überschreitung von H_k der Makrostrom nicht vollständig zerstört worden sein. Wir könnten annehmen, daß er sich auf eine ringförmige Zone zurückgezogen hat. Damit wäre aber auch der Befund für H_{60} erklärt.

Diese Auslegung findet eine ganz frappante Bestätigung durch die Meßresultate, die wir erhalten, wenn wir zuerst H_e über H_k steigern, dann bis auf Null abnehmen lassen und nun ein zweites Mal den Versuch mit ansteigendem H_e wiederholen. Für $H_{\tilde{A}qu}$ erhalten wir dieselbe Kurve wie beim ersten Mal, dagegen zeigt die Kurve für H_{60} einen so flachen Anstieg (in Fig. 2 punktiert gezeichnet), daß die Einsackung bei $\frac{2}{3} H_k$ umgangen wird. Es ist also kaum zu bezweifeln, daß bei der Wiederholung des Versuches der makroskopische Abschirmstrom sich von vornherein nur mehr in einer Ringzone entwickelt. Für $H_{\tilde{A}qu}$ macht dies, weil der Beitrag der weiter entfernten Strombahnen zur Feldstärke in unmittelbarer Nähe des Äquators zu gering ist, nichts aus, ein eventueller Unterschied fällt in die Grenzen der Meßgenauigkeit! Je näher wir zum Pol kommen, desto bedeutender ist der Unterschied gegenüber dem Erstlingsversuch.

Ich glaube, daß der Hinweis auf diese Versuchsergebnisse genügt, um darzutun, daß die Zerstörung des Makrozustandes nicht ganz nach dem Schema vor sich geht, das London entwickelt hat. Vielleicht genügt es aber, wenn man zunächst einmal annimmt, daß dieses Schema: Übergang von einem Makrozustand mit absoluter Verdrängung des äußeren Feldes aus dem Versuchskörper zu einer Mikrostruktur mit $0 < \mu < 1$, im großen und ganzen richtig und nur durch den Zusatz zu ergänzen ist, daß in den Fällen, in denen eine instabile Mikrostruktur entstehen würde, an ihrer Stelle ein partieller Makrozustand entsteht. Weitere Anhaltspunkte für die Annahme derartiger Zustände liefern die Messungen an supraleitenden Ringen¹⁾, bei denen man beobachtet hat, daß ein durch schrittweises Einschalten des Magnetfeldes induzierter Dauerstrom bei Überschreitung von H_k nicht zerstört wird, sondern lediglich so weit reduziert wird, daß die resultierende Feldstärke immer unterhalb von H_k bleibt. Daneben beweisen die Messungen aber noch das Vorhandensein einer Mikrostruktur, die die Verdrängung des Magnetfeldes aus dem Querschnitt des Ringes bewirkt.

Haben wir also im ersten Teil dieser Ausführungen gezeigt, daß die Einwände Neugebauers gegen die Erklärung der Vorgänge in supra-

¹⁾ Grayson Smith u. Wilhelm, Proc. Roy. Soc. London (A) **157**, 132, 1936. Übersichtliche Darstellung: Shoenberg, Superconductivity, Kap. IV.

leitenden Hohlzylindern und -kugeln unberechtigt sind, so stellt sich im weiteren Verlauf heraus, daß diese Einwände durch den Zwang, das ganze Problem noch einmal durchzudenken, doch auf ergänzende Gesichtspunkte führen und so keinesfalls als unfruchtbar zu bezeichnen sind. Wir haben gesehen, daß die rein schematische Auffassung des Zwischenzustandes ($0 < \mu < 1$) als eines Nebeneinander mikroskopischer normal- und supra-leitender Gebiete, das wir als *Mikrostruktur* bezeichnet haben, zweifellos die Verhältnisse nicht restlos erschöpft, und daß neben oder vielleicht auch statt dieser Mikrostruktur (diese Frage wird noch zu klären sein) ein Zustand möglich ist, bei welchem ein makroskopischer Dauerstrom über einen Teil der Oberfläche des Versuchskörpers fließt. Diesen Zustand, der wahrscheinlich mit strukturellen Unterschieden in dem Teil der Oberfläche, in dem der Dauerstrom fließt und dem übrigen Teil zusammenhängt, haben wir als *partiellen Makrozustand* bezeichnet. Durch die Einschaltung dieses Zustandes zwischen den totalen Makro- und die kontinuierliche Skala der Mikrozustände wird der Einblick in die Dynamik des Überganges $N \rightleftharpoons S$ sicher bereichert.

Berlin, Studiengesellschaft für angewandte Physik.

Zur Struktur des Wassers.

Von **F. I. Havliček**, Zagreb (Kroatien).

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 27. Januar 1943.)

Ausgehend von der Kristallstruktur des Eises und dem Debyeschen Wassermolekül werden die in der vorangehenden Arbeit¹⁾ angenommenen Assoziationen im Wasser modellmäßig untersucht und danach das Verhalten des Wassers im Zusammenhang mit der Erfahrung gedeutet, sowie der Verlauf der inneren Energie nachgerechnet.

In der Untersuchung „Zum Verhalten des spezifischen Volumens von Gasen und Flüssigkeiten“¹⁾ konnte gezeigt werden, daß man durch die Annahme, daß sich im realen Gase Assoziationen von Molekülen zu Gruppen von zweien bis zu sehr vielen bilden, das Verhalten des spezifischen Volumens darstellen kann. An einem besonderen Beispiel, Wasser, ergab sich, daß sich nicht nur die gasförmige, sondern auch die flüssige Phase den verlangten Gesetzmäßigkeiten unterordnet, was dadurch bemerkbar wurde, daß es für den gesamten ausgemessenen Bereich von 1 at bis 300 at und 0° bis 550° C zwei eindeutige Abhängigkeiten gibt. Es entspricht nämlich jedem Wert des Unterschiedes zwischen dem Volumen des realen und dem des idealen Gases z , unter Berücksichtigung des Kovolumens, je ein ganz bestimmter Wert der inneren Energie und ein bestimmter Wert des Unterschiedes zwischen der Entropie des realen und idealen Gases. Ein bestimmter Entropiewert legt nun einen bestimmten Ordnungszustand fest und außerdem ist durch die gemeinsame Abhängigkeit von z diesem Ordnungszustand ein bestimmter Energiebetrag zugeschrieben. Bei der angeführten Untersuchung, die rein phänomenologisch geführt wurde — über die einzelnen Assoziationen selbst wurde nichts Bestimmtes ausgesagt —, blieb der ganze Fragenkomplex über die wirkliche Struktur der Assoziationen und ihren Energieinhalten offen. Es soll im folgenden versucht werden, bei Wasser mit dem vorhandenen experimentellen Material diesen Fragen entgegenzutreten und versucht werden, besonders zwei Forderungen der Théorie zu entsprechen, nämlich die Forderung der Möglichkeit der Assoziationen und der Zunahme der Bindungsenergie pro Molekül mit steigender Zahl der Moleküle, die zu einer Assoziation zusammentreten. Es ist verständlich, daß man sich hierbei mit der richtigen Größenordnung der Effekte begnügen muß, da eine strenge Behandlung derzeit mindestens an der Grenze des Rechenbaren liegt.

¹⁾ F. I. Havliček, ZS. f. Phys. 119, 677, 1942.

Gemäß Stewarts Theorie der Flüssigkeiten¹⁾ und den Untersuchungen von Debye²⁾ und Ulich³⁾ ist mit einer Art kristallinem Gefüge der Flüssigkeiten zu rechnen. Man wird deshalb versuchen, von diesen Kristallen auszugehen, um sich über die Assoziationen ein Bild zu machen. Da man das spezifische Volumen von Wasser und Dampf einheitlich darstellen kann, wird man aber auch die so gewonnenen Ansichten auf den Dampf ausdehnen.

Über die Kristallstruktur des Eises liegen eine Reihe von Untersuchungen vor. Es sind dies besonders die Arbeiten von Bragg⁴⁾, Barnes⁵⁾, Brandenburger⁶⁾ und Bernal und Fowler⁷⁾. Übereinstimmend legen diese Autoren der Eisstruktur das hexagonale Kristallsystem zugrunde und auch für die gegenseitige Lage der Sauerstoffmoleküle herrscht große Übereinstimmung. Bragg gibt die Basiskoordinaten $(0, 0, 0; \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, p; \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}; 0, 0, \frac{1}{2} + p)$ bei einem p von $\frac{1}{8}$, die Achsenlängen betragen bei $a = 4,52 \text{ \AA}$ und $c = 7,32 \text{ \AA}$. Die Basiskoordinaten von Barnes sind $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{16}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{16}; \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{9}{16}; \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{15}{16})$. Bernal und Fowler nehmen eine größere Zelle an mit den Werten $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{16}; \frac{2}{3}, 0, \frac{9}{16}; \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{16}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{9}{16}; 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{16}; 0, \frac{2}{3}, \frac{9}{16}; \frac{2}{3}, 0, \frac{15}{16}; \frac{1}{3}, 0, \frac{7}{16}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{15}{16}; \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{16}; 0, \frac{2}{3}, \frac{15}{16}; 0, \frac{1}{3}, \frac{7}{16})$. Die Zellenabmessungen sind $a = 7,82 \text{ \AA}$, $c = 7,36 \text{ \AA}$.

Zeichnet man die Gitter nach Barnes sowie Bernal und Fowler auf, so lassen sie sich fast identisch ineinander überführen, während das Gitter nach Bragg etwas abweichend gebaut ist, doch durchaus den gleichen Charakter für die Lage der Sauerstoffionen zeigt. Für die folgenden Betrachtungen sei das Gitter der Sauerstoffionen nach Barnes zugrunde gelegt (s. Fig. 1).

Denkt man sich das Gitter über das eingezeichnete sechseckige Prisma durch Aneinanderreihen von weiteren solchen Prismen erweitert, und versucht jetzt nach dem Paulingschen Prinzip die Wasserstoffionen dort unterzubringen, wo zwei Sauerstoffionen zusammenstoßen, so erreicht man eine vollständige Aufteilung der Wasserstoffionen.

Die angegebene Aufteilung der Wasserstoffionen ist durchaus vertretbar, da sie eine durchgehende heteropolare Bindung ermöglicht.

¹⁾ Z. B. W. von Laue, Röntgenstrahleninterferenzen, S. 65. Leipzig 1941.

— ²⁾ Der feste Körper, R. Sänger, Züricher Vorträge 1938, S. 42. Leipzig 1938. — ³⁾ H. Ulich, Physikalische Chemie, S. 353. Dresden, Leipzig 1938. —

⁴⁾ W. H. Bragg, Proc. Phys. Soc. London **34**, 98, 1922; P. B. **4**, 24, 1922, zitiert nach P. P. Ewald, Kristalle und Röntgenstrahlen, S. 303. Berlin 1923. —

⁵⁾ N. Barnes, Proc. Roy. Soc. London (A) **125**, 670, 1928, zitiert nach 7). —

⁶⁾ E. Brandenberger, ZS. f. Kristallogr. **73**, 429, 1930. — ⁷⁾ I. D. Bernal u. N. Fowler, J. Chem. Physics **1**, 515–548, 1933, zitiert nach ZS. f. Kristallogr. Strukturberichte **4**, 114, 1936.

Bernal und Fowler bauen in die von ihnen angegebene Zelle verzerrte Tetraeder ein, bei denen jedes Wassermolekül von vier weiteren umgeben ist. Diese Anordnung ist aber gegenüber den räumlichen Sechsecken komplizierter. Weiter spricht für die Anordnung in Sechsecken die bevorzugte Bindung parallel zur Basisfläche, bei der immer zwei gegenüberliegende Sauerstoffionen heteropolar über ein Wasserstoffion gebunden sind. Senkrecht zur Basisfläche ist nur immer

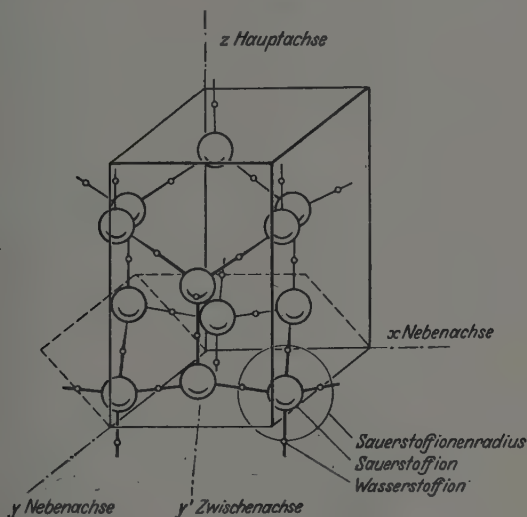


Fig. 1. H_2O -Strukturmodell.

jedes zweite Sauerstoffion auf diese Art gebunden und aus dem Fehlen dieser Bindung sind auch durch elektrostatische Abstoßung die Knicke im Sechseck erklärlich. Die Bevorzugung der horizontalen Bindung findet ein Gegenstück in dem vorzüglich zweidimensionalen Bau der Schneekristalle. Weiter kann für die angegebene starke Bindung die hohe Oberflächenspannung von Wasser sprechen, wenn man sich vorstellt, daß die Wasseroberfläche von einem derartigen Netz oder doch von Stücken solcher Netze gebildet wird¹⁾. In diesem Falle würden die Wasserstoffionen mit den Koordinaten $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4})$ wahrscheinlich hinunterklappen und eine Bindung zwischen den Sauerstoffionen $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \bar{p})$ und $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + p)$

¹⁾ Vielleicht läßt sich experimentell dieses Netz nachweisen. Es treten in ihm zwei ebene Punktgitter auf, und zwar eines in Richtung der Zwischenachse mit der Entfernung $a/2 = 2,26 \text{ \AA}$ und ein doppeltes in Richtung der Nebenachse mit der Entfernung $a \cdot \sqrt{3}/2 = 5,54 \text{ \AA}$ und dem Parameter $1/3$.

herstellen. Es ergibt sich so eine elektrisch negative Fläche, die die starke Adsorption der COOH-Gruppe, mit elektrisch positivem Ende H , an der Oberfläche von Wasser zu erklären imstande ist.

Da die Assoziationen der Moleküle von der Kristallstruktur ausgehend betrachtet werden, so wird man folgerichtig versuchen, durch Abbau des Kristalles in immer kleinere Teile sich ein Bild von den Assoziationen und deren Bindungszahl zu machen.

Ein sehr großer Einkristall wird also nach dem angegebenen Gitter die doppelte Anzahl Bindungen wie Moleküle aufweisen, da jedem Wasserstoffion eine Bindung entspricht und wie bei dem Modell für die Wasseroberfläche auch die äußeren Ionen nach innen geklappt sind. Hierbei wurde von den seitlich außen liegenden Wasserstoffionen abgesehen. Enthält nämlich der Kristall sehr viele Moleküle, so kann man diese sozusagen unabgesättigten Kristallvalenzen für die Bindungszahl vernachlässigen. (Für das Kristallwachstum sind sie wesentlich.) Rechnet man für die innere Bindungsenergie (s. frühere Arbeit) nun zuzüglich der Schmelzwärme rund $12\,200 \text{ cal/Mol}$, so erhält man den Energiebetrag für eine Bindung mit $4,2 \cdot 10^{-13} \text{ erg}$. Die Bindungszahl ist hier $2N$. Der Bindungsfaktor gleich Bindungszahl durch Molekülzahl ist 2.

Als nächstes sei eine Assoziation von drei Dreifachsechsecken, je drei übereinanderliegende Sechsecke, betrachtet, die seitlich aneinandergeheftet sind. Die Molekülzahl beträgt hierbei 54. Die Bindungszahl ist, wie man sich aus Fig. 1 ableitet, 96, wobei zu beachten ist, daß hier immer je fünf äußere Wasserstoffionen nach innen geklappt sind. Der Bindungsfaktor beträgt 1,78. Bei einem Dreifachsechseck ist die Molekülzahl 18 und der Bindungsfaktor 1,67. Im Falle nur zweier übereinandergehefteter Sechsecke ergibt sich der Bindungsfaktor wieder mit 1,5. Bei einem Sechseck ist er 1. Als nächsten Schritt kann man sich nun ein halbes Sechseck vorstellen, der Bindungsfaktor ist hier 0,67. Hängen weiter nur zwei Moleküle zusammen, so wird er 0,5. Für 5 Moleküle wäre eine Tetraederstruktur möglich mit der Bindungszahl 4 und dem Bindungsfaktor 0,8.

Beim umgekehrten Vorgang schrittweiser Assoziation bei Abkühlung von Wasserdampf wird man bei niedrigen Temperaturen eine immer größer werdende Zahl zusammengehefteter Doppelsechsecke erhalten. Beim Erstarren zu Eis aber kommen diese Doppelsechsecke und Gruppen seitlich aneinandergehefteter Doppelsechsecke sehr nahe aneinander, so daß bei teilweisem Zurückklappen der inneren Bindungen durch Wärmebewegung ein Zusammenhaften derselben mit dem nächstliegenden freien Sauerstoffion zustande kommt. Das Gitter weitet sich aber durch die Abstoßung

der Sauerstoffionen hierbei auf und es ergibt sich so zwanglos die Volumenzunahme des Eises gegenüber Wasser von 0° C. Die wirkliche Volumenzunahme beträgt rund 10%, während der Unterschied der Höhe der Elementarzelle des Eiskristalles gegenüber dem vierfachen Sauerstoffionenradius nicht ganz 30% ausmacht. Da aber wegen der Fließeigenschaften des Eises das Kristallgitter beim Nullpunkt sicher nur zum Teil fertig ist und andererseits im Wasser vor dem Gefrieren nicht nur lauter Doppelsechsecke angegebener Art vorhanden sein werden (s. frühere Arbeit), läßt sich der beobachtete Effekt mit der berechneten Volumenzunahme ohne Bedenken vereinbaren. Auch die Erscheinung der Opaleszenz des Dampfes in der Nähe der Sättigungslinie läßt sich dadurch erklären, daß umfangreichere Assoziationen mitverdampfen und das Licht beugen.

Es bleibt nun noch übrig, den Aufbau der Assoziationen aus einzelnen Molekülen modellmäßig zu betrachten. Hierbei sollen nur einfache Vorstellungen rein elektrostatischer Art verwendet werden, wie sie Debye¹⁾ angibt. Betrachtet man zwei dreieckige Wassermoleküle, so errechnet man ihre Bindungsenergie mit rund $4 \cdot 10^{-12}$ erg unter der Voraussetzung, daß das eine Wasserstoffion auf der Verbindungslinie der beiden Sauerstoffionen liegt und die beiden Wasserstoffionen des gebundenen Moleküls auf die andere Seite zu liegen kommen. Wird nun ein weiteres Molekül gebunden, in dem es sich in gleicher Weise an eine der beiden freien Wasserstoffionen des zuerst gebundenen Wassermoleküls hängt, so entsteht durch die Dreieckslage der Ionen im Wassermolekül schon das Modell eines halben Sechsecks, wie es bei dem Kristallbau des Eises angetroffen wird. Die einfache modellmäßige Betrachtung führt also ohne Zusatzannahme zu den erwarteten Ergebnissen.

Die aus den Modellvorstellungen errechnete Bindungsenergie liegt aber um eine Größenordnung über der aus der inneren Energie berechneten. Hierzu läßt sich bemerken, daß bei der Bindungsenergie sicher ein Fehlbetrag aussteht, da das Eis bekanntlich beim Nullpunkt kein durchwegs ausgebildetes Gitter zeigt, also noch nicht die ganze elektrostatisch mögliche Gitterenergie frei geworden ist. Der Fall liegt ähnlich wie bei der Dilatation des Eises. Andererseits ist aber unbedingt damit zu rechnen, daß bei der Bildung der ersten Assoziationen dieselben sich in einem angeregten Zustand befinden werden, so daß nur ein Teil der maximal möglichen Bindungsenergie frei werden kann. Die Diskrepanz der beiden errechneten Werte für die Bindungsenergie läßt sich also qualitativ überbrücken. Wegen der

¹⁾ P Debye, Polare Molekeln, S. 80. Leipzig 1928.

oben angeführten Anregung der Assoziationen mußte auch darauf verzichtet werden, eine genaue Berechnung des Modells derselben durchzuführen.

Schließlich führen diese Untersuchungen zur Deutung des Verlaufs der inneren Energie in Abhängigkeit von dem Unterschied z zwischen dem spezifischen Volumen des realen und idealen Gases.

Der oben besprochene Bindungsfaktor nimmt, wie angegeben, von 0,5 bis 2 zu. Er entspricht also einer Zunahme der spezifischen Bindungsenergie um das Vierfache für das einfache Doppelmolekül gegenüber dem Einkristall. Durch Tangentenanlegung im $Q - z$ -Diagramm der eingangszitierten Arbeit erhält man ein dQ_0/dz von rund 3900 cal/Mol, für $z = 0$. Dies würde aber für $z = 1$, Reduktion des Volumens auf das Kovolumen, einer freiwerdenden Energie derselben Größe entsprechen. Nimmt man nun entsprechend dem Verhältnis der Bindungsfaktoren den vierfachen Wert, so ergibt sich 15 600 cal/Mol, welcher Wert mit dem oben angegebenen für die gesamte innere Energie von 12 200 cal/Mol gut übereinstimmt¹⁾.

Abschließend läßt sich sagen, daß es, ausgehend von der Betrachtung der Kristallstruktur des Eises einerseits und dem Debyeschen Wassermolekülmodell andererseits, möglich ist, das Verhalten des Wassers in vielen Fällen zu deuten und im wesentlichen das Verhalten der inneren Energie richtig zu berechnen.

Zusammenfassung. Ausgehend von der Darstellung der Kristallstruktur des Eises nach Bragg, Barnes, sowie Bernal und Fowler wird im Hinblick auf ein in sich abgesättigtes Gitter ein Gitter der Raumgruppe D_{6h}^4 aufgestellt. Durch modellmäßigen Abbau dieses Gitters werden Modelle für die Assoziationen gewonnen, wobei sich als Hauptbauelement ein Sechseck ergibt. Durch Aufbau einfacher Assoziation aus dreieckigen Debyeschen Wassermolekülen wird das Zustandekommen des Sechsecks gezeigt. Aus den sich so ergebenden Bindungsfaktoren wird der Verlauf der inneren Energie in Abhängigkeit von dem Unterschied z zwischen realem und idealem Medium nachgerechnet. Ferner wird das Verhalten des Wassers aus den Modellvorstellungen gedeutet.

Zagreb, den 19. Januar 1943.

¹⁾ Diese Untersuchungen über den Bindungsfaktor geben, abgesehen von den statistischen Gewichten, die Möglichkeit, die $S_1 - z$ und $Q - z$ -Diagramme direkt numerisch nachzurechnen.

Der Diffusionsthermoeffekt.

Von L. Waldmann in München.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 16. Februar 1943.)

Der Diffusionsthermoeffekt ist in den Arbeiten von Chapman und Enskog enthalten, aber nicht weiter beachtet worden. Eine eingehendere Diskussion zeigte nun, daß der Effekt universell und durchaus meßbar sein mußte und vielleicht gewisse willkommene Anwendungen zuließ. Daraufhin durchgeführte Versuche bestätigten sofort qualitativ die theoretische Voraussage. — Im Teil A dieser Arbeit wird, ausgehend von der Boltzmannschen Fundamentalgleichung, die kinetische Theorie des Effekts möglichst einfach entwickelt. Der Kernpunkt liegt in dem Beweis, daß der Thermodiffusionsstrom und der Diffusionswärmestrom im wesentlichen dem gleichen Koeffizienten, dem Thermodiffusionsfaktor α , proportional sind. Im phänomenologischen Teil B wird zunächst der Temperaturverlauf in Diffusionskammern mit adiabatischen Wänden vollständig berechnet. Der Diffusionswärmestrom ruft Temperaturdifferenzen hervor, welche proportional α sind. Im praktischen Fall isothermer Wände kann nur das Temperaturzeitintegral, eine Funktion allein des Ortes, exakt berechnet werden. Bei der Diffusion von N_2 gegen H_2 dürfen Temperaturunterschiede bis zu 7° erwartet werden, bei der Diffusion von ^{22}Ne gegen ^{20}Ne noch $0,8^\circ$. Danach erscheint es möglich, aus dem Temperaturzeitintegral rückwärts α zu bestimmen, selbst bei Isotopen. Der Vorteil der Methode läge darin, daß man die zu einer ganz bestimmten Temperatur gehörigen α -Werte bekommt. Schließlich wird auf eine gasanalytische Anwendung hingewiesen.

Einleitung.

Der Diffusionsstrom in einem Gasgemisch setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, dem gewöhnlichen, vom Konzentrationsgefälle herrührenden Strom und dem Thermodiffusionsstrom, welcher dem Temperaturgradienten proportional ist. Analog ist zu vermuten, daß auch der Wärmestrom in einem Gasgemisch aus zwei Anteilen besteht, die entsprechend dem Temperatur- und dem Konzentrationsgradienten proportional sind. Diese Vermutung wird durch die kinetische Gastheorie bestätigt. Bei exakter Behandlung des Wärmeleitvorganges in einem binären Gasgemisch¹⁾ ergibt sich tatsächlich auch ein vom Konzentrationsgefälle abhängiger Anteil, der eng verknüpft ist mit dem Thermodiffusionsanteil des Teilchenstroms. Chapman spricht vom „thermal flux of diffusion“; Enskog weist darauf an einer Stelle hin. Eine nähere Untersuchung fand jedoch anscheinend nicht statt.

¹⁾ S. Chapman, Proc. Roy. Soc. London (A) 93, 1917, vor allem S. 11; D. Enskog, Dissertation Upsala 1917; Arkiv Matem. Astron. och Fysik 16, 1921, vor allem S. 44.

Durch Herrn Prof. Clusius mit der Frage bekannt, befaßte ich mich auf Grund der Enskog'schen Arbeit theoretisch damit und zeigte, daß bei der Diffusion zweier Gase ineinander ohne weiteres Temperaturdifferenzen von größenordnungsmäßig 10° zu erwarten sind und der Effekt ein Mittel zur Messung des Thermodiffusionsfaktors bieten könnte. Damit standen theoretisch Existenz und Meßbarkeit des Effekts fest. Daraufhin unternommene Versuche bestätigten sofort qualitativ die Voraussage der Theorie.¹⁾

Der für den Diffusionsthermoeffekt maßgebliche Teil des Wärmestromes ist auf den ersten Blick nicht recht verständlich. Wenn die (eiatomigen) diffundierenden Gase sich zwischen ruhenden Wänden befinden, gehen durch jeden Querschnitt in entgegengesetzten Richtungen pro Zeiteinheit gleich viele Atome insgesamt. Wir nehmen an, es sei kein Temperaturgradient vorhanden. Nach dem Äquipartitionstheorem besitzt dann jedes Atom an jeder Stelle im Mittel die gleiche Energie $\frac{3}{2} k T$, trotz verschiedener Masse; es könnte also, obwohl ein Diffusionsstrom fließt, kein resultierender Energiestrom auftreten. In Wirklichkeit ist dies aber doch der Fall. Der Fehler der Schlußweise liegt in der Voraussetzung der Äquipartition. Gerade die Abweichungen davon machen den Effekt aus, und aus diesem Grund ist es nötig, auf die Methoden der exakten Gastheorie zurückzugehen.

In Teil A dieser Arbeit soll die kinetische Theorie in möglichst einfacher Weise durchgeführt werden und gerade so weit, wie es für das Verständnis des Effekts und die Anwendung erforderlich ist. Die Darstellung ist, wie wir hoffen, so einfach, daß der wesentliche Punkt, der Zusammenhang zwischen dem Thermodiffusions- und dem Diffusionsthermoeffizienten, deutlich zu ersehen ist. — Diesen Zusammenhang kann man auch auf Grund verallgemeinerter thermodynamischer Betrachtungen herleiten, wie sie Meixner, ausgehend von dem Onsager'schen Reziprozitätssatz, durchgeführt hat²⁾. — In Teil B folgt, unabhängig von A lesbar, die phänomenologische Theorie der zu beobachtenden Temperaturerscheinungen.

A. Kinetische Theorie.

Wir schließen uns an die Enskog'sche Fassung an, welche von der Boltzmann'schen Integralgleichung ausgeht.

¹⁾ K. Clusius u. L. Waldmann, *Naturwiss.* **30**, 711, 1942; L. Waldmann, ebenda **31**, 204, 1943. — ²⁾ J. Meixner, *Ann. d. Phys.* **39**, 333, 1941.

I. Fundamentalgleichungen und Lösungsansatz.

Die Atommassen in einem binären Gasgemisch seien mit m und M , die Verteilungsfunktionen mit f und F bezeichnet, derart daß

$$dn = f dr d\omega \quad \text{bzw.} \quad dN = F dr d\omega \quad (1.1)$$

Atome der beiden Sorten im Volumenelement dr mit den Koordinaten x, y, z und im Geschwindigkeitselement

$$d\omega = dc_x dc_y dc_z \quad (1.2)$$

mit den Koordinaten c_x, c_y, c_z sich befinden. Die Atomzahlen pro Volumeneinheit betragen also

$$n = \int f d\omega \quad \text{bzw.} \quad N = \int F d\omega. \quad (1.3)$$

Ferner betrachten wir irgendein Paar zusammenstoßender Atome und nennen die Geschwindigkeiten

$$\left. \begin{array}{ll} \text{vor dem Stoß} & \mathbf{c}, \quad \mathbf{c}', \\ \text{nach dem Stoß} & \mathbf{c}_n, \quad \mathbf{c}'_n. \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

Wenn keine äußeren Kräfte wirken, so lauten die Boltzmannschen Fundamentalgleichungen, welche die zeitliche Änderung der Verteilungsfunktionen geben,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \text{grad } f &= B(f, f) + B(f, F), \\ \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{c} \text{grad } F &= B(F, F) + B(F, f). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Die Größen B beschreiben die Wirkung der Stöße:

$$B(f, F) = \iiint (f_n F'_n - f F') d\omega' d\sigma. \quad (1.6)$$

Darin bedeutet

$$f_n = f(\mathbf{c}_n), \text{ usw.} \quad (1.7)$$

und $d\sigma$ ist gegeben durch

$$d\sigma = |\mathbf{c} - \mathbf{c}'| b db d\varphi. \quad (1.8)$$

b , der Stoßparameter, und das Azimut φ legen, zusammen mit \mathbf{c}, \mathbf{c}' , den Stoß eindeutig fest¹⁾.

Wir machen nun einige vereinfachende Annahmen, die aber keine Einschränkung bedeuten. Wir betrachten zunächst nur stationäre Zustände ($\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} = 0$) und nehmen an, daß Konzentration und Temperatur

¹⁾ L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie I. 3. unverb. Aufl., S. 114, Leipzig 1923. Das Azimut ist hier mit ε bezeichnet.

nur von der x -Koordinate abhängen. Ferner sei der Druck räumlich konstant. Dann wird man für f und F , wenn

$$\gamma = \frac{n}{n+N}, \quad 1-\gamma = \frac{N}{n+N} \quad (1.9)$$

die relativen Konzentrationen der Komponenten bedeuten, einen Ansatz erwarten müssen der Form

$$\left. \begin{aligned} f &= g \left(1 + r \frac{\partial \gamma}{\partial x} + s \frac{\partial T}{T \partial x} \right), \\ F &= G \left(1 + R \frac{\partial (1-\gamma)}{\partial x} + S \frac{\partial T}{T \partial x} \right) = G \left(1 - R \frac{\partial \gamma}{\partial x} + S \frac{\partial T}{T \partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Darin bedeuten g, G die Verteilungsfunktionen im thermodynamischen Gleichgewicht

$$g = n \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}; \quad G = N \left(\frac{M}{2\pi k T} \right)^{3/2} e^{-\frac{E}{kT}}, \quad (1.11)$$

wobei

$$\varepsilon = \frac{m}{2} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2); \quad E = \frac{M}{2} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2). \quad (1.12)$$

Die Klammerausdrücke in (1.10) bedeuten also Korrekturfaktoren, mit denen man die Maxwell-Funktion zu multiplizieren hat. Die Linearität in $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ und $\frac{\partial T}{\partial x}$ ist einleuchtend. Die Entwicklungsfunktionen r, s, R, S hängen von c ab; es sei $r \frac{\partial \gamma}{\partial x}$, usw. $\ll 1$. Das Gas wurde in der nullten Näherung (1.11) als ruhend betrachtet. Dies ist für unseren Zweck gerechtfertigt; durch Wärmeleitung oder Diffusion hervorgerufene, makroskopische Geschwindigkeiten werden proportional zu $\frac{\partial T}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ sein, also nur in die Korrekturglieder eingehen.

2. Gleichungen für die Entwicklungsfunktionen.

Einsetzen von (1.10) in (1.5) ergibt

$$\begin{aligned} -c_x \frac{\partial g}{\partial x} + \dots &= B \left(g r \frac{\partial \gamma}{\partial x} + g s \frac{\partial T}{T \partial x}, g \right) + B \left(g, g r \frac{\partial \gamma}{\partial x} + g s \frac{\partial T}{T \partial x} \right) + \\ &+ B \left(g r \frac{\partial \gamma}{\partial x} + g s \frac{\partial T}{T \partial x}, G \right) + B \left(g, -G R \frac{\partial \gamma}{\partial x} + G S \frac{\partial T}{T \partial x} \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

und eine analoge Gleichung für $c_x \frac{\partial G}{\partial x}$. Die weggelassenen Glieder sind, wegen $r \frac{\partial \gamma}{\partial x}$, usw. $\ll 1$, gegenüber den angeschriebenen vernachlässigbar. Wegen (1.11) sind ferner die Ausdrücke

$$B(g, g) = B(g, G) = B(G, g) = B(G, G) = 0$$

und daher in (2.1) fortgefallen.

Um (2.1) nach $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ und $\frac{\partial T}{\partial x}$ zu ordnen, müssen wir auch $\frac{\partial g}{\partial x}$ nach diesen Größen entwickeln. Nach (1.11) ist

$$\ln g = \ln n - \frac{\varepsilon}{kT} - \frac{3}{2} \ln T + \text{const}$$

und daher

$$\frac{dg}{g} = \frac{dn}{n} + \left(\frac{\varepsilon}{kT} - \frac{3}{2} \right) \frac{dT}{T}. \quad (2.2)$$

Nach (1.9) ist außerdem

$$\ln n = \ln \gamma + \ln (n + N),$$

also

$$\frac{dn}{n} = \frac{d\gamma}{\gamma} + \frac{d(n+N)}{n+N}. \quad (2.3)$$

Wir nehmen räumlich konstanten Druck an:

$$p = (n + N) kT; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2.4)$$

Daher ist

$$\frac{d(n+N)}{n+N} + \frac{dT}{T} = 0. \quad (2.5)$$

Mit (2.3) und (2.5) erhält man aus (2.2)

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \left[\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \left(\frac{\varepsilon}{kT} - \frac{5}{2} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right] \cdot g. \quad (2.6)$$

Entsprechendes gilt für $\frac{\partial G}{\partial x}$.

Nun tragen wir (2.6) in (2.1) ein und setzen die Koeffizienten der Gradienten $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ und $\frac{\partial T}{\partial x}$, welche ja unabhängig voneinander vorschreibbar sind, auf beiden Seiten gleich. Entsprechend verfahren wir mit der Gleichung für $\frac{\partial G}{\partial x}$. Man erhält aus dem Vergleich der Faktoren von $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$:

$$\frac{c_x g}{\gamma} = B(g, r, g) + B(g, g, r) + B(g, r, G) - B(g, G, R), \quad (2.7a)$$

$$\frac{c_x G}{1-\gamma} = B(G, R, G) + B(G, G, R) + B(G, R, g) - B(G, g, r), \quad (2.7b)$$

und aus dem Vergleich der Faktoren von $\frac{\partial T}{\partial x}$:

$$c_x \left(\frac{\varepsilon}{kT} - \frac{5}{2} \right) g = B(g, s, g) + B(g, g, s) + B(g, s, G) + B(g, G, S), \quad (2.8a)$$

$$c_x \left(\frac{\varepsilon}{kT} - \frac{5}{2} \right) G = B(G, S, G) + B(G, G, S) + B(G, S, g) + B(G, g, s). \quad (2.8b)$$

Diese vier Gleichungen bestimmen die Funktionen r, s, R, S . Zu lösen brauchen wir sie nicht. Es genügt uns, allgemeine Ausdrücke für den Diffusions- und Energiestrom zu erhalten und zu diskutieren. Das soll nun geschehen.

3. Diffusions- und Energiestrom.

Wir führen zur Abkürzung die mittleren Geschwindigkeiten u , U ein:

$$nu = \int c_x f d\omega; \quad NU = \int c_x F d\omega. \quad (3.1)$$

Der gesamte Teilchenstrom in der x -Richtung beträgt

$$nu + NU = (n + N)u_T. \quad (3.2)$$

u_T ist die mittlere Teilchengeschwindigkeit des Gases. Konvektionsströmung infolge Schwerkraft soll aber ausgeschlossen sein. In einem mit der Geschwindigkeit u_T mitbewegten System verschwindet der gesamte Teilchenstrom. Der Strom von Teilchen der Masse m bzw. M in diesem System, eben deren Diffusionsstrom, beträgt

$$j = n(u - u_T) = \frac{nN}{n+N}(u - U); \quad J = -j. \quad (3.3)$$

3.1) in (3.3) eingesetzt ergibt unter Benutzung von (1.9)

$$j = \gamma(1 - \gamma) \int c_x \left(\frac{f}{\gamma} - \frac{F}{1 - \gamma} \right) d\omega. \quad (3.4)$$

Der Ausdruck für den Energiestrom lautet

$$q = \int c_x (\varepsilon f + EF) d\omega. \quad (3.5)$$

Ersetzen wir darin f, F gemäß (1.10), so erhalten wir

$$j = \gamma(1 - \gamma) \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x} \cdot \int c_x \left(\frac{gr}{\gamma} + \frac{GR}{1 - \gamma} \right) d\omega + \frac{\partial T}{T \partial x} \cdot \int c_x \left(\frac{gs}{\gamma} - \frac{GS}{1 - \gamma} \right) d\omega \right] \quad (3.6)$$

und

$$q = \frac{\partial T}{T \partial x} \cdot \int c_x (\varepsilon gs + EGS) d\omega + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \cdot \int c_x (\varepsilon gr - EGR) d\omega. \quad (3.7)$$

Das Ziel ist nun, zu zeigen, daß der Faktor von $\frac{\partial T}{T \partial x}$ in (3.6), nämlich das Integral

$$I = \int \left(\frac{c_x g}{\gamma} s - \frac{c_x G}{1 - \gamma} S \right) d\omega, \quad (3.8)$$

welches proportional ist dem Thermodiffusionskoeffizienten, und der Faktor von $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ in (3.7), das Integral

$$II = \int (c_x \varepsilon gr - c_x EGR) d\omega, \quad (3.9)$$

welches proportional ist dem Diffusionsthermoeffizienten, sich aufeinander zurückführen lassen.

4. Zusammenhang von Thermodiffusions- und Diffusionsthermoeffizient.

Die Form der Integrale I und II aus (3. 8) und (3. 9) legt es nahe, die Gleichungen (2. 7a bzw. b) mit s bzw. $-S$ zu multiplizieren, entsprechend die Gleichungen (2. 8a bzw. b) mit r bzw. $-R$ zu multiplizieren und dann jeweils zu addieren und zu integrieren. Mit der Abkürzung

$$\int s B (gr, g) d\omega = J (s, gr, g) \quad (4. 1)$$

erhält man so aus (2. 7)

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{c_x g}{\gamma} s - \frac{c_x G}{1-\gamma} S \right) d\omega \\ &= J (s, gr, g) + J (s, g, gr) + J (s, gr, G) - J (s, g, GR) - \\ & \quad - J (S, GR, G) - J (S, G, GR) - J (S, GR, g) + J (S, G, gr) \end{aligned} \quad (4. 2)$$

und aus (2. 8)

$$\begin{aligned} & \int \left[c_x \left(\frac{\varepsilon}{kT} - \frac{5}{2} \right) gr - c_x \left(\frac{E}{kT} - \frac{5}{2} \right) GR \right] d\omega \\ &= J (r, gs, g) + J (r, g, gs) + J (r, gs, G) - J (R, G, gs) - \\ & \quad - J (R, GS, G) - J (R, G, GS) - J (R, GS, g) + J (r, g, GS). \end{aligned} \quad (4. 3)$$

Wir können nun zeigen, daß die auf den rechten Seiten von (4. 2) und (4. 3) an entsprechenden Plätzen stehenden Integrale einander gleich sind. Es ist nach (4. 1) und (1. 6)

$$J (s, gr, G) = \int s (g_n r_n G'_n - gr G') d\Omega, \quad (4. 4)$$

wo zur Abkürzung

$$d\Omega = d\omega d\omega' d\sigma \quad (4. 5)$$

gesetzt ist. $d\Omega$ ist bei Vertauschung von gestrichenen und ungestrichenen Größen invariant, aber auch bei Vertauschung der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß (Liouvillescher Satz und Energieerhaltung: $|c - c'| = |c_n - c'_n|$). Ferner ist nach dem Energiesatz

$$\varepsilon + \varepsilon' = \varepsilon_n + \varepsilon'_n, \quad \varepsilon + E' = \varepsilon_n + E'_n \text{ usw.}$$

und daher nach (1. 11)

$$gg' = g_n g'_n; \quad g G' = g_n G'_n; \text{ usw.} \quad (4. 6)$$

Durch geeignete Vertauschung folgt somit aus (4. 4) unter Benutzung von (4. 6)

$$J (s, gr, G) = \int g G' (sr_n - sr) d\Omega = \int g G' (rs_n - rs) d\Omega = J (r, gs, G). \quad (4. 7)$$

Setzt man in dieser Relation g an Stelle von G , so erhält man

$$J (s, gr, g) = J (r, gs, g). \quad (4. 8)$$

Ferner ist

$$J(s, g, GR) = \int g G' (s R'_n - s R') d\Omega = \int G g' (R s'_n - R s') d\Omega = J(R, G, gs) \quad (4.9)$$

und mit g, r statt G, R

$$J(s, g, gr) = J(r, g, gs). \quad (4.10)$$

Die Relationen (4.7) bis (4.10) und die entsprechenden, die durch Vertauschung großer und kleiner Buchstaben entstehen, bedeuten tatsächlich, daß die rechten Seiten von (4.2) und (4.3) gliedweise übereinstimmen. Damit haben wir die Beziehung gewonnen

$$\int c_x \left(\frac{gs}{\gamma} - \frac{GS}{1-\gamma} \right) d\omega = \int c_x \left[\left(\frac{\varepsilon}{kT} - \frac{5}{2} \right) gr - \left(\frac{E}{kT} - \frac{5}{2} \right) GR \right] d\omega \quad (4.11)$$

oder

$$\begin{aligned} \int c_x (\varepsilon gr - EGR) d\omega \\ = kT \cdot \int c_x \left(\frac{gs}{\gamma} - \frac{GS}{1-\gamma} \right) d\omega + \frac{5}{2} kT \cdot \int c_x (gr - GR) d\omega. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Diese Beziehung gibt uns nun den Zusammenhang zwischen Thermo-diffusions- und Diffusionsthermoeffizient.

5. Diffusions- und Wärmeleitungsgleichung.

Der vollständige phänomenologische Ausdruck für den Diffusionsstrom lautet:

$$j = -(n + N) D \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \alpha \gamma (1 - \gamma) \frac{\partial T}{T \partial x} \right]. \quad (5.1)$$

D ist der gewöhnliche Diffusionskoeffizient, α der Thermo-diffusionsfaktor. Der Vergleich mit (3.6) zeigt, daß

$$\int c_x \left(\frac{gs}{\gamma} - \frac{GS}{1-\gamma} \right) d\omega = -(n + N) D \alpha. \quad (5.2)$$

Der kinetische Ausdruck für den Energiestrom lautet nach (3.7) unter Benutzung von (4.12) und (5.2) und Fortlassung des $\frac{\partial T}{\partial x}$ proportionalen Gliedes:

$$q = \dots - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \cdot kT \cdot (n + N) D \alpha + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \cdot \frac{5}{2} kT \cdot \int c_x (gr - GR) d\omega. \quad (5.3)$$

Den letzten Term rechts können wir umformen. Nach (3.1), (3.2) und (1.10) ist

$$(n + N) u_T = \frac{\partial \gamma}{\partial x} \int c_x (gr - GR) d\omega + \frac{\partial T}{T \partial x} \int c_x (gs + GS) d\omega.$$

Das ergibt, in (5.3) eingesetzt und unter Einführung des Wärmeleitkoeffizienten λ sowie Benutzung von (2.4),

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \alpha p D \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{5}{2} p u_T. {}^1) \quad (5.4)$$

Der erste Term ist der gewöhnliche Wärmestrom, der zweite Term der für den Effekt maßgebende Diffusionswärmestrom, der letzte bedeutet den Enthalpietransport durch den Gesamtteilchenstrom.

Wir kommen nun zu den Erhaltungsgleichungen zunächst für die Teilchenzahlen und lassen demgemäß die Voraussetzung der Stationarität fallen. Offenbar ist [vgl. (3.1) und (3.3)]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n u}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (j + n u_T) = 0 \quad (5.5)$$

und ebenso

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (-j + N u_T) = 0. \quad (5.6)$$

Durch Addition entsteht

$$\frac{\partial (n + N)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(n + N) u_T] = 0. \quad (5.7)$$

Einsetzen von (5.1) in (5.5) unter Benutzung von (5.7) ergibt

$$(n + N) \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (n + N) D \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \alpha \gamma (1 - \gamma) \frac{\partial T}{T \partial x} \right] \right\} + (n + N) u_T \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0 \quad (5.8)$$

oder mit der Voraussetzung (2.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ D \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \alpha \gamma (1 - \gamma) \frac{\partial T}{T \partial x} \right] \right\} + \\ + D \left[\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \gamma (1 - \gamma) \frac{\partial T}{T \partial x} \right] \frac{\partial T}{T \partial x} + u_T \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Sind die in einem Gasgemisch vorhandenen Temperaturunterschiede nur durch den Diffusionswärmestrom hervorgerufen, so sind sie jedenfalls von der Größenordnung α . Das gleiche gilt auch für die dadurch hervorgerufenen Dichteänderungen und somit für u_T , wenn das Gas zwischen festen Wänden eingesperrt ist. Ohne die Glieder proportional α haben wir daher statt (5.9)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) = 0. \quad (5.10)$$

Die Energieerhaltungsgleichung lautet

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (5.11)$$

¹⁾ Das ist Gl. (138) der Dissertation von Enskog.

Die Energie pro Volumeneinheit Q setzt sich aus Wärmeenergie und kinetischer Energie zusammen:

$$Q = (n + N) \frac{3}{2} k T + (nm + NM) \frac{u_S^2}{2}. \quad (5.12)$$

Darin bedeutet u_S die „Schwerpunktsgeschwindigkeit“

$$(nm + NM) u_S = nm u + NM U. \quad (5.13)$$

Bei Beschränkung auf Glieder 1. Ordnung in α können wir statt (5.12) schreiben

$$Q = (n + N) \frac{3}{2} k T = \frac{3}{2} p \quad (5.14)$$

und statt (5.7)

$$\frac{\partial(n + N)}{\partial t} + (n + N) \frac{\partial u_T}{\partial x} = 0. \quad (5.15)$$

Daraus folgt mit (2.4)

$$\frac{\partial u_T}{\partial x} = - \frac{\partial(n + N)}{(n + N) \partial t} = \frac{\partial T}{T \partial t} - \frac{dp}{p \partial t}. \quad (5.16)$$

Nun setzen wir (5.4) und (5.14) in (5.11) ein und beachten (2.4)¹⁾:

$$\frac{3}{2} \frac{dp}{dt} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha p D \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + \frac{5}{2} p \frac{\partial u_T}{\partial x} = 0$$

oder nach (5.16)

$$\frac{5}{2} (n + N) k \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{dp}{dt} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha p D \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) = 0. \quad (5.17)$$

Mit den Gleichungen (5.10) und (5.17) ist die Grundlage für die phänomenologische Berechnung der bei der Diffusion auftretenden Temperatureffekte gewonnen²⁾.

B. Phänomenologische Theorie.

Wir berechnen den Temperaturverlauf für einen speziellen idealisierten Fall, der aber alles Wesentliche zeigt.

¹⁾ Die Gl. (2.4) gilt an sich auch nicht streng, sondern vernachlässigt das Reibungsglied $-\frac{4\mu}{3} \frac{\partial u_S}{\partial x}$ in p . Dieses ergäbe im Energiestrom einen Beitrag $-\frac{4\mu}{3} u_S \frac{\partial u_S}{\partial x}$, der somit von der Ordnung α^2 und zu vernachlässigen ist. Reibung spielt bei dem Effekt keine Rolle.

²⁾ Wenn $\frac{dp}{dt} = 0$, so ist nach (5.14) die innere Energie pro Volumeneinheit des Gases räumlich und zeitlich konstant, obwohl infolge der Gradienten von T und γ ein Wärmestrom fließt. Dieser setzt sich aber mit dem Konvektionstransport an Enthalpie eben gerade zu einem divergenzfreen Energiestrom (bezogen auf ein ruhendes Koordinatensystem) zusammen.

6. Phänomenologische Grundgleichungen.

Aus (5.10) und (5.17) erhält man unter Verallgemeinerung auf drei Dimensionen

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \operatorname{div} (D \operatorname{grad} \gamma), \quad (6.1)$$

$$\frac{c_p}{v} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{dp}{dt} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T + \alpha p D \operatorname{grad} \gamma). \quad (6.2)$$

Dabei haben wir statt $^{5/2}(n+N)k$, der spezifischen Wärme pro Volumeneinheit bei konstantem Druck für ein einatomiges Gasgemisch, allgemein c_p/v , Molwärme durch Molvolumen, geschrieben¹⁾. Auch die Bedeutung der übrigen Größen sei noch einmal festgestellt: γ ist die relative Konzentration der einen Komponente des Gasgemisches, T die absolute Temperatur, p der Druck, D der Diffusionskoeffizient, λ der Wärmeleitkoeffizient, α der Thermodiffusionsfaktor²⁾.

Wir haben die in (5.9) vorkommenden, α enthaltenden Glieder in (6.1) weggelassen; der Thermodiffusionsstrom, der infolge der verhältnismäßig kleinen, durch die Diffusionswärme hervorgerufenen Temperaturgradienten entsteht, spielt gegenüber dem gewöhnlichen Diffusionsstrom keine Rolle. Bei kleinem $\operatorname{grad} \gamma$ und $\operatorname{grad} T$ würde es ohne diese Vernachlässigung an Stelle von (6.1) lauten [nach (5.9)]

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \operatorname{div} \left\{ D \left[\operatorname{grad} \gamma + \alpha \gamma (1 - \gamma) \frac{1}{T} \operatorname{grad} T \right] \right\}. \quad (6.3)$$

Die Vorzeichen in (6.2) und (6.3) besagen: Ein durch den Diffusionsthermoeffekt erzeugter Temperaturgradient ist so gerichtet, daß der dadurch bewirkte Thermodiffusionsstrom den primären gewöhnlichen Diffusionsstrom verkleinert. Das bedeutet, daß dasjenige Gas, welches bei der Thermodiffusion das kalte Gebiet bevorzugt, sich bei der Diffusion abkühlt.

Ferner sei betont, daß an der Wand die Normalkomponente des Diffusionswärmestroms, des Terms $-\alpha p D \operatorname{grad} \gamma$ in (6.2), exakt ver-

¹⁾ Die Verallgemeinerung von (5.17) auf mehratomige Gase bedürfte freilich eines Beweises. Anmerkung bei der Korrektur: Herr Professor Meixner konnte, wie er mir freundlichst in einem Brief mitgeteilt hat, inzwischen auf Grund der phänomenologischen Methode (vgl. Einleitung) zeigen, daß Gl. (6.2) innerhalb unserer Näherung tatsächlich auch bei mehratomigen Gasgemischen Gültigkeit besitzt. — ²⁾ Die kinetische Theorie bringt in der Abhängigkeit des Effekts von α zum Ausdruck, daß die Diffusionswärme ein Transportphänomen ist und nichts zu tun hat mit dem Joule-Thomson-Effekt oder anderen, auf den Abweichungen vom idealen Gaszustand beruhenden thermodynamischen Erscheinungen. Von einem Zusammenhang könnte man nur insofern sprechen, als letzten Endes in jedem Fall die zwischenmolekularen Kräfte maßgebend sind.

schwindet. Dies ist der Ausdruck für den streng gültigen Satz, daß der Diffusionsvorgang keine Wärmetönung im chemischen Sinne besitzt.

Eine Bemerkung ist auch noch zu machen über das Glied dp/dt in (6. 2). Es fällt weg, wenn p künstlich konstant gehalten wird. Bei festen Wänden erhält man, wegen $\text{grad } p = 0$, durch Integration über das ganze Gasvolumen V unter Benutzung von (5. 14)

$$p = \frac{2}{3V} \int Q dV. \quad (6. 4)$$

Wenn sich also der Energieinhalt des Gases nicht ändert, so fällt das Glied dp/dt exakt weg. Dies ist z. B. bei adiabatischen Wänden der Fall, oder auch, wenn das durch die Diffusionswärme hervorgerufene Temperaturfeld so beschaffen ist, daß durch die Wände ebenso viel Wärme zu- wie abströmt. Für den Temperatúrausgleich innerhalb des Gases ist auch bei festem Volumen c_p maßgebend. Falls aber von außen langsam erwärmt wird, so daß die Teilchendichte $n + N$ räumlich und zeitlich fast konstant bleibt, so wird ($R = \text{Gaskonstante}$)

$$\frac{dp}{dt} = (n + N) k \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{R}{v} \frac{\partial T}{\partial t}$$

und man erhält aus (6. 2)

$$\frac{c_v}{v} \frac{\partial T}{\partial t} \approx \text{div} (\lambda \text{ grad } T + \dots). \quad (6. 5)$$

Dann ist c_v maßgebend. Dies nebenbei. Wir werden im folgenden stets

$$\frac{dp}{dt} = 0 \quad (6. 6)$$

setzen. Die Ausbildung des Diffusionstemperaturfeldes geht dann vor sich, ohne daß irgendwo im Gas ein Energiestrom fließt (vgl. S. 510, Anm. 2). Gewöhnlicher Wärmestrom ($\sim \text{grad } T$) und Diffusionswärmestrom werden überall von dem mit der Verschiebung verbundenen Enthalpietransport genau kompensiert. Beim Temperatúrausgleich in einem einfachen Gas liegen die Verhältnisse entsprechend.

Schließlich werden wir vereinfachend annehmen, daß

$$D, \lambda \text{ und } K = \frac{\lambda v}{c_p} \text{ konstant} \quad (6. 7)$$

sind. Bei Isotopengemischen ist dies jedenfalls zulässig. K ist die Temperaturleitfähigkeit. Wir führen noch die mittlere Gastemperatur T_0 ein und setzen zur Abkürzung

$$\delta T = \frac{pv}{c_p} \alpha \approx T_0 \frac{R}{c_p} \alpha. \quad (6. 8)$$

Mit (6.6) wird dann aus (6.1) und (6.2)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = D \Delta \gamma, \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T + \delta T D \Delta \gamma \doteq K \Delta T + \delta T \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \quad (6.10)$$

Der letzte Term in (6.10) besagt, daß der Diffusionsvorgang eine lokale Temperaturerzeugung vom Betrag $\delta T \frac{\partial \gamma}{\partial t}$ mit sich bringt. — Ein Wort noch zur Druckabhängigkeit. D und K sind proportional $1/p$, δT ist nach (6.8) druckunabhängig. Multipliziert man (6.9) und (6.10) mit p , so erkennt man, daß eine Änderung von p lediglich eine proportionale Änderung des Zeitmaßstabes bewirkt. Die Größe der durch die Diffusionswärme hervorgerufenen Temperatureffekte dagegen sollte exakt druckunabhängig sein, ebenfalls ein charakteristischer Unterschied gegenüber den Effekten der Nichtidealität (vgl. S. 511, Anm. 2).

7. Randwertproblem bei adiabatischen Wänden.

Wir betrachten ein zylindrisches Gefäß mit ebenen Abschlußplatten im Abstand $2l$, welches durch eine in der Mitte (bei $x = 0$) befindliche Jalousie in zwei gleichgroße Kammern geteilt ist (Fig. 1). Jede Kammer

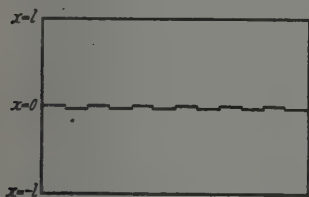


Fig. 1. Vertikalschnitt durch das Diffusionsgefäß.

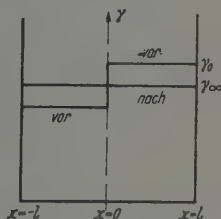


Fig. 2. Verlauf der relativen Konzentrationen vor und lange nach dem Öffnen der Jalousie

sei anfänglich, bei geschlossener Jalousie, mit denselben zwei Gasen bis zu gleichem Gesamtdruck, aber in verschiedener relativer Konzentration gefüllt. An den Wänden verschwindet stets die Normalkomponente des Diffusionsstroms. Dasselbe gilt bei adiabatischen Wänden für den Wärmestrom. Obwohl man in praxi isotherme Wände hat, beschränken wir uns auf den adiabatischen Fall, da bei verschiedenen Randbedingungen für Diffusion und Wärmeleitung die Rechnung erheblich komplizierter wird. Am Ort der Jalousie seien relative Konzentration und Temperatur konstant. — Etwas künstlich kann man den adiabatischen Fall verwirklichen mittels dreier, flacher Kammern, von denen die beiden äußeren mit demselben

Gemisch gefüllt sind. In der Mitte der mittleren Kammer verschwindet dann aus Symmetriegründen der Wärmestrom; die Seitenwände sind bei flachen Kammern ohne großen Einfluß. Diese Anordnung ist aber, worauf mich Herr Prof. Clusius hinwies, nur bei Gasen gleichen Molekulargewichts möglich. — Die Jalousie möge im geöffneten Zustand die Diffusion nicht beeinträchtigen.

Unsere Randwertaufgabe lautet somit nach (6.9) und (6.10):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}, \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \delta T \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad (7.2)$$

mit den Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ (Fig. 2)

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x < l: \quad \gamma = \gamma_0 \\ -l < x < 0: \quad \gamma = \gamma_\infty - (\gamma_0 - \gamma_\infty) \end{array} \right\}; \quad T = T_0 \quad (7.3)$$

und den Randbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} x = 0: \quad \gamma = \gamma_\infty; \quad T = T_0; \\ x = \pm l: \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \end{array} \right\} \quad (7.4)$$

8. Erste Darstellung des Temperaturverlaufs.

Die Lösung von (7.1) mit (7.3) und (7.4) lautet¹⁾

$$\gamma = \gamma_\infty + \delta \gamma \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\nu+1} e^{-\omega_\nu t} \sin \left[(2\nu+1) \frac{\pi x}{2l} \right], \quad (8.1)$$

wobei

$$\delta \gamma = \gamma_0 - \gamma_\infty \quad (8.2)$$

und

$$\omega_\nu = (2\nu+1)^2 \frac{\pi^2 D}{4l^2} \quad (8.3)$$

gesetzt ist.

Für T machen wir den Ansatz

$$T = T_0 + \delta T \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(t) e^{-\chi_\nu t} \sin \left[(2\nu+1) \frac{\pi x}{2l} \right]. \quad (8.4)$$

Dieser Ansatz ergibt, zusammen mit (8.1) in (7.2) eingetragen,

$$\chi_\nu = (2\nu+1)^2 \frac{\pi^2 K}{4l^2} \quad (8.5)$$

und für die Koeffizienten die Gleichungen

$$\frac{da_\nu}{dt} = -\delta \gamma \cdot \frac{4}{\pi} \frac{\omega_\nu}{2\nu+1} e^{(\chi_\nu - \omega_\nu)t}, \quad (8.6)$$

¹⁾ Siehe z. B. Frank-v. Mises, Differentialgleichungen der Physik. II. S. 579. Braunschweig 1935.

wobei wegen (7.8)

$$a_v(t=0) = 0.$$

Durch Integration erhält man

$$a_v = -\delta\gamma \cdot \frac{4}{\pi} \frac{1}{2\nu+1} \frac{\omega_v}{\chi_v - \omega_v} [e^{(\chi_v - \omega_v)t} - 1] \quad (8.7)$$

und wegen

$$\frac{\omega_v}{\chi_v - \omega_v} = \frac{D}{K - D}$$

schließlich

$$T = T_0 - \delta T \delta\gamma \cdot \frac{4D}{\pi(K-D)} \sum_0^\infty \frac{e^{-\omega_v t} - e^{-\chi_v t}}{2\nu+1} \sin\left[(2\nu+1) \frac{\pi x}{2l}\right]. \quad (8.8)$$

Im Fall $D = K$ bekommt man daraus durch Grenzübergang

$$T = T_0 - \delta T \delta\gamma \cdot \frac{4}{\pi} \sum_0^\infty \frac{\omega_v t e^{-\omega_v t}}{2\nu+1} \sin\left[(2\nu+1) \frac{\pi x}{2l}\right] \quad (D = K). \quad (8.9)$$

Aus (8.8) erkennt man, durch Vergleich mit (8.1) und Benutzung von (8.3) und (8.5), daß sich die Temperatur exakt durch die Konzentration so darstellen läßt:

$$T = T_0 - \delta T \frac{D}{K-D} \left[\gamma(t, x) - \gamma\left(t \frac{K}{D}, x\right) \right], \quad (8.10)$$

was man durch Einsetzen in (7.2) mit Benutzung von (7.1) auch direkt bestätigt. Im Fall $D = K$ folgt aus (8.10)

$$T = T_0 + \delta T \cdot t \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (D = K). \quad (8.11)$$

Die Reihe (8.8) konvergiert für alle $t \geq 0$, für kleine t aber recht schlecht. Wir sehen uns deshalb noch nach einer zweiten Darstellung um.

9. Zweite Darstellung des Temperaturverlaufs.

Dazu gehen wir von der Quellenlösung der Diffusionsgleichung aus. Bekanntlich lautet die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

für welche $u(t=0, x)$, aber keine Randbedingungen vorgeschrieben sind, so¹⁾:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{Dt}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t=0, x') e^{-\frac{(x'-x)^2}{4Dt}} dx'. \quad (9.1)$$

¹⁾ S. z. B. Frank-v. Mises, l. c. S. 534.

Wir setzen $u = \gamma - \gamma_\infty$ und haben dann nach (7. 3) die Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} u_{t=0} &= \delta\gamma \quad \text{für} \quad 0 < x < l, \\ u_{t=0} &= -\delta\gamma \quad \text{für} \quad -l < x < 0. \end{aligned} \quad (9. 2)$$

Die exakte Lösung, welche auch die Randbedingungen (7. 4) erfüllt, erhält man, indem man (9. 2) in bekannter Weise durch geeignete Spiegelung über die Intervallgrenzen $\pm l$ hinaus fortsetzt. Bei kleinem t sind aber für das Verhalten von u in der Nähe der Stelle $x = 0$ die Werte von $u_{t=0}$ in größerer Entfernung unwesentlich. Wir erhalten also eine für kleine t und x brauchbare Näherung, wenn wir $u_{t=0}$ über die Intervallgrenzen hinaus konstant fortsetzen:

$$u = \gamma - \gamma_\infty \approx \frac{\delta\gamma}{2\sqrt{Dt}\pi} \left[\int_0^\infty e^{-\frac{(x'-x)^2}{4Dt}} dx' - \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x'-x)^2}{4Dt}} dx' \right].$$

Mit $\frac{x'-x}{2\sqrt{Dt}} = \varphi$ bekommt man daraus

$$\gamma \approx \gamma_\infty + \delta\gamma \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-\varphi^2} d\varphi. \quad (9. 3)$$

Bei genauer Rechnung (Spiegelung!) erhält man eine Reihe, deren erstes Glied eben durch (9. 3) gegeben ist.

Die Temperatur können wir nun sofort mittels (8. 10) berechnen:

$$T \approx T_0 - \delta T \delta\gamma \cdot \frac{D}{K-D} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-\varphi^2} d\varphi \quad (9. 4)$$

und, im Spezialfall $D = K$, mittels (8. 11):

$$T \approx T_0 - \delta T \delta\gamma \cdot \frac{x}{2\sqrt{Dt}\pi} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (D = K) \quad (9. 5)$$

[erstes Glied der mittels der Transformation der Thetafunktion umgeformten Reihe (8. 9)].

Wir wollen noch feststellen, daß in dieser Näherung die Randbedingung, ob adiabatisch oder isotherm, sich nicht bemerkbar macht. Durch Beschränkung auf kurze Zeiten und auf die Gegend nahe an der Diffusionsgrenzschicht ($x = 0$) sowie hinreichend entfernt von Seitenwänden kann man also den mit der isothermen Randbedingung verknüpften, mathematischen Schwierigkeiten aus dem Wege gehen.

Nun können wir den Temperaturverlauf bequem diskutieren und zeichnen. Wir beschränken uns dabei auf den Fall $D = K$, der alles Wesentliche zeigt.

10. Diskussion des Spezialfalls $D = K$.

Mit den Abkürzungen

$$\frac{x}{l} = \xi; \quad \frac{\pi^2 D}{4 l^2} \cdot t = \tau; \quad \frac{T_0 - T}{\delta T \delta \gamma} = \Theta \quad (10.1)$$

hat man nach (8.9) (Abbrechen nach dem ersten Reihenglied)

$$\Theta \approx \frac{4}{\pi} \tau e^{-\tau} \sin\left(\frac{\pi}{2} \xi\right) \quad (\tau \geq 1) \quad (10.2)$$

und nach (9.5)

$$\Theta \approx \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{\xi^2}{\tau}} \frac{\pi^2}{16} \quad (\tau \leq 0,1; \xi \leq 0,2). \quad (10.3)$$

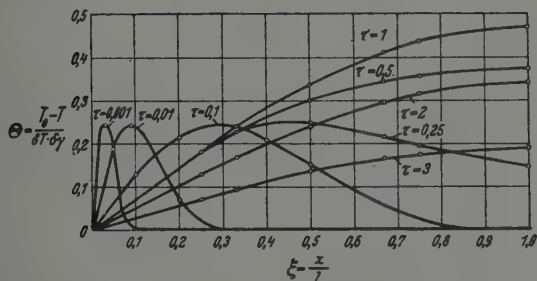


Fig. 3. Räumlicher Temperaturverlauf zu verschiedenen Zeiten. $\tau = \frac{\pi^2 D}{4 l^2} \cdot t$.

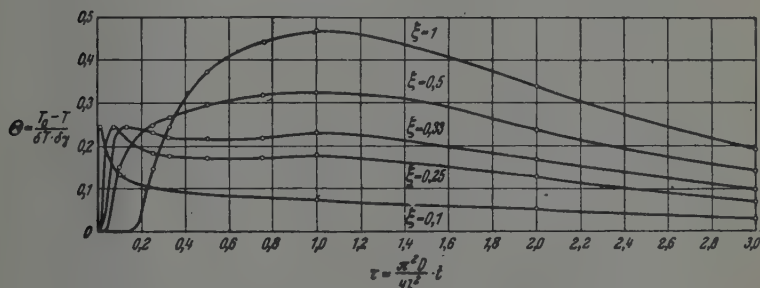


Fig. 4. Zeitlicher Temperaturverlauf an verschiedenen Orten. $\xi = \frac{x}{l}$.

Daraus berechnen sich folgende Maximalwerte

a) $\tau = \text{const}$

$$\left. \begin{aligned} \xi_{\max} &= 1; & \Theta_{\max} &= 1,27 \tau e^{-\tau} & (\tau \geq 1), \\ \xi_{\max} &= 0,90 \sqrt{\tau}; & \Theta_{\max} &= 0,24 & (\tau \leq 0,1). \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

b) $\xi = \text{const}$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{max} &= 1; & \Theta_{max} &= 0,47 \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) & (\xi \geq 0,5), \\ \tau_{max} &= 1,23 \xi^2; & \Theta_{max} &= 0,24 & (\xi \leq 0,2). \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

So erhält man die Fig. 3 und 4, welche das Ansteigen und Wiederabfallen der Temperatur zeigen. Im Bereich $0,1 < \tau < 1$ wurden statt (10.2) zwei Glieder der Reihe (8.9) benutzt.

Wir sehen, daß bei adiabatischen Wänden die Rechnung sich rasch und genau durchführen läßt. Bei isothermen Wänden, im praktisch wichtigsten Fall, dagegen wird sie verwickelt. Daher ist es wesentlich, daß man auch in diesem Fall wenigstens das Zeitintegral der Temperatur exakt berechnen kann, wie wir nun zeigen werden.

11. Das Temperaturzeitintegral.

Statt (6.10) können wir schreiben

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta (T - T_0) + \delta T \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \quad (11.1)$$

Wir integrieren diese Gleichung nach der Zeit von $t = 0$ bis $t = \infty$. Wegen

$$T_{\infty} - T_0 = 0,$$

$$\gamma_{\infty} - \gamma_0 = -\delta \gamma \text{ [vgl. (8.2)]}$$

und mit der Abkürzung

$$\Phi(x, y, z) = \int_0^{\infty} (T - T_0) dt \quad (11.2)$$

für das Temperaturzeitintegral erhalten wir aus (11.1)

$$\Delta \Phi = \frac{\delta T \delta \gamma}{K} = \text{const.} \quad (11.3)$$

Die Diffusionskonstante geht hier bemerkenswerterweise gar nicht ein. Bei adiabatischen Wänden haben wir nach (11.2)

$$(\text{grad } \Phi)_{\text{Rand}} = 0, \quad (11.4)$$

bei isothermen Wänden

$$\Phi_{\text{Rand}} = 0. \quad (11.5)$$

Soviel über das Allgemeine.

Bei der im Abschnitt 7 betrachteten Anordnung ist nach (11.3)

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = \frac{\delta T \delta \gamma}{K}. \quad (11.6)$$

Die Randbedingungen sind

$$\Phi_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_{x=l} = 0.$$

Die Lösung lautet

$$\Phi = \frac{\delta T \delta \gamma}{K} x \left(\frac{x}{2} - l \right). \quad (11.7)$$

Φ erreicht seinen Extremwert bei $x = l$:

$$\Phi_{\text{extrem}} = - \frac{\delta T \delta \gamma}{K} \frac{l^2}{2}. \quad (11.8)$$

Stellen wir die isothermen Randbedingungen

$$\Phi_{x=0} = \Phi_{x=l} = 0,$$

so lautet die Lösung von (11.6)

$$\Phi = \frac{\delta T \delta \gamma}{K} \frac{1}{2} x (x - l). \quad (11.9)$$

Φ erreicht also dann seinen Extremwert bei $x = l/2$:

$$\Phi_{\text{extrem}} = - \frac{\delta T \delta \gamma}{K} \frac{l^2}{8}, \quad (11.10)$$

oder nach der Bedeutung von δT (6.8)

$$\Phi_{\text{extrem}} = - T_0 \frac{l^2}{8 K} \frac{R}{c_p} \alpha \cdot \delta \gamma. \quad (11.11)$$

Dieser Wert ist viermal kleiner als der nach (11.8), infolge der Wärmeableitung an der Wand $x = l$.

Die Gleichung (11.3), mit der Bedingung (11.5), läßt sich auch für zylindrische Diffusionskammern exakt lösen und somit ist die Grundlage für eine genaue Auswertung von Versuchen gegeben¹⁾. Jedoch soll diese Rechnung ausführlich erst in der Fortsetzung dieser Arbeit gegeben werden²⁾.

12. Numerische Beispiele.

Im folgenden bedeute γ den Molenbruch des jeweils zuerst genannten Gases und es mögen stets reine Komponenten ineinander diffundieren, so daß $\gamma_0 = 1$, $\gamma_\infty = 0,5 = \delta \gamma$ in der Kammer, in welcher sich anfänglich das erste Gas befindet. Dieses habe immer den positiven α -Wert, kühlt sich also ab. Für c_p , D und K nehmen wir die nach dem Ausgleich für das Gemisch gültigen Werte. Etwas genauer wäre es allerdings, für jede Kammer einzeln zu mitteln; man würde dann, wenigstens roh, bereits einen Teil der durch die Konzentrationsabhängigkeit der Koeffizienten bewirkten Unsymmetrie des Temperaturfeldes erfassen.

¹⁾ L. Waldmann, l. c. — ²⁾ L. Waldmann. ZS. f. Phys., im Erscheinen.

Nach (10. 5) ist am Ort $x = l$ der adiabatischen Wand $\Theta_{max} = 0,47$, d. h. nach der Bedeutung von δT (6. 8) und von Θ (10. 1)

$$(T - T_0)_{extrem} = -0,47 T_0 \frac{R}{c_p} \alpha \cdot \delta \gamma. \quad (12. 1)$$

In der Nähe der Jalousie, etwa bei $x = 0,1 l$, ist, ebenfalls nach (10. 5) $\Theta_{max} = 0,24$ und daher

$$(T - T_0)_{extrem} = -0,24 T_0 \frac{R}{c_p} \alpha \cdot \delta \gamma. \quad (12. 2)$$

Für den maximalen Temperaturunterschied zu beiden Seiten der Jalousie haben wir danach

$$T_{max} - T_{min} = 0,48 T_0 \frac{R}{c_p} |\alpha \cdot \delta \gamma| \quad (12. 3)$$

oder, mit $T_0 = 2920^\circ \text{K}$, $\delta \gamma = 0,5$,

$$T_{max} - T_{min} = 700 \cdot \frac{R}{c_p} |\alpha|. \quad (12. 4)$$

Nach (10. 5) und (10. 1) wird dieser Extremwert im Abstand $x (\leq 0,2 \cdot l)$ von der Jalousie erreicht nach der Zeit

$$t_{max} = \frac{x^2}{2D}. \quad (12. 5)$$

Handelt es sich um flache Kammern mit isothermen, anstatt adiabatischen Wänden, so ändert sich an (12. 2) und (12. 3) wenig, dagegen wird der zeitliche Extremwert in der Mitte einer Kammer ($x = \frac{l}{2}$) wohl höchstens halb so groß sein wie der aus $\Theta_{max} = 0,47 \sin \frac{\pi}{4} = 0,33$ [vgl. (10. 5)] zu berechnende. Man hätte also für diese Stelle

$$(T - T_0)_{extrem} \approx -0,15 T_0 \cdot \frac{R}{c_p} \alpha \cdot \delta \gamma, \quad (12. 6)$$

das ist weniger als in der Nähe der Jalousie (vgl. 12. 2). Daß es tatsächlich so ist, wurde schon bei Versuchen beobachtet. (12. 6) ist nur bei flachen Kammern ohne merkliche, seitliche Wärmeableitung einigermaßen richtig.

Wir kommen zu den Beispielen.

a) $\text{N}_2 - \text{H}_2$. Bei Zimmertemperatur ist $c_{p, \text{N}_2} = c_{p, \text{H}_2} = 7/2 R$, $D = 0,74 \text{ cm}^2/\text{sec}$, $K_\gamma = 0,5 = 0,72 \text{ cm}^2/\text{sec}$ und $\alpha = 0,36$. Also ist in diesem Fall tatsächlich $\bar{K} \approx D$ und nach (12. 4) $T_{max} - T_{min} = 7,20$. Dieser Wert wird nach (12. 5) im Abstand 1 cm von der Jalousie nach 0,7 sec erreicht.

b) D_2 —He. Bei Zimmertemperatur ist $c_{p,\gamma=0,5} = 3 R$. D und K sind ziemlich verschieden, wir wollen aber davon absehen. Eine Schätzung¹⁾ ergibt $\alpha \approx 0,02$, was nach Trennrohrversuchen glaubhaft erscheint. Damit berechnet man aus (12.4) $T_{max} - T_{min} = 0,47^\circ$.

c) ^{22}Ne — ^{20}Ne . Im Fall der Isotope, wo α , c_p , D und K nun wirklich konstant sind, sind die Voraussetzungen der Theorie am besten erfüllt. Allerdings dürfte man nicht die Annahme $D = K$ machen. Bei Ne ist $K \approx 2D$. Da man für eine genauere Auswertung von Versuchen aber auf alle Fälle das Temperaturzeitintegral, welches von D unabhängig ist, benutzen wird, lohnt sich diese Komplizierung nicht. Es ist für Neon $c_p = 5/2 R$, $\alpha = 0,032$. Das gibt $T_{max} - T_{min} = 0,84^\circ$. Die Temperaturänderungen sind in diesem Fall zu beiden Seiten der Diffusionsfläche genau entgegengesetzt gleich.

13. Anwendungsmöglichkeiten des Effekts.

Durch Messung der maximal auftretenden Temperaturdifferenz oder besser durch Messung des extremalen Temperaturzeitintegrals kann man, wenn alle übrigen Größen bekannt sind, gemäß Gleichung (12.3) bzw. (11.11) auf den Thermodiffusionsfaktor α schließen. Voraussetzung ist, daß keine störende Schwerkongvektion stattfindet. Da der Vorgang bei geeigneter Dimensionierung des Gefäßes eine Dauer von Sekunden hat, wird das Temperaturzeitintegral bei elektrischer Temperaturmessung mit dem ballistischen Galvanometer zu bestimmen sein. Die Größe der zu beobachtenden Temperaturdifferenzen (vgl. die Beispiele in Abschnitt 12) läßt eine hinreichend genaue Bestimmung von α als hoffnungsvoll erscheinen.

Die Methode hätte gegenüber der bisher üblichen Bestimmung von α mittels Thermodiffusion, abgesehen von dem Umstand, daß eine Temperaturmessung einfacher ist als eine Gasanalyse, den weiteren Vorteil, daß man den zu einer ganz bestimmten Temperatur gehörigen α -Wert erhält, während die Thermodiffusionsmethode aus meßtechnischen Gründen stets einen Mittelwert über einen größeren Temperaturbereich liefert. Gerade die Temperaturabhängigkeit von α ist aber vom Standpunkt der kinetischen

¹⁾ Für starr-elastische Atome mit den Massen m , M und den Durchmessern s , S gilt nach Enskog-Chapman

$$\alpha = 0,89 \frac{m - M}{m + M} + 0,34 \frac{s - S}{s + S}. \quad (12.7)$$

Es ist bei D_2 , He $m = M$ und $s_{D_2} \approx 2,7 \cdot 10^{-8}$ cm, $s_{He} \approx 2,1 \cdot 10^{-8}$ cm. Das gibt $\alpha_{starr} = 0,04$; davon ist etwa die Hälfte zu nehmen.

²⁾ A. O. Nier, Phys. Rev. 57, 338, 1940.

Theorie aus interessant. — Eine Bemerkung ist noch zu machen über die Abhängigkeit von der relativen Konzentration. Bei Isotopen sind α , c_p , D und K von γ unabhängig, so daß man ohne weiteres mit großem relativem Konzentrationsunterschied $\delta\gamma$ arbeiten kann. Bei Gemischen verschiedener Gase hängt α von γ ab. Da α in diesen Fällen meist wesentlich größer ist als bei Isotopen, könnte man hier $\delta\gamma$ klein wählen und würde so den zu einer bestimmten Temperatur und bestimmten relativen Konzentration gehörigen α -Wert finden. Gleichzeitig wäre damit die Frage nach der Berücksichtigung der γ -Abhängigkeit von c_p , D und K erledigt.

Damit ist man fast schon bei einer anderen Verwendung des Effekts angelangt. Bei bekanntem α kann man durch Temperaturmessung die anfängliche, relative Konzentrationsdifferenz ermitteln und so den Effekt möglicherweise zur quantitativen Gasanalyse benutzen.

München, Physikalisch-Chemisches Institut der Universität.

Erweiterung der statistischen Theorie des Atoms.

Von Paul Gombás in Kolozsvár (Ungarn).

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 26. Februar 1943.)

Die statistische Theorie des Atoms wird durch die Berücksichtigung der Wechselbeziehung der Elektronen mit antiparallelem Spin erweitert. Im I. Teil der Arbeit wird das erweiterte statistische Atommodell hergeleitet. In diesem unterscheidet sich der Verlauf der Elektronendichte in den Randgebieten des Atoms vom Dichteverlauf des Thomas-Fermi-Diracschen Atoms ziemlich stark, die Randdichte ist um rund 45% größer als im Thomas-Fermi-Diracschen Modell. Im Teil II wird das erweiterte Modell modifiziert, indem wir unter Beibehaltung des neuen Wertes der Randdichte in der erweiterten Gleichung am Atomrand die Summe der Korrektionsglieder durch das Fermi-Amaldische Korrektionsglied ersetzen. Die Lösung dieser modifizierten Gleichung wird für mehrere Atome und Ionen angegeben. Im III. Teil wird gezeigt, daß aus der Wechselbeziehung der Elektronen mit antiparallelem Spin bei der Wechselwirkung von Atomen und Ionen eine zusätzliche Attraktion resultiert. — Die Berücksichtigung der Wechselbeziehung der Elektronen mit antiparallelem Spin wirkt sich auf solche Atomeigenschaften aus, für welche die Randgebiete des Atoms maßgebend sind, und es wird an Hand einiger Beispiele gezeigt, daß man mit der Berücksichtigung dieser Wechselbeziehung bessere Resultate erhält als ohne diese.

Einleitung und Zusammenfassung.

In der ursprünglichen statistischen Theorie des Atoms von Thomas¹⁾ und Fermi²⁾ wurden außer der elektrostatischen Wechselwirkung zwischen dem Kern und dem Elektronengas nur die elektrostatischen Kräfte zwischen den Elektronen in Betracht gezogen, alle weiteren Wechselwirkungen zwischen den Elektronen wurden aber vernachlässigt. Eine wesentliche Weiterentwicklung der Theorie bestand darin, daß Dirac³⁾ auch die Austauschwechselwirkung der Elektronen in die Theorie einbezogen hat. Die Berücksichtigung des Elektronenaustausches gab nicht nur eine konsequente Weiterentwicklung des statistischen Atommodells, sondern man kann zeigen, daß durch diese auch die elektrostatische Selbstwechselwirkung der Elektronen kompensiert wird, die sich in der ursprünglichen Thomas-Fermischen Theorie in den äußeren Gebieten des Atoms in einer zu großen Elektronendichte bemerkbar macht und die durch die elementare Korrektion von Fermi und Amaldi⁴⁾ im Innern des Atoms nicht willkürfrei behoben

¹⁾ L. H. Thomas, Proc. Cambridge Phil. Soc. 23, 542, 1927. —

²⁾ E. Fermi, ZS. f. Phys. 48, 73, 1928. — ³⁾ P. A. M. Dirac, Proc. Cambridge Phil. Soc. 26, 376, 1930. — ⁴⁾ E. Fermi u. E. Amaldi, Mem. Acc. Italia 6, 117, 1934.

wird. Im Thomas-Fermi-Diracschen Modell reicht die Elektronendichte nicht ins Unendliche, sondern bricht bei einem endlichen Radius ab, und es ist für das Thomas-Fermi-Diracsche Modell charakteristisch, daß die Elektronendichte am Rande einen von 0 verschiedenen endlichen Wert besitzt¹⁾, der für alle Atome und Ionen derselbe ist. Der Verlauf der Elektronendichte im äußeren Gebiet des Thomas-Fermi-Diracschen Modells ist wesentlich befriedigender als im Thomas-Fermischen Modell. Allerdings gibt auch die Austauschkorrektur nicht in jeder Hinsicht befriedigende Resultate, denn negative Ionen erweisen sich im Rahmen der Thomas-Fermi-Diracschen Theorie nicht als stabil; die Stabilität dieser Ionen konnte aber von Jensen²⁾ durch eine sinnreiche Kombination der Fermi-Amaldischen und der Austauschkorrektur erzwungen werden.

Außer der elektrostatischen und der Austauschwechselwirkung besteht jedoch zwischen den Elektronen noch eine Art von Wechselwirkung, die in gewisser Beziehung zur Austauschwechselwirkung analog ist. Die Austauschwechselwirkung der Elektronen kann man als eine gegenseitige Abdrängung der Elektronen mit parallelem Spin auffassen; die Austauschenergie ergibt sich dann als eine, zufolge dieser Abdrängung auftretende, elektrostatische Energieverminderung. Zwischen den Elektronen mit antiparallelem Spin besteht eine analoge gegenseitige Abdrängung, aus der ebenfalls eine Energieverminderung resultiert³⁾. Diese Wechselbeziehung der Elektronen mit antiparallelem Spin, mit der wir uns im nächsten Abschnitt ausführlich befassen werden, kann man als einen Polarisierungseffekt im erweiterten Sinne des Wortes betrachten und wir wollen diese Wechselbeziehung kurz Polarisierung und die daraus resultierende Energie Polarisierungsenergie nennen⁴⁾.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, diesen Polarisierungseffekt bzw. die hieraus resultierende Energie in die statistische Theorie des Atoms einzubeziehen. Die Arbeit besteht aus drei Teilen. Im Teil I wird das erweiterte statistische Atommodell hergeleitet. Im Teil II bringen wir am erweiterten Modell eine ganz analoge Modifikation an, wie sie Jensen am Thomas-Fermi-Diracschen Modell durchführte, indem wir in der erweiterten Gleichung am Atomrand statt der Summe der Austauschkorrektur und Polarisierungskorrektur die Fermi-Amaldische Korrektur einführen, aber den neuen Wert der Randdichte des erweiterten Modells beibehalten.

¹⁾ H. Jensen, ZS. f. Phys. 89, 713, 1934; 93, 232, 1935. — ²⁾ H. Jensen, ebenda 101, 141, 1936. — ³⁾ E. Wigner, Phys. Rev. (2) 46, 1002, 1934. — ⁴⁾ Wigner nennt diese Wechselwirkung „correlation“ und die daraus resultierende Energie „correlation energy“.

Im III. Teil wird gezeigt, daß zufolge der Polarisierung bei der Wechselwirkung von Atomen und Ionen eine zusätzliche Attraktion entsteht.

Die Berücksichtigung der Polarisierung führt in der erweiterten Gleichung formal zu einer Erhöhung des Austauschgliedes um rund 13%. Dies führt in den Randgebieten des Atoms zu einer ziemlich starken Änderung der Elektronendichte, und zwar ist die Randdichte — die auch im erweiterten Modell für alle Atome und Ionen gleich ist — um rund 45% gegenüber der Randdichte des Thomas-Fermi-Diracschen Modells erhöht. Im Innern des Atoms bleibt die Elektronendichte praktisch unverändert. Für die Grenzzahlen ergeben sich bis zu 8% kleinere Werte als die von Jensen mit der Randdichte des Thomas-Fermi-Diracschen Modells berechneten. Am stärksten sind im modifizierten Modell die negativen Ionen kontrahiert, bei neutralen Atomen und positiven Ionen ist die relative Kontraktion kleiner und sinkt bei den positiven Ionen im allgemeinen mit zunehmendem Ionisationsgrad.

Die Polarisierung macht sich bei der Berechnung solcher Atomeigenschaften bemerkbar, für welche die äußeren Gebiete des Atoms maßgebend sind. Eine solche ist unter anderem die Ionisierungsenergie. Die Ionisierungsenergien, besonders die erste, werden relativ ziemlich stark, bis zu 20% beeinflusst. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Ionisierungsenergien durch die Polarisierung durchweg vergrößert werden, wodurch sich eine bessere Übereinstimmung mit den empirischen Werten ergibt als ohne Berücksichtigung der Polarisierung. Als weiteres Resultat ergibt sich durch die Berücksichtigung der Polarisierungsenergie bei der Wechselwirkung der Ionen im Rb J-Gitter — wie eine rohe Schätzung zeigt — für die Gitterkonstante ein besserer Wert als ohne Polarisierung und zwar wird die relative Abweichung des berechneten Wertes vom empirischen von 8 auf 5% heruntergedrückt, und würde sich bei der Berücksichtigung der van der Waalsschen Wechselwirkung auf nur etwa 1% verringern.

Wenn man die statistische Methode der Wellenmechanik gegenüberstellt, dann entspricht der Hartreeschen Näherung des „self-consistent field“ das ursprüngliche Thomas-Fermische Modell und der Hartree-Fockschen Näherung das Thomas-Fermi-Diracsche Modell. Die hier gegebene Erweiterung des statistischen Modells durch die Berücksichtigung der Polarisierung geht also über die Hartree-Focksche Näherung hinaus.

1. Teil. Herleitung des erweiterten statistischen Atommodells.

1. Die Wechselbeziehung der Elektronen mit antiparallelem Spin, oder kurz die Polarisierung der Elektronen und die daraus resultierende

Energie wurde für freie Elektronen näherungsweise von Wigner¹⁾ bestimmt. In erster Näherung bestehen zwischen den Elektronen mit antiparallelem Spin keinerlei Beziehungen, man kann diese also in erster Näherung als voneinander unabhängig betrachten. In zweiter Näherung ist dies aber nicht mehr der Fall und man kann zeigen, daß auch zwischen den Elektronen mit antiparallelem Spin Beziehungen bestehen, die sich darin äußern, daß sich die Elektronen gegenseitig abdrängen, daß also diese Elektronen ganz analog wie die Elektronen mit parallelem Spin trachten werden, sich möglichst weit voneinander zu entfernen, woraus gegenüber der elektrostatischen Energie, die man mit einer durchweg konstanten Elektronenverteilung berechnet, eine Energieverminderung — die Polarisationsenergie — resultiert. Für einige Atome kann man diese Energie abschätzen. Für den Grundzustand des He-Atoms erhält man z. B. aus den Hartreeschen bzw. Fockschen Gleichungen, welche in diesem Falle identisch sind und diesem Polarisierungseffekt der Elektronen nicht Rechnung tragen, eine um 1,03 e-Volt höhere Energie²⁾ als die empirische. Diese Energiedifferenz ist im wesentlichen die aus der Wechselbeziehung der beiden Elektronen mit antiparallelem Spin resultierende Polarisationsenergie.

Für ein freies Elektronengas im Grundzustand, in welchem also die Elektronen die tiefstmöglichen Elementarzellen des Phasenraumes paarweise besetzen, wurde die Polarisationsenergie von Wigner angenähert berechnet. Bezüglich der Herleitung des Resultates verweisen wir auf die Originalarbeit von Wigner und geben hier nur das Resultat an. Wigner fand für die Polarisationsenergie pro Elektron, u , folgenden Ausdruck³⁾:

$$u = - \frac{0,288 e^2}{5,1 a_H + r_s}, \quad (1)$$

wo e die positive Elementarladung und a_H den ersten Bohrschen Wasserstoffradius bezeichnet. r_s ist der Radius der 1 Elektron enthaltenden Elementarkugel. Der Fehler des Ausdrucks für u beträgt nach Wigner durchweg weniger als 20%.

Wenn wir die Dichte des Elektronengases mit ν bezeichnen, so folgt aus der Definition von ν

$$\nu = \frac{3}{4\pi r_s^3}, \quad \text{also} \quad r_s = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} \frac{1}{\nu^{1/3}}. \quad (2)$$

¹⁾ E. Wigner, l. c. — ²⁾ H. Bethe, Geiger-Scheels Handb. d. Phys. XXIV/1, 2. Aufl., S. 368 — 371. Berlin, Springer, 1933. — ³⁾ E. Wigner, l. c.; man vgl. hierzu auch F. Seitz, The modern Theory of Solids, S. 342 — 344. New York, London, Mc Graw-Hill Book Company, 1940.

Nach Einsetzen des Ausdrucks von r_s in (1) erhält man u als Funktion von v , und zwar folgt

$$u = -g(v^{1/3}), \quad (3)$$

mit

$$g(v^{1/3}) = \frac{a v^{1/3}}{v^{1/3} + b}, \quad (4)$$

$$a = 0,05647 \frac{\varepsilon^2}{a_H}, \quad b = 0,1216 \frac{1}{a_H}. \quad (5)$$

Man sieht, daß $g(v^{1/3})$ für große v gleich der Konstante a wird, — a ist also die Grenzenergie, der u für große v zustrebt. In der Fig. 1 ist g als Funktion von $v^{1/3}$ dargestellt. Auf der unteren Abszisse ist die Entfernung vom Kern

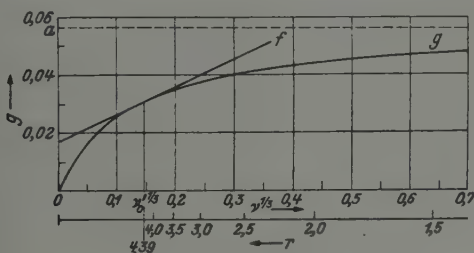


Fig. 1. g als Funktion von $v^{1/3}$.

Obere Abszisse: $v^{1/3}$ in $1/a_H$ -Einheiten.

Untere Abszisse: Abstand vom Kern, r , in einem Xenonatom in a_H -Einheiten.

Ordinate: g in ε^2/a_H -Einheiten.

in einem Xenon-Atom angegeben, bei welcher $v^{1/3}$ den auf der oberen Abszisse angegebenen Wert hat. Auf die Tangente f bei $v^{1/3} = v_0^{1/3}$ kommen wir weiter unten zu sprechen.

Die Dichte der Polarisationsenergie, w , erhält man folgendermaßen:

$$w = -g(v^{1/3}) v, \quad (6)$$

woraus sich für die gesamte Polarisationsenergie der Ausdruck

$$E_w = \int w dv = - \int g(v^{1/3}) v dv \quad (7)$$

ergibt, wo dv das Volumenelement bezeichnet. Hiernach kann man $\frac{1}{\varepsilon} g$ als ein Potential interpretieren und das Entstehen der Energie E_w in der Weise auffassen, daß sich die Elektronen im Potentialfeld $\frac{1}{\varepsilon} g$ befinden.

2. Die Thomas-Fermi-Diracsche Gleichung kann man nach Jensen¹⁾ aus der Variation der Gesamtenergie E des statistischen Atoms mit Berücksichtigung der Nebenbedingung, daß die Gesamtzahl der Elektronen, N , konstant bleiben muß, herleiten. Die erweiterte Gleichung können wir auf dieselbe Weise gewinnen, indem wir zur Energie des Atoms die Polarisationsenergie hinzunehmen.

Die einzelnen Energieterme, aus denen sich die Energie des erweiterten, statistischen Atoms zusammensetzt, sind die folgenden: Die potentielle Energie E_p , die kinetische Nullpunktsenergie E_k , die Austauschenergie E_a und die Polarisationsenergie E_w des Elektronengases. E_w ist durch den Ausdruck (7) gegeben, die Ausdrücke für E_p , E_k und E_a sind die folgenden:

$$E_p = - \int (V_k + \frac{1}{2} V_e) \nu \varepsilon \, d\nu, \quad E_k = n_k \int \nu^{5/3} \, d\nu, \quad E_a = - n_a \int \nu^{4/3} \, d\nu, \quad (8)$$

$$n_k = \frac{6}{5} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \pi^2 \varepsilon^2 a_H, \quad n_a = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} \varepsilon^2, \quad (9)$$

wo $V_k = Z\varepsilon/r$ das Potential des Kernes mit der Ordnungszahl Z , und V_e das Potential der Elektronenwolke bedeutet. r ist die Entfernung vom Kern.

Die Gesamtenergie wird also

$$E = E_p + E_k + E_a + E_w \\ = \int \left\{ - (V_k + \frac{1}{2} V_e) \nu \varepsilon + n_k \nu^{5/3} - n_a \nu^{4/3} + w \right\} d\nu \quad (10)$$

und die Gesamtzahl der Elektronen ist

$$N = \int \nu \, d\nu. \quad (11)$$

Mit Berücksichtigung der Nebenbedingung (11) kann man also das Variationsprinzip folgendermaßen formulieren:

$$\delta (E + V_0 N \varepsilon) = 0, \quad (12)$$

wo V_0 einen Lagrangeschen Multiplikator bezeichnet. Aus diesem Variationsprinzip folgt durch eine Variation hinsichtlich ν die erweiterte Gleichung

$$(V - V_0) \varepsilon - \frac{5}{3} n_k \nu^{2/3} + \frac{4}{3} n_a \nu^{1/3} - \frac{dw}{d\nu} = 0, \quad (13)$$

wo

$$V = V_k + V_e. \quad (14)$$

das Gesamtpotential bedeutet und

$$\frac{dw}{d\nu} = -g - \nu \frac{dg}{d\nu} \quad (15)$$

¹⁾ H. Jensen, ZS. f. Phys. 89, 713, 1934.

ist. Die Modifikation der Gleichung kommt im Glied $dw/d\nu$ zum Ausdruck. Für $dw/d\nu \equiv 0$ erhält man die Thomas-Fermi-Diracsche Gleichung.

Es ist der folgenden halber zweckmäßig, den Ausdruck für $dw/d\nu$ umzuformen, indem man $dg/d\nu$ folgendermaßen schreibt

$$\frac{dg}{d\nu} = \frac{dg}{d(\nu^{1/3})} \frac{d\nu^{1/3}}{d\nu} = \frac{1}{3} \frac{1}{\nu^{2/3}} \lambda(\nu^{1/3}), \quad (16)$$

wo

$$\frac{dg}{d(\nu^{1/3})} = \lambda(\nu^{1/3}) \quad (17)$$

gesetzt wurde und λ den Anstieg der Tangente der Kurve $g(\nu^{1/3})$ bedeutet. Aus (4) folgt

$$\lambda(\nu^{1/3}) = \frac{ab}{(\nu^{1/3} + b)^2}. \quad (18)$$

Mit diesen Bezeichnungen erhält man

$$\frac{dw}{d\nu} = -g - \frac{1}{3} \lambda \cdot \nu^{1/3}. \quad (19)$$

3. Ohne daß man ν aus der Gleichung (18) als Funktion von $V - V_0$ zu berechnen braucht, kann man sehr leicht übersehen, welche Änderung das Glied $dw/d\nu$ am Thomas-Fermi-Diracschen Modell hervorruft. Hierzu nehmen wir an — indem wir eine kugelsymmetrische Elektronenverteilung voraussetzten —, daß auch im erweiterten statistischen Atom die Elektronendichte bei einem endlichen Radius r_0 abbricht und bestimmen diesen Radius bzw. die Elektronendichte bei diesem Radius analog zu Jensen¹⁾ aus der Gleichung

$$\frac{dE}{dr_0} = 0, \quad (20)$$

wobei man zu beachten hat, daß im Ausdruck von E die obere Grenze der Integrationen von r_0 abhängt, was man bei der Differentiation nach r_0 berücksichtigen muß. Da $dv = 4\pi r^2 dr$ ist, folgt

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE}{dr_0} = & 4\pi r_0^2 \left[- (V_k + \frac{1}{2} V_e) \nu \varepsilon + n_k \nu^{3/3} - n_a \nu^{4/3} + w \right]_{r=r_0} + \\ & + \int_0^{r_0} \left\{ \frac{\partial \nu}{\partial r_0} \left[- (V_k + \frac{1}{2} V_e) \varepsilon + \frac{5}{3} n_k \nu^{2/3} - \frac{4}{3} n_a \nu^{1/3} + \frac{dw}{d\nu} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial V_e}{\partial r_0} \nu \varepsilon \right\} 4\pi r^2 dr. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Den auf der rechten Seite stehenden Ausdruck kann man mit Rücksicht darauf, daß ν eine Lösung der Gleichung (13) sein soll, ganz analog wie den

¹⁾ H. Jensen. ZS. f. Phys. 93, 232, 1935.

entsprechenden Ausdruck für das Thomas-Fermi-Diracsche Modell nach Jensen¹⁾ umformen und erhält

$$\frac{dE}{dr_0} = 4\pi r_0^2 \left[-\frac{2}{3} n_k v^{5/3} + \frac{1}{3} n_a v^{4/3} + w - \frac{dw}{dv} v \right]_{r=r_0}. \quad (22)$$

Wenn wir berücksichtigen, daß nach (6) und (19)

$$w - \frac{dw}{dv} v = \frac{1}{3} \lambda v^{4/3} \quad (23)$$

ist, und wenn wir für $v(r_0)$ die Bezeichnung v'_0 einführen und $\lambda (v_0')^{1/3}$ kurz mit λ_0 bezeichnen, so folgt aus (20)

$$4\pi r_0^2 \left(-\frac{2}{3} n_k v_0'^{5/3} + \frac{1}{3} n_a v_0'^{4/3} + \frac{1}{3} \lambda_0 v_0'^{4/3} \right) = 0. \quad (24)$$

Da r_0 nicht 0 ist und da man in unserem Falle von der Lösung $v'_0 = 0$, wie wir sofort sehen werden, absehen kann, folgt für v'_0 die Bestimmungsgleichung

$$v_0'^{1/3} - \frac{n_a}{2n_k} - \frac{\lambda_0}{2n_k} = 0. \quad (25)$$

Für $\lambda_0 = 0$ erhält man den Wert

$$v'_0 = v_0 = \left(\frac{n_a}{2n_k} \right)^3 = 0,002127 \frac{1}{a_H^3}, \quad (26)$$

der mit der Randdichte des Thomas-Fermi-Diracschen Modells gleich ist¹⁾.

Hieraus sieht man, daß die Wurzel $v'_0 = 0$ der Gleichung (24) nicht in Frage kommt, denn der neue v'_0 -Wert muß für $\lambda_0 \rightarrow 0$ in den alten v'_0 -Wert, also in v_0 übergehen, das bei $v'_0 = 0$ nicht der Fall ist und nur dann gewährleistet wird, wenn man v'_0 aus (25) bestimmt.

Wenn man in der Gleichung (25) $v_0'^{1/3}$ als unbekannte Größe betrachtet, so ist (25) eine Gleichung dritten Grades, die man einfach lösen kann. Man erhält

$$v'_0 = 0,003074 \frac{1}{a_H^3}, \quad (27)$$

also einen gegenüber v_0 um rund 45% erhöhten Wert.

Wenn wir die Gleichung (25) in der Form

$$v_0'^{1/3} = \frac{n_a + \lambda_0}{2n_k} = \frac{n'_a}{2n_k} \quad (28)$$

schreiben, woraus

$$v'_0 = \left(\frac{n'_a}{2n_k} \right)^3 \quad (29)$$

¹⁾ H. Jensen, ZS. f. Phys. 93, 232, 1935.

folgt, so sieht man, daß sich die Korrektur formal darin äußert, daß an Stelle von n_a die Konstante

$$n'_a = n_a + \lambda_0 \quad (30)$$

tritt.

4. Statt die Dichteverteilung aus (13) zu bestimmen, können wir einen einfacheren Weg einschlagen und zur Bestimmung der Dichteverteilung eine einfachere Gleichung herleiten, aus der ebenfalls (29) folgt. Da die Korrektur nur in den äußeren Gebieten des Atoms von Wichtigkeit ist und am bedeutendsten am Atomrand, also für $v = v'_0$ wird, kann man $g(v^{1/3})$ durch die Tangente bei $v_0'^{1/3}$ ersetzen, die in Fig. 1 eingezeichnet ist. Diese Tangente kann man folgendermaßen darstellen

$$f = \lambda_0 \cdot v^{1/3} + f_0, \quad (31)$$

wo f_0 die folgende, von v unabhängige Konstante bezeichnet

$$f_0 = g(v_0'^{1/3}) - \lambda_0 \cdot v_0'^{1/3} = 0,01674 \frac{\varepsilon^2}{a_H}. \quad (32)$$

Mit dem Ausdruck (31) folgt

$$w = -\lambda_0 v^{4/3} - f_0 v. \quad (33)$$

Man erhält also für E

$$E = \int \left[-(V_k + \frac{1}{2} V_e) v \varepsilon + n_k v^{5/3} - n'_a v^{4/3} - f_0 v \right] dv. \quad (34)$$

Aus dem Variationsprinzip (12) folgt dann auf dieselbe Weise wie (13) die Gleichung

$$(V - V_0) \varepsilon - \frac{5}{3} n_k v^{2/3} + \frac{4}{3} n'_a v^{1/3} + f_0 = 0. \quad (35)$$

Die Konstante f_0 ist in dieser Gleichung bei der Bestimmung von v ohne jede Bedeutung, denn man kann $\frac{1}{\varepsilon} f_0$ als ein im ganzen Raum konstantes Potential betrachten, das auf die Dichteverteilung keinen Einfluß hat. Man kann $\frac{1}{\varepsilon} f_0$ in die Konstante $-V_0$ aufnehmen. Für $v = v'_0 = \left(\frac{n'_a}{2n_k}\right)^3$ folgt nämlich aus (35)

$$V_0 = \frac{(Z - N) \varepsilon}{r_0} + \frac{n_a'^2}{4n_k \varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} f_0. \quad (36)$$

Wenn man also statt V_0 die Konstante

$$V'_0 = \frac{(Z - N) \varepsilon}{r_0} + \frac{n_a'^2}{4n_k \varepsilon} \quad (37)$$

einführt, so kann man die Gleichung (35) in folgender Form schreiben

$$(V - V'_0) \varepsilon - \frac{5}{3} n_k v^{2/3} + \frac{4}{3} n'_a v^{1/3} = 0, \quad (38)$$

in der f_0 nicht mehr auftritt und die sich von der Thomas-Fermi-Dirac'schen Gleichung nur darin unterscheidet, daß statt n_a überall n'_a steht.

Die Ausdrücke, die sich auf das Thomas-Fermi-Diracsche Modell beziehen, werden also nur insofern abgeändert, daß man statt n_a überall n'_a zu setzen hat, man erhält also für die Randdichte ν'_0 wieder das Resultat (29). Da der vereinfachten Gleichung (38) die Näherung zugrunde liegt, daß wir $g(\nu'^{1/3})$ durch die Tangente bei $\nu'^{1/3}_0$ ersetzen, stimmt die vereinfachte Gleichung mit der exakten Gleichung (13) für $\nu = \nu'_0$ überein, für größere Dichten als ν'_0 besteht aber keine Übereinstimmung. Man kann jedoch der Bestimmung des Dichteverlaufes die vereinfachte Gleichung zugrunde legen. Bei $\nu = \nu'_0$ und in der Umgebung dieses Wertes, also in den äußeren Gebieten des Atoms, wird nämlich $g(\nu'^{1/3})$ sehr gut durch die Tangente f approximiert. Man vgl. hierzu Fig. 1, aus der zu sehen ist, daß die Approximation bis zu $\nu'^{1/3} \cong 2 \nu'^{1/3}_0$, also bis zu etwa 8-mal größeren Elektronendichten als ν'_0 gerechtfertigt ist. Dies bedeutet z. B. beim Xenon-Atom (man vgl. in Fig. 1 die untere Abszisse), daß die Approximation von $r = r_0 = 4,39 a_H$ bis $r \cong 2,5 a_H$, also im ganzen äußeren Bereich des Atoms gut ist. Im Innern des Atoms, wo die Tangente f die Kurve g schlecht annähert, ist die ganze Korrektur durch die Polarisierung gänzlich unbedeutend, denn wie aus den Arbeiten von Jensen¹⁾ folgt, ändert im Innern des Atoms selbst die bedeutend größere Austauschkorrektur den Dichteverlauf praktisch nicht, dieser bleibt also dort praktisch derselbe wie im ursprünglichen Thomas-Fermi-Modell.

Aus der Gleichung (38) folgt für ν

$$\nu = \sigma [(V - V_0 + \tau'^2)^{1/2} + \tau']^3 \quad (39)$$

mit

$$\sigma = \left(\frac{3s}{5n_k} \right)^{3/2}, \quad \tau' = \left(\frac{4n_a'^2}{15n_k s} \right)^{1/2}. \quad (40)$$

Wenn man den Ausdruck von ν in die Poissonsche Gleichung

$$\Delta V = \Delta (V - V_0 + \tau'^2) = 4\pi\epsilon\nu \quad (41)$$

einsetzt, erhält man

$$\Delta (V - V_0 + \tau'^2) = 4\pi\sigma\epsilon [(V - V_0 + \tau'^2)^{1/2} + \tau']^3. \quad (42)$$

Diese Gleichung kann man in eine sehr einfache Form bringen. Hierzu führen wir die Veränderlichen²⁾

$$x = \frac{r}{\mu}, \quad \mu = \frac{1}{(4\pi\sigma)^{2/3}\epsilon Z^{1/3}} = \frac{1}{4} \left(\frac{9\pi^2}{2Z} \right)^{1/3} a_H = \frac{0,8853 a_H}{Z^{1/3}}, \quad (43)$$

$$\psi(x) = \frac{r}{Z\epsilon} (V - V_0 + \tau'^2) \quad (44)$$

¹⁾ H. Jensen, ZS. f. Phys. **89**, 713, 1935. — ²⁾ Man vgl. H. Jensen, G. Meyer-Gossler u. H. Rohde, ebenda **110**, 277, 1938.

und die Konstante

$$\beta' = \tau \left(\frac{\mu}{Z \varepsilon} \right)^{1/2} = \frac{2 n_a'}{3 (4 \pi)^{1/3} \varepsilon^2 Z^{2/3}} = \frac{0,2394}{Z^{2/3}} \quad (45)$$

in, mit denen wir aus (42) die Gleichung

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = x \left[\left(\frac{\psi}{x} \right)^{1/2} + \beta' \right]^3 \quad (46)$$

erhalten. Der einzige Unterschied gegenüber der Thomas-Fermi-Diracschen Gleichung besteht darin, daß die zu n_a' proportionale Konstante β' gegenüber dem früheren Wert

$$\beta = \frac{2 n_a}{3 (4 \pi)^{1/3} \varepsilon^2 Z^{2/3}} = \frac{0,2118}{Z^{2/3}} \quad (47)$$

abgeändert ist.

Aus dem Verhalten des Potentials bei $r = 0$ und $r = r_0$ und aus der Bedingung (11) und (29) folgen für ψ die Randbedingungen

$$\psi(0) = 1, \quad (48)$$

$$\left[\psi - x \frac{d\psi}{dx} \right]_{x=x_0} = \frac{Z - N}{Z}, \quad (49)$$

$$\psi(x_0) = \frac{\beta'^2}{16} x_0, \quad (50)$$

wo $x_0 = r_0/\mu$ ist.

Wie aus den Lösungen der Thomas-Fermi-Diracschen Gleichung hervorgeht, sind negative Ionen in der Thomas-Fermi-Diracschen Theorie nicht stabil¹⁾. Stabile Gebilde ergeben sich nur bis zu einem negativen Ladungsüberschuß von $-0,3 \varepsilon$. Durch die Berücksichtigung der Polarisation wird die Stabilität der negativen Ionen begünstigt, um aber feststellen zu können, ob negative Ionen mit dem negativen Ladungsüberschuß von mindestens $-\varepsilon$ stabil sind, muß man die Gleichung (46) lösen, was zu sehr ausgedehnten numerischen Rechnungen führt²⁾.

Da für die neutralen Atome die Grenzradien x_0 nur von β' abhängen, kann man aus den von Jensen, Meyer-Gossler und Rohde³⁾ mit den Lösungen der Thomas-Fermi-Diracschen Gleichung für die Atome Ar, Kr und X berechneten Werten der Grenzradien die neuen Grenzradien durch Interpolation bestimmen. Man hat dabei darauf zu achten, daß man die Interpolation für die x_0 -Werte und nicht für die r_0 -Werte durchzuführen hat, da $r_0 = \mu x_0$ ist und in μ die Ordnungszahl Z eingeht. r_0 hat man dann

¹⁾ H. Jensen, ZS. f. Phys. 101, 141, 1936. — ²⁾ Mit der Lösung der Gleichung (46) für verschiedene Atome und Ionen wurde an der hiesigen Universität begonnen. — ³⁾ H. Jensen, G. Meyer-Gossler u. H. Rohde, ZS. f. Phys. 110, 277, 1938.

aus den durch Interpolation festgestellten x_0 -Werten durch Multiplikation mit μ zu berechnen. Auf diese Weise erhält man die in der Tabelle 1 angegebenen x_0 - und r_0 -Werte. Zum Vergleich sind auch die von Jensen, Meyer-Gossler und Rohde ohne Polarisierung bestimmten entsprechenden Werte angegeben. Man sieht, daß die neuen Grenzradien um etwa 5 bis 8% kleiner sind als die aus dem Thomas-Fermi-Diracschen Modell berechneten.

Tabelle 1. Grenzradien der Atome Ar, Kr und X.
 r_0 in a_H -Einheiten.

		Ar	Kr	X
Mit Polarisierung	$\{x_0$	12,0	15,5	18,5
	$\{r_0$	4,05	4,16	4,33
Ohne Polarisierung	$\{x_0$	12,7	16,8	20,1
	$\{r_0$	4,29	4,50	4,71

5. Die Polarisationsenergie des Atoms kann man aus (7) berechnen. Den größten Beitrag zu E_w liefern die inneren Gebiete des Atoms, wo ν groß ist. Für große ν kann man aber im Nenner des Ausdruckes von $g(\nu^{1/2})$ [man vgl. (4)] b vernachlässigen und erhält $g(\nu^{1/2}) \cong a$. Es folgt also

$$E_w = -a \int \nu d\nu = -Na = -0,056 N \frac{e^2}{a_H} = -1,5 N \text{ e-Volt.} \quad (51)$$

Die Polarisationsenergie ergibt sich also in dieser Näherung zu N proportional. E_w ist relativ sehr klein und beträgt bei einem Atom von mittlerem Atomgewicht z. B. Kr nur rund $\frac{1}{2} \text{ ‰}$ der Gesamtenergie.

Daß sich E_w im Verhältnis zur Gesamtenergie des Atoms als sehr klein ergibt, bedeutet aber nicht, daß die Polarisationsenergie bei der Berechnung der Ionisationsenergien vernachlässigt werden kann. Den Einfluß der Polarisierung auf die Ionisierungsenergie kann man sehr einfach abschätzen¹⁾. Nach Hulthén²⁾ erhält man nämlich z. B. für die erste Ionisierungsenergie

$$J_1 = \int_{N-1}^N V_0 s dN, \quad (52)$$

wo V_0 den Lagrangeschen Multiplikator (36) bezeichnet, der mit der Konstante V'_0 nicht zu verwechseln ist. Es sei hierbei auch darauf hingewiesen, daß sich aus der exakten Gleichung (18) für V_0 ebenfalls der

¹⁾ Auf Grund der Formel (51) würde man diesen Einfluß zu hoch schätzen, denn diese Formel wurde für große ν hergeleitet und dementsprechend $g \cong a$ gesetzt. Bei der Ionisation sind aber die Randgebiete des Atoms von Wichtigkeit, in denen die Voraussetzung $g \cong a$ nicht zutrifft. — ²⁾ L. Hulthén, ZS. f. Phys. 95, 789, 1935.

Ausdruck (36) ergibt, denn die exakte Gleichung stimmt für $\nu = \nu'_0$ mit der Näherungsgleichung (35) überein. Mit (36) erhält man

$$J_1 = \int_{N-1}^N \frac{(Z-N) \varepsilon^2}{r_0} dN + \frac{n_a'^2}{4n_k} + f_0. \quad (53)$$

Zur Abschätzung des Einflusses der Polarisierung vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem Ausdruck, der aus dem Thomas-Fermi-Diracschen Modell folgt. In dem ist das erste Glied auf der rechten Seite formal dasselbe wie bei uns, man hat aber dabei zu beachten, daß sich r_0 durch die Polarisierung verkleinert, daß also in unserem Falle dieses Glied etwas größer wird als ohne Polarisierung. Im zweiten Glied äußert sich die Polarisierung darin, daß statt n_a das größere n_a' steht. Das dritte Glied auf der rechten Seite von (53) fehlt, wenn man die Polarisierung vernachlässigt. Der Einfluß der Polarisierung wird zum größten Teil durch das dritte Glied und durch die Änderung des zweiten Gliedes gegeben, aus denen zusammen eine von Z unabhängige Erhöhung von J_1 um $0,080 \frac{\varepsilon^2}{a_H} = 0,81$ e-Volt resultiert. Zur genauen Berechnung des Einflusses der Polarisierung auf das erste Glied auf der rechten Seite müßte man r_0 als Funktion von $Z - N$ kennen, man müßte also im Besitz der Lösungen der Gleichung (46) für verschiedene Ionisationsgrade sein. Man kann aber den Einfluß auch ohne die Lösungen ziemlich gut abschätzen. Aus der Tabelle 1 sieht man, daß z. B. für Kr und X der mit Berücksichtigung der Polarisierung berechnete r_0 -Wert um rund 7,5 bzw. 8% kleiner ist als der, den man ohne Polarisierung erhält. Für die positiven Ionen ist — wie man aus den im II. Teil dieser Arbeit erhaltenen Daten der Tabelle 2 sieht — die relative Verkleinerung von r_0 geringer und sinkt mit wachsendem Ionisationsgrad. Auf Grund dieser Resultate und mit Berücksichtigung des Umstandes, daß die relative Kontraktion bei neutralen Atomen für das im II. Teil hergeleitete modifizierte Modell etwas kleiner ist als bei dem hier behandelten nicht modifizierten und dasselbe wahrscheinlich auch für die positiven Ionen zutrifft, können wir hier bei Kr und X zwischen den Integrationsgrenzen $N - 1$ und N für r_0 eine durchschnittliche Verkleinerung von 5 bzw. 4% annehmen. Mit den Daten aus der Arbeit¹⁾ von Hulthén ergibt sich hieraus für Kr und X eine Vergrößerung des ersten Gliedes auf der rechten Seite von (53) um 0,15 bzw. 0,18 e-Volt. Die gesamte Vergrößerung von J_1 durch die Polarisierung beträgt also für Kr und X rund 1 e-Volt.

¹⁾ L. Hulthén, l. c.

Die von Hulthén aus dem Thomas-Fermi-Diracschen Modell ohne Polarisation berechnete erste Ionisierungsenergie beträgt für Kr 5,0 e-Volt und für X 4,8 e-Volt, die Polarisation führt also zu einer bedeutenden Erhöhung von J_1 . Wenn man dies berücksichtigt, so werden die empirischen Ionisierungsenergien durch das berechnete statistische Mittel bedeutend besser angenähert, wie dies aus der Fig. 1 der Arbeit von Hulthén¹⁾ zu sehen ist. Entsprechendes gilt von den höheren Ionisierungsenergien mit dem Unterschied, daß dort die prozentuelle Erhöhung durch die Polarisation kleiner wird.

II. Teil. Modifikation des erweiterten statistischen Atommodells.

6. Wir können das erweiterte statistische Atommodell ganz analog modifizieren, wie dies Jensen²⁾ bei dem Thomas-Fermi-Diracschen Modell getan hat. Diese Modifikation, welche bei Jensen ausführlich diskutiert wurde, besteht kurz darin, daß man in der Thomas-Fermi-Diracschen Gleichung das Austauschglied, das in den Randgebieten des Atoms die elektrostatische Selbstenergie der Elektronen unzureichend kompensiert, am Rande des Atoms durch das Fermi-Amaldische³⁾ Korrektionsglied, $-\frac{1}{N} V_e \epsilon$, ersetzt, im Innern des Atoms aber das Austauschglied beibehält. Durch das Fermi-Amaldische Korrektionsglied wird nämlich gerade am Atomrand die elektrostatische Selbstwechselwirkungsenergie sehr befriedigend eliminiert und es werden auch negative Ionen stabil. Wesentlich bei dieser Modifikation ist, daß Jensen diejenige Eigenschaft des Thomas-Fermi-Diracschen Modells, nach welcher die Randdichte (ohne Polarisation) $v_0 = \left(\frac{n_a}{2n_k}\right)^3$ beträgt, beibehält. Die Lösung der modifizierten Thomas-Fermi-Diracschen Gleichung gestaltet sich sehr einfach, denn man kann diese aus tabelliert vorliegenden Funktionen einfach berechnen.

Wir können in unserem erweiterten Modell eine ganz analoge Modifikation vornehmen, indem wir auf die exakte Gleichung (13) zurückgehen und in dieser die Summe der beiden Korrektionsglieder (Austauschglied $\frac{4}{3} n_a v^{1/3}$ und Polarisationsglied $-dw/dv$) im Innern des Atoms beibehalten, am Atomrand aber durch das Fermi-Amaldische Korrektionsglied $\frac{1}{N} V_e \epsilon$ ersetzen, das am Atomrand in ϵ^2/r übergeht. Man kann dies ganz analog wie die Jensensche Modifikation der Thomas-Fermi-Diracschen

¹⁾ L. Hulthén, l. c. — ²⁾ H. Jensen, ZS. f. Phys. **101**, 141, 1936. —

³⁾ E. Fermi u. E. Amaldi, l. c.

Gleichung begründen, denn erstens ist das Polarisationsglied relativ zum Austauschglied klein, und zweitens hat das Polarisationsglied seinen Ursprung in einem Abdrängungseffekt der Elektronen mit antiparallelem Spin, der analog zum Abdrängungseffekt der Elektronen mit parallelem Spin ist, aus welchem das Austauschglied resultiert. Wir setzen also

$$E_a \cdots E_w = - \int Z(v, r) dv, \quad (54)$$

wo die Funktion $-Z(v, r)$ im Innern des Atoms mit $-n_a v^{1/3} - w$ identisch ist. Das Verhalten von Z am Atomrand kann man aus der modifizierten Gleichung herleiten. Zu dieser gelangt man, wenn man mit (54) den Ausdruck der Gesamtenergie E bildet und diesen in (12) einsetzt. Es ergibt sich analog zu (13)

$$(V - \bar{V}_0) \varepsilon - \frac{5}{3} n_k v^{2/3} + \frac{\partial Z}{\partial v} = 0. \quad (55)$$

Hieraus sieht man, daß $\partial Z / \partial v$ am Atomrand in ε^2/r und für kleinere r (in Übereinstimmung mit der Forderung bezüglich Z) in $\frac{4}{3} n_a v^{1/3} \frac{dw}{dv}$ übergehen muß. Wesentlich ist, daß wir die Bedingung (29), nach welcher bei Berücksichtigung der Polarisation die Randdichte $v'_0 = \left(\frac{n'_a}{2 n_k}\right)^3$ betragen soll, beibehalten. Mit dieser Bedingung folgt aus (55)

$$\bar{V}_0 = \frac{(Z - N + 1) \varepsilon}{r_0} - \frac{5 n_a^2}{12 n_k \varepsilon}. \quad (56)$$

Anstatt den Dichteverlauf aus (55) zu berechnen, können wir diesen aus der Fermi-Amaldischen Gleichung unter Beibehaltung der Bedingung (29) bestimmen, die mit dieser Bedingung praktisch denselben Dichteverlauf liefert wie (55). Die Dichteverteilung wird nämlich durch die Austausch- und Polarisationskorrektur bzw. durch die Fermi-Amaldische Korrektur nur in den äußeren Gebieten des Atoms wesentlich beeinflusst, dort werden aber durch unsere Forderung $\frac{\partial Z}{\partial v} \rightarrow \frac{\varepsilon^2}{r}$ die beiden Korrekturen gleich. Man wird aber die Fermi-Amaldische Gleichung, wie dies auch von Jensen betont wurde, nur zur Bestimmung der Dichteverteilung heranziehen, der Berechnung anderer Atomeigenschaften, insbesondere der Energie, hat man die Gleichung (55) zugrunde zu legen.

Die Fermi-Amaldische Gleichung ist die folgende:

$$(\bar{V} - \bar{V}_0) \varepsilon - \frac{5}{3} n_k v^{2/3} = 0, \quad (57)$$

wo

$$\bar{V} = V_k + \frac{N-1}{N} V_e = V - \frac{1}{N} V_e \quad (58)$$

ist und V_0 mit Rücksicht auf die Bedingung (29) durch (56) definiert ist.

Durch Einführen der neuen Veränderlichen¹⁾

$$x = \frac{r}{\mu}, \quad \bar{\mu} = \left(\frac{N}{N-1} \right)^{2/3} \mu, \quad (59)$$

$$\varphi = \frac{r}{Z_e} (\bar{V} - \bar{V}_0) \quad (60)$$

und Berücksichtigung des Zusammenhanges

$$\frac{N}{N-1} \Delta \bar{V} = \Delta V = 4\pi v \varepsilon \quad (61)$$

kann man die Gleichung (57) in der Form

$$\frac{d^3 \varphi}{dx^3} = \frac{\varphi^{3/2}}{x^{1/2}} \quad (62)$$

schreiben und erhält für v den Ausdruck

$$v = \frac{Z}{4\pi(\bar{\mu})^3} \frac{N}{N-1} \left(\frac{\varphi}{x} \right)^{3/2}. \quad (63)$$

Aus der Definition von φ und aus der Bedingung (11) folgen für φ die Randbedingungen

$$\varphi(0) = 1 \quad \text{und} \quad \left[\varphi - x \frac{d\varphi}{dx} \right]_{x=x_0} = \frac{Z-N+1}{Z}, \quad (64)$$

wo $x_0 = r_0/\bar{\mu}$ ist. Statt der dritten Fermi-Amaldi'schen Randbedingung $\varphi(x_0) = 0$ setzen wir aber die Bedingung (29), die man mit Berücksichtigung von (63) folgendermaßen schreiben kann

$$\varphi(x_0) = \alpha'^2 x_0 \quad (65)$$

mit

$$\alpha' = \frac{5 n_a'}{6 (4\pi)^{1/3} \varepsilon^2} \frac{1}{Z^{2/3}} \left(\frac{N}{N-1} \right)^{1/3} = 0,2993 \frac{1}{Z^{2/3}} \left(\frac{N}{N-1} \right)^{1/3}. \quad (66)$$

Die Berücksichtigung der Polarisierung kommt also dadurch zum Ausdruck, daß an Stelle der von Jensen eingeführten Konstante

$$\alpha = \frac{5 n_a}{6 (4\pi)^{1/3} \varepsilon^2} \frac{1}{Z^{2/3}} \left(\frac{N}{N-1} \right)^{1/3} = 0,2647 \frac{1}{Z^{2/3}} \left(\frac{N}{N-1} \right)^{1/3} \quad (67)$$

die Konstante α' zu setzen ist, also wieder n_a durch n_a' zu ersetzen ist.

7. Die Integration der Gleichung (62) mit den Randbedingungen (64) und (65) kann man nach Jensen²⁾ mit genügender Genauigkeit in der Weise durchführen, daß man

$$\varphi = \varphi_0 + k \eta \quad (68)$$

setzt. Hier ist φ_0 die von verschiedenen Autoren³⁾ tabellierte Lösung der ursprünglichen Thomas-Fermischen Gleichung des neutralen Atoms

¹⁾ E. Fermi u. E. Amaldi, l. c. — ²⁾ H. Jensen, ZS. f. Phys. **101**, 141, 1936. — ³⁾ E. Fermi, ebenda **48**, 73, 1928; Leipziger Vorträge 1928 (Hirzel); V. Bush u. S. H. Caldwell, Phys. Rev. (2) **38**, 1898, 1931; C. Miranda, Mem. Acc. Italia **5**, 285, 1934; E. Baker, Phys. Rev. (2) **36**, 630, 1930.

mit den Randbedingungen $\varphi_0(0) = 1$, $\varphi_0(\infty) = 0$ und mit dem Anstieg $\varphi'_0(0) = -1,588$ der Anfangstangente und η die ebenfalls tabelliert vorliegende Funktion von Fermi¹⁾, die der linearen Differentialgleichung²⁾

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{3}{2} \left(\frac{\varphi_0}{x} \right)^{1/2} \eta \quad (69)$$

mit den Anfangsbedingungen $\eta(0) = 0$, $\left(\frac{d\eta}{dx} \right)_{x=0} = 1$ genügt. k bedeutet eine Konstante, die durch die Randbedingungen festgelegt wird. Da die Funktionen φ_0 und η tabelliert vorliegen, kann man die Lösung der Gleichung (62) für verschiedene Elemente sehr einfach feststellen.

Die Lösungen wurden für die in der Tabelle 2 angegebenen Atome und Ionen bestimmt. Die Werte von k , x_0 und r_0 sind in der Tabelle 2 zusammengestellt. Zum Vergleich sind auch die von Jensen³⁾ ohne Berücksichtigung der Polarisierung bestimmten Werte von x_0 angegeben, woraus man sieht, daß unsere x_0 -Werte kleiner sind als die Jensenschen. Und zwar beträgt die relative Verkleinerung von x_0 bei den negativen Halogen-Ionen durchschnittlich 6,5%, bei den neutralen Edelgasen 4%, bei den einfach ionisierten positiven Alkali-Ionen 3% und bei den zweifach ionisierten positiven Erdalkali-Ionen 2%. Bei den positiven Ionen sinkt die relative Verkleinerung von x_0 mit wachsendem Ionisationsgrad und ist bei Mg^{++} schon kleiner als 1%. Daß der in der Tabelle 2 für Mg^{++} angegebene Jensensche x_0 -Wert mit dem unsrigen übereinstimmt, ist nur eine Folge dessen, daß sowohl Jensen wie wir die letzte Ziffer in x_0 stets abgerundet haben.

Für solche Atome oder Ionen, die in der Tabelle 2 nicht angegeben sind, kann man, wie schon Jensen bemerkte, x_0 durch Interpolation feststellen und k bei diesem x_0 aus dem Zusammenhang (65) einfach bestimmen.

Der von uns bestimmte k -Wert für Ne, der mehrmals kontrolliert wurde, scheint nicht in die Reihe der k -Werte der übrigen Edelgase zu passen, woraus man schließen muß, daß die von X. bis Ar ansteigenden Werte von k zwischen Ar und Ne steil abfallen.

Ein Vergleich unserer k -Werte mit den Jensenschen muß — da bei uns die Elektronen wegen der Verkleinerung von r_0 auf engerem Raum zusammengedrängt sind — zu folgendem Resultat führen: Die k -Werte müssen so beschaffen sein, daß unser φ größer sei als das von Jensen bestimmte. Dies ist auch tatsächlich mit Ausnahme von Cs^+ überall der Fall. Bei Cs^+ haben wir das Jensensche k neu berechnet und statt dem von

¹⁾ E. Fermi, Mem. Acc. Italia 1, 3, 1930. — ²⁾ Diese erhält man, wenn man (68) in (62) einsetzt und die rechte Seite nach Potenzen von $k \eta / \varphi_0$ in eine Reihe entwickelt, die man nach dem zweiten Glied abbricht. — ³⁾ H. Jensen, ZS. f. Phys. 101, 141, 1936.

Tabelle 2. Werte von k , x_0 und r_0 .
 r_0 in a_H -Einheiten.

		F^-	Cl^-	Br^-	J^-
Mit Polarisation	k	$+ 1,35 \cdot 10^{-4}$	$+ 2,88 \cdot 10^{-5}$	$+ 5,01 \cdot 10^{-6}$	$+ 1,82 \cdot 10^{-6}$
	x_0	10,45	13,85	18,80	22,30
	r_0	4,77	4,95	5,19	5,32
Ohne Polarisation	x_0	11,20	14,95	20,00	23,80

		Ne	Ar	Kr	X
Mit Polarisation	k	$- 6,60 \cdot 10^{-6}$	$+ 6,06 \cdot 10^{-6}$	$+ 1,95 \cdot 10^{-6}$	$+ 8,50 \cdot 10^{-7}$
	x_0	8,00	11,05	15,45	18,50
	r_0	3,53	3,88	4,22	4,39
Ohne Polarisation	x_0	8,40	11,50	16,15	19,35

		Na^+	K^+	Rb^+	Cs^+
Mit Polarisation	k	$- 4,43 \cdot 10^{-4}$	$- 7,80 \cdot 10^{-5}$	$- 9,80 \cdot 10^{-6}$	$- 2,81 \cdot 10^{-6}$
	x_0	6,55	9,15	13,10	15,95
	r_0	2,80	3,15	3,55	3,76
Ohne Polarisation	x_0	6,70	9,40	13,50	16,50

		Mg^{++}	Ca^{++}	Sr^{++}	Ba^{++}
Mit Polarisation	k	$- 1,34 \cdot 10^{-3}$	$- 2,57 \cdot 10^{-4}$	$- 3,33 \cdot 10^{-5}$	$- 1,07 \cdot 10^{-5}$
	x_0	5,50	7,80	11,50	14,05
	r_0	2,28	2,64	3,09	3,29
Ohne Polarisation	x_0	5,50	8,00	11,70	14,35

Jensen angegebenen Wert $k = - 0,32 \cdot 10^{-6}$ den Wert $k = - 3,20 \cdot 10^{-6}$ gefunden¹⁾. Im Vergleich zu diesem neuen k -Wert wird nun auch für Cs^+ die bezüglich der k -Werte gestellte Bedingung erfüllt.

Für die mit Berücksichtigung der Polarisation berechnete Elektronenverteilung ergibt sich in den Randgebieten des Atoms ein anderer Verlauf als der ohne Polarisation berechnete. Im Inneren des Atoms wird der Unterschied unbedeutend. Man vgl. hierzu Fig. 2, in der für das Xenon-Atom — um die äußeren Gebiete des Atoms besser hervorzuheben — das r -fache der mit und ohne Polarisation berechneten radialen Elektronendichte $4\pi r r^2$ dargestellt ist.

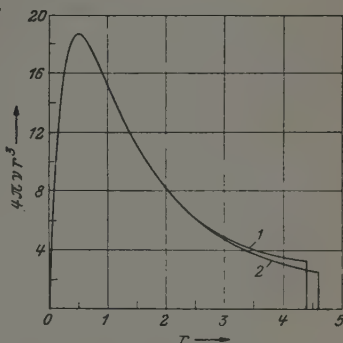
¹⁾ Dieses k entspricht dem Grenzradius $x_0 = 16,45$. Es handelt sich also bei Jensen im Falle des k -Wertes für Cs^+ offenbar um einen Druckfehler und der Wert von x_0 wurde bei Jensen nach oben abgerundet.

Die Änderung der Dichteverteilung durch die Polarisierung wird sich bei der Berechnung solcher Atomeigenschaften bemerkbar machen, bei denen die äußeren Gebiete des Atoms eine Rolle spielen.

Fig. 2.

Vergleich der mit und ohne Polarisierung berechneten Elektronenverteilung für das Xenonatom. In der Figur ist $4\pi r^3$ als Funktion von r dargestellt, Kurve 1 ist mit Polarisierung, Kurve 2 ohne Polarisierung berechnet.

Abszisse: r in a_H -Einheiten.
Ordinate: $4\pi r^3$.



III. Teil. Berücksichtigung der Polarisationsenergie bei der Wechselwirkung von Atomen und Ionen.

8. Die Wechselbeziehung der Elektronen mit antiparallelem Spin bzw. die hieraus resultierende Energie macht sich auch bei der Wechselwirkung von Atomen und Ionen bemerkbar. Bei Berücksichtigung der Polarisierung kommt zum statistischen Ausdruck der Wechselwirkungsenergie zweier Atome oder Ionen, $\delta E_p + \delta E_k + \delta E_a$, noch die Energie

$$\delta E_w = \int [w(v_1 + v_2) - w(v_1) - w(v_2)] dv \quad (70)$$

hinzü, wo v_1 und v_2 die Elektronendichte der beiden Atome oder Ionen bezeichnen¹⁾. Wie man aus (6) sieht, ist δE_w negativ und führt zu einer zusätzlichen Attraktion.

Wenn die Elektronenwolken der beiden Atome nicht stark ineinander eintauchen, wenn sich also nur die Randgebiete der Elektronenwolken überdecken, so kann man die Funktion g wieder durch die Tangente f ersetzen und erhält für die Dichte der Polarisationsenergie den Ausdruck (33). Mit diesem Ausdruck folgt aus (70)

$$\delta E_w = - \lambda_0 \int [(v_1 + v_2)^{4/3} - v_1^{4/3} - v_2^{4/3}] dv. \quad (71)$$

¹⁾ δE_p , δE_k und δE_a gibt bzw. die Änderung der potentiellen, kinetischen- und Austauschenergie bei der Wechselwirkung der Atome oder Ionen. Näheres hierüber findet man bei W. Lenz, ZS. f. Phys. 77, 713, 1932; weiterhin bei H. Jensen, ZS. f. Phys. 77, 722, 1932 und 101, 164, 1936.

Es ergibt sich also ein ganz analoger Ausdruck wie für die Änderung der Austauschenergie

$$\delta E_a = -n_a \int [(\nu_1 + \nu_2)^{4/3} - \nu_1^{4/3} - \nu_2^{4/3}] d\nu. \quad (72)$$

Durch Zusammenfassen der beiden Ausdrücke folgt also

$$\delta E_a + \delta E_w = -n'_a \int [(\nu_1 + \nu_2)^{4/3} - \nu_1^{4/3} - \nu_2^{4/3}] d\nu. \quad (73)$$

Die aus der Berücksichtigung der Polarisierung resultierende zusätzliche Wechselwirkung äußert sich also darin, daß man wieder n_a durch n'_a zu ersetzen hat. Dies gilt aber nur dann, wenn sich nur die Randgebiete der Atome überdecken. Wenn dies nicht der Fall ist, so hat man δE_w aus (70) zu bestimmen.

Jensen hat mit den Lösungen der zu (55) analog modifizierten Thomas-Fermi-Diracschen Gleichung die wichtigsten Konstanten der Alkalihalogenidkristalle berechnet¹⁾. Für die Gitterkonstante ergaben sich durchweg etwas größere Werte als die experimentellen. Für Rb J beträgt z. B. der von Jensen berechnete Wert 7,50 a_H , der im Vergleich zum empirischen Wert von 6,93 a_H um rund 8% zu groß ist. Für Rb J stellt Jensen die Ableitung der einzelnen Energieterme nach der Gitterkonstante auch graphisch dar und man kann aus diesen Kurven mit Hilfe der Formel (71) bzw. (73) die zusätzliche Kraft abschätzen, indem man einfach die Jensensche Kurve der Austauschkraft im Verhältnis n'_a/n_a vergrößert. Man erhält so als rohe Schätzung für die Gitterkonstante 7,3 a_H , der Fehler geht also von 8% auf 5% zurück. Bei Berücksichtigung der van der Waalschen Wechselwirkung, die eine weitere Anziehung bedeutet, würde sich der Fehler auf etwa 1% verringern. Man sieht also, daß die Berücksichtigung der Polarisationsenergie die Diskrepanz zwischen dem theoretischen und empirischen Wert wesentlich verringert. Allerdings haben diese Betrachtungen bezüglich des Rb J-Kristalls nur einen orientierenden Charakter, denn um zu genauen Aussagen zu gelangen, muß man die Jensenschen Rechnungen mit den neuen Elektronenverteilungen der Ionen wiederholen. Die Änderung der Elektronenverteilung der einzelnen Ionen dürfte jedoch die Gitterkonstante nur wenig beeinflussen.

Kolozsvár (Ungarn), Institut für theoretische Physik der Universität.
Januar 1943.

¹⁾ H. Jensen, ZS. f. Phys. 101, 164, 1936.

Nebenbegriffe und Gasgesetz.

Von R. W. Pohl in Göttingen.

(Eingegangen am 29. April 1943.)

Es werden zunächst die Definitionsgleichungen einiger im Schrifttum weit verbreiteter Nebenbegriffe zusammengestellt; dann wird die merkwürdige Tatsache besprochen, daß ein so fundamentales Gesetz, wie das Gasgesetz, ohne erkennbaren Nutzen fast stets mit Hilfe zweier Nebenbegriffe formuliert wird.

Das Wort *Nebenbegriffe*¹⁾ soll solche Begriffe kennzeichnen, die im Gegensatz zu normalen physikalischen Begriffen nicht unabhängig von speziellen Einheiten definiert werden können, sondern an bestimmte Einheiten, z. B. an Gramm, Liter usw. gebunden sind. Derartige Nebenbegriffe sind zwar entbehrlich, aber im Schrifttum noch weit verbreitet. Sie werden nach altem Herkommen ohne Definitionsgleichungen eingeführt und nur mit *Sätzen* erläutert. Ihre Eigenart wird mit Stillschweigen übergangen. Beides ist recht unzweckmäßig. Meines Erachtens muß man auch die Nebenbegriffe mit Hilfe von *Gleichungen* definieren. Man muß im Text auf die Besonderheiten der Nebenbegriffe hinweisen und sie in den Gleichungen durch ein klares Merkmal, z. B. durch einen Sternindex, kenntlich machen. Sonst gibt es erfahrungsgemäß viele dimensionsfalsche Angaben und Schwierigkeiten beim Wechsel der Grundeinheiten, z. B. beim Übergang vom Gramm zum Kilogramm.

Im folgenden werden einige besonders gebräuchliche Nebenbegriffe zusammengestellt. In ihren Definitionsgleichungen bedeutet (*M*) das Molekulargewicht als reine Zahl, also z. B. 32 für O₂. -- (*M*) Gramm ist von W. Ostwald *Mol* benannt worden, doch wird im folgenden auf diese äußerst zweckmäßige und praktisch unentbehrliche Kürzung verzichtet, um die Anwesenheit der Einheit gramm recht klar hervortreten zu lassen.

$$\text{Molvolumen} = \frac{\text{Volumen}}{\text{Masse}} \cdot (M) \text{ gramm} = \text{spezif. Volumen} \cdot (M) \text{ gramm,}$$

$$\text{Molwärme} = \frac{\text{Wärmemenge}}{\text{Masse Temp.}} \cdot (M) \text{ gramm} = \text{spezif. Wärme} \cdot (M) \text{ gramm,}$$

$$\text{Loschmidtzahl} = \frac{\text{Molekülzahl}}{\text{Masse}} \cdot (M) \text{ gramm} = \text{spezif. Molekülzahl} \cdot (M) \text{ gramm,}$$

¹⁾ R. W. Pohl, Phys. ZS. 43, 531, 1942.

$$\text{Faradayzahl} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\text{Ionenladung}}{\text{Ionenmasse}} \cdot (M) \text{ gramm} = \frac{1}{z} \cdot \text{spezif. Ionenladung} \cdot (M) \text{ gramm} \quad (z = \text{Wertigkeit}),$$

$$\text{Molsuszeptibilität} = \frac{\text{Suszept.}}{\text{Dichte}} \cdot (M) \text{ gramm} = \text{spezif. Suszeptibilität} \cdot (M) \text{ gramm},$$

$$\text{Molrefraktion} = \frac{\text{Refraktion}}{\text{Dichte}} \cdot (M) \text{ gramm} = \text{spezif. Refraktion} \cdot (M) \text{ gramm},$$

$$\text{Äquivalentleitfähigkeit} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\text{spezif. Leitfähigkeit}}{\text{Massenkonzentration}} \cdot (M) \text{ gramm}.$$

Diese Zusammenstellung wird hoffentlich die Einführung von *Definitionsgleichungen* auch für Nebengriffe fördern. Besonders notwendig erscheint mir dies mit Hinsicht auf das *Gasgesetz*.

Die Erfahrung liefert unabhängig von speziellen Einheiten die beiden Formen

$$pV = M \cdot R T_{\text{abs}} \quad \text{und} \quad pV = n \cdot k T_{\text{abs}} \quad (1)$$

(M = Gesamtmasse und n = Zahl der im Volumen V eingeschlossenen Moleküle) mit den experimentell bestimmten Konstanten ¹⁾

$$R = 8,31 \frac{\text{Wattsekunden}}{(M) \text{ gramm} \cdot \text{Grad}} \quad \text{und} \quad k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Wattsekunden}}{\text{Grad}}$$

Diese von speziellen Einheiten unabhängigen Formen des Gasgesetzes finden sich selten. Im allgemeinen begegnet man der Schreibweise

$$pV = n^* \cdot R^* \cdot T_{\text{abs}} \quad (2)$$

Sie enthält zwei hier durch Sterne kenntlich gemachte Nebengriffe. Ihre Namen und Definitionsgleichungen lauten

$$\text{Zahl der Mole } n^* = \frac{M}{(M) \text{ gramm}} = \frac{n}{\text{Loschmidtzahl}^*} \quad (3)$$

$$\text{Molare Gaskonstante } R^* = R \cdot (M) \text{ gramm} = k \cdot \text{Loschmidtzahl}^*. \quad (4)$$

Aus den Messungen folgt $R^* = 8,31$ Wattsekunden/Grad.

Der Name *Zahl der Mole* für die reine Verhältniszahl n^* ist zwar zu rechtfertigen aber irreführend. Außerdem entsteht durch den Nebengriff der *molaren Gaskonstante* $R^* = 8,31$ Wattsekunden/Grad die unzutreffende Auffassung, daß außer der Boltzmann-Konstante k

¹⁾ Die Gaskonstante R ist individuell, die Boltzmann-Konstante k ist universell. Wir bezeichnen die Masse eines einzelnen Moleküls mit m ; dann ist das Verhältnis $R/k = n/M$, also gleich der spezifischen Molekülnzahl $N = 1/m$. Experimentell ergibt sich

$$N = \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{\text{Mol}} = \frac{6,02 \cdot 10^{26}}{\text{Kilomol}} \text{ usw.}$$

noch eine weitere *universelle* Gaskonstante existiere. Dabei verfährt man im Sinne des folgenden scherzhaften Beispiels:

Für die Lichtgeschwindigkeit in einem beliebigen Stoff mit der *Brechzahl* n gilt die Gleichung

$$\text{Lichtgeschwindigkeit} = \frac{\text{Lichtweg}}{\text{Laufzeit}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{meter}}{n \cdot \text{sec}}. \quad (5)$$

Diese Gleichung multiplizieren wir beiderseits mit dem Produkt (n sec), genannt „Brechsekunde“. Dann erhalten wir als Nebenbegriff

$$\text{Brechsekundenlichtweg} = 3 \cdot 10^8 \text{ meter.}$$

Vermutlich werden nur wenige Physiker bereit sein, diese *Länge* $3 \cdot 10^8$ meter als universelle Naturkonstante anzuerkennen!

Die Vorliebe der meisten Autoren für Nebenbegriffe im Gasgesetz ist sehr merkwürdig. Ein Unbefangener vermag doch den Gleichungen (3) und (4) nur einen einzigen Vorteil zu entnehmen, nämlich eine bescheidene Übung im Dividieren und Multiplizieren.

Zum Schluß noch eine Bemerkung zur Vermeidung von Mißverständnissen: Es gibt viele nicht mit Mol, sondern mit Liter, Minute usw. gebildete Nebenbegriffe. Auch soll selbstverständlich mit der obigen Bewertung der Nebenbegriffe nicht das geringste gegen die Anwendung des Moles gesagt sein. Kein Einsichtiger kann darauf verzichten, für Vergleiche physikalische Meßergebnisse auf Körper oder Mengen mit den Massen 1 Mol, 1 Kilomol usw. zu beziehen, also allgemein auf Körper oder Mengen, die aus gleich viel Molekülen bestehen. Dazu braucht man aber keine Nebenbegriffe.

Zusammenfassung. Erfahrungsgemäß führt es im Schrifttum zu vielen Unklarheiten und Widersprüchen, wenn normale physikalische Begriffe und Nebenbegriffe gleichzeitig und durcheinander angewandt werden, ohne daß man die Nebenbegriffe und ihre Besonderheiten deutlich *kennzeichnet*. — Nebenbegriffe sind sachlich nie erforderlich; darum ist es das einfachste, sie trotz alten Herkommens ganz zu vermeiden und z. B. für das Gasgesetz eine der beiden unter (1) genannten Formen zu benutzen.

Göttingen, I. Physikalisches Institut der Universität, 1943.

Über die Wanderung von Edelgasen durch Metalle.

Von W. Lumpe und R. Seeliger in Greifswald.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 19. März 1943.)

Anschließend an Untersuchungen über die Aufzehrung von Edelgasen in der Kathode einer Glimmentladung werden einige Versuche über die Anfangsverteilung und über die Wanderung der Edelgasteilchen im Metall beschrieben. Es ergeben sich Hinweise darauf, daß die Anfangsverteilung eine glockenförmige ist, deren Lage größenordnungsmäßig anzugeben versucht wird. Eine merkliche Wanderung der Teilchen setzt erst ein bei einigen 100°C ; wie Austreiberversuche zeigen, nimmt dann die Teilchenbeweglichkeit stark zu mit zunehmender Temperatur. Zur theoretischen Deutung der erhaltenen Austreibekurven konnten nur einige allgemeine Hinweise gegeben werden.

Über die Wanderung von Fremdatomen durch Metalle gibt es schon eine sehr große Zahl von experimentellen und theoretischen Untersuchungen¹⁾, aber für Edelgasatome liegen u. W. noch keinerlei Beobachtungen vor, weil unter den bei derartigen Messungen üblichen Versuchsbedingungen Edelgase nicht in nachweisbaren Mengen in Metalle eintreten und man deshalb Edelgas-Metallsysteme bisher nicht zur Verfügung hatte. Nachdem nun in einer Reihe von Arbeiten²⁾ gezeigt werden konnte, daß die Kathode einer Glimmentladung sogar recht erhebliche Mengen von Edelgasen aufnehmen kann, lag es nahe, auch deren Wanderung (Diffusion) im Metall zu untersuchen. Wenn nun auch die Sachlage für Edelgase eine wesentlich einfachere ist als für unedle Gase, weil chemische Reaktionen u. dgl. im Metall und Oberflächenreaktionen keine Rolle spielen, treten — bedingt durch die Methode, die eben leider bisher als einzige zur Verfügung steht, Edelgase überhaupt in Metalle hineinzubringen — andere unangenehme Komplikationen auf. Es hat sich nämlich in den genannten Arbeiten ergeben, daß die Edelgasteilchen in das Kathodenmetall „hineingeschossen“ werden und zugleich durch die mit dem Entladungsvorgang stets verbundene Kathodenzerstäubung eine Abtragung von Kathodenmaterial

¹⁾ Vgl. die zusammenfassenden Darstellungen: C. J. Smithells, *Gases and Metals*; W. Jost, *Diffusion und Chemische Reaktion in festen Körpern*; W. Seith, *Diffusion in Metallen*. — ²⁾ H. Alterthum, A. Lompe u. R. Seeliger, *ZS. f. techn. Phys.* **17**, 407, 1936; H. Alterthum u. A. Lompe, ebenda **19**, 113, 116, 1938; R. Seeliger, *Naturwiss.* **30**, 461, 1942.

einerseits, eine Wiederauflagerung durch Rückdiffusion andererseits stattfindet; dies bedingt wenig übersichtliche und nur indirekt erschließbare Verhältnisse gerade in den interessierenden äußeren Metallschichten. Aber auch die experimentellen Schwierigkeiten sind recht erheblich. Um Schlüsse auf die Wanderung von Gasen in Metallen ziehen zu können, muß man nämlich letzten Endes stets die Gase aus dem Metall durch Erhitzung austreiben. Da aber jedes Metall in seinem Innern Gase enthält, muß man vor einem Versuch mit Edelgas das Metall möglichst weitgehend entgasen. Die im folgenden beschriebenen Versuche beziehen sich nun alle auf Neon und Eisen (weil wir in den erwähnten früheren Arbeiten nur für diese beiden die erforderlichen Erfahrungen bereits sammeln konnten) und eine extreme Entgasung stößt bei diesem Metall, insbesondere bei Reineisen, auf Schwierigkeiten. Wir haben selbstverständlich bei allen Versuchen durch eine sehr sorgfältige Formierungstechnik und durch Blindversuche uns nach Möglichkeit gegen Fehler zu sichern gesucht, die aus einer unzureichenden Vorbehandlung der Elektroden und Röhren entstehen können. Die Druckmessungen wurden vorgenommen bei den höheren Drucken mit Manometern von der von Bartholomeyczuk angegebenen Art, bei den tieferen mit einem Manometer nach Wetterer. Im einzelnen auf alle diese vakuumtechnischen Einzelheiten jeweils einzugehen, dürfte sich erübrigen.

I. Verteilung des Gases in Metall. Vorausgeschickt sei die Besprechung einiger Versuche, die zugleich frühere Ergebnisse stützen bzw. weitere Unterlagen für damals bereits Vorweggenommenes liefern. Eine unserer Feststellungen war, daß das aus dem Entladungsraum verschwundene Neon sich vollständig oder doch zum größten Teil im Kathodenmetall befindet. Um dies nochmals nachzuprüfen, wurde eine zylindrische Hohlkathode in einem Quarzrohr verschiebbar angebracht, nach der Beladung mit Gas durch die Entladung verschoben und dann durch Auswirbeln entgast. Dadurch kann erreicht werden, daß der bei der Entgasung eintretende Druckanstieg nun sicher nur herrührt von aus der Kathode austretendem Gas und nicht etwa auch zum Teil von Gas, das aus dem durch die Entladung auf der inneren Rohrwand erzeugten Zerstäubungsniederschlag stammt. Es ergab sich, daß bei genügend langer und intensiver Erhitzung (z. B. bei 1100° C in 20 Std.) etwas mehr als 98% des aufgezehrten Gases wieder ausgetrieben werden können. Eine zweite Behauptung war, daß es wegen der Inhomogenität der Stromverteilung auf der Kathode Stellen gibt, an denen die Zer-

stäubung, und andere Stellen, an denen die Aufstäubung von Metall überwiegt, und daß die letzteren das aufgezehrte Gas vorwiegend enthalten. Um dies zu zeigen, wurden aus einer Kathode nach ihrer Beladung mit Gas möglichst gleichgroße Stücke der einen und anderen Art herausgeschnitten und einzeln entgast. Das Ergebnis war, daß der Gehalt an Neon für die zerstäubten Flächenstücke größenordnungsmäßig kleiner ist als für die aufgestäubten (das Verhältnis der Gasgehalte lag zwischen den Grenzen 1 : 100 und 1 : 50).

Von besonderer Bedeutung ist natürlich, in welcher räumlichen Verteilung sich das Gas im Metall befindet, das durch die Entladung in die Kathode hineingeschossen worden ist. Sicherlich liegt es nur bis zu einer sehr geringen Tiefe unter der Oberfläche, aber wie dick die gasbeladene Schicht ist und ob in ihr die Gaskonzentration nach Art einer Absorptionskurve mit zunehmender Tiefe monoton abnimmt, oder ob sie nach Art einer Glockenkurve mit einem Maximum verteilt ist, war unbekannt, wenn auch letzteres bereits vermutet werden konnte. Wir haben versucht, uns hierüber Aufschluß zu verschaffen nach den beiden nun zu beschreibenden Methoden.

Wenn man aus dem gasbeladenen Metall durch Erhitzung das Gas wieder austreibt, müßte es grundsätzlich möglich sein, aus dem zeitlichen Verlauf der Entgasung, d. h. des gemessenen Druckanstiegs im Entgasungsraum, Schlüsse zu ziehen auf die anfängliche Konzentrationsverteilung. Vorbedingung ist dabei, daß das Metall innerhalb von Zeiten auf die (dann konstant bleibende) Entgasungstemperatur gebracht wird, die klein sind gegen die jeweilige Entgasungszeit. Es läßt sich dies einigermaßen erreichen, wenn man als Metallkörper einen dünnen Draht benutzt, der durch Joulesche Stromwärme auf die Entgasungstemperatur gebracht wird. Demgemäß benutzten wir als Kathode einen Reineisendraht von 0.3 mm Dicke, der in der Achse des Entgasungsrohres durch eine Feder gespannt gehalten wurde; die Temperatur wurde gemessen mit einem Thermoelement, die Entgasungstemperatur von 800° C wurde erreicht in weniger als 10 sec. Die Beladung des Drahtes mit Gas erfolgte in demselben Rohr durch eine Entladung gegen eine ebenfalls drahtförmige Anode. Da es sich natürlich nur um recht geringe Gasmengen handelt, die aufgezehrt und wieder ausgetrieben werden, mußte das Volumen der ganzen Apparatur (Rohr + Manometer) möglichst klein gehalten sein: bei einer Drahtlänge von 12 cm gelang es, durch Konstruktion eines möglichst kleinen Manometers (nach Bartholomeyczzyk) das Gesamtvolumen auf 16 cm³ herabzudrücken. Die

Fig. 1 zeigt den typischen Verlauf einer Austreibekurve¹⁾, der eine Aufzehrung von 2,92 auf den Ausgangsdruck von 2,58 Torr vorausgegangen war.

Der Diskussion dieser Kurve müssen wir eine Bemerkung über die sog. „Einschußfunktion“ vorausschicken. Wie schon einleitend erwähnt wurde, hat sich die Vorstellung bisher durchaus bewährt, daß die Neonatome in die Kathode „hineingeschossen“ werden und in ihr in einer gewissen Tiefe „stecken bleiben“. Bei den Temperaturen, mit denen wir es bei unseren Kathoden zu tun haben, bleiben sie dann zunächst praktisch unbeweglich liegen; erst bei wesentlich höheren Temperaturen bekommen sie eine merkbare Beweglichkeit und diffundieren, wie die später zu beschreibenden Versuche zeigen werden, wieder aus der Kathode heraus. Die Verteilung der Atome im Metall läßt sich nun beschreiben durch die sog. Einschußfunktion $f(x)$, die angibt, welcher Bruchteil der auf die Kathode auftreffenden Teilchen in der Tiefe x steckenbleibt. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß infolge der Kathodenzerstäubung eine Abtragung der jeweils obersten Metallschichten stattfindet und zugleich eine Wiederauflagerung von abgestäubtem Metall infolge der Rückdiffusion im Gas. Wir können dies summarisch beschreiben durch den Ansatz, daß sich die Oberfläche mit der Geschwindigkeit v in den ursprünglich von Metall eingenommenen Raumteil hinein verschiebt. Eine einfache Überlegung zeigt dann, daß zur Zeit t nach Beginn des Aufzehrungsvorganges in der Schicht x , $x + dx$ unter der ursprünglichen Oberfläche sich

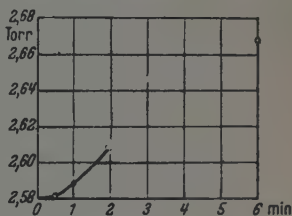


Fig. 1. Entgasung eines dünnen Drahtes.

$$dN = n_0 \cdot dx \int_0^t f(x - vt) \tau \quad (1a)$$

Gasatome/cm² angesammelt haben, wo n_0 die Zahl der pro Zeit- und Flächeneinheit auftreffenden Atome ist. Diese Schicht x liegt aber in der Tiefe $d = x - vt$ unter der zur Zeit t tatsächlich vorhandenen Oberfläche, so daß also (nach einfacher Umformung obigen Ausdrucks) die Dichteverteilung zur Zeit t gegeben ist durch

$$dN = n_0 \cdot dx \int_{d-vt}^{d+vt} f(\xi) d\xi. \quad (1b)$$

¹⁾ Es ist von dieser Figur im folgenden nur der Anfangsteil von Interesse und der spätere Verlauf deshalb nur angedeutet.

Wenn die Einschubfunktion f bekannt ist, kann man hieraus die Verteilung (die nicht nur von d , sondern auch von t abhängt) unmittelbar finden.

Die der Messung zugängliche Aufzehrungsgeschwindigkeit $= dN/dt$ = Zahl der in der Zeiteinheit aus dem Entladungsrohr verschwindenden Atome setzt sich zusammen aus der Zahl der Atome, die eingeschossen werden, und aus der Zahl der Atome, die aus der durch die Zerstäubung abgetragenen Oberflächenschicht wieder frei werden. Eingeschossen werden in der Zeit dt

$$dN_+ = n_0 dt \int_0^{\infty} f(\xi) d\xi$$

Atome (wobei angenommen werden darf, daß die Dicke der Kathode größer ist als die maximale Einschubtiefe). Die Zahl der wieder frei werdenden Atome ist gleich der Zahl der Teilchen, die sich zu der betrachteten Zeit t bereits in derjenigen Oberflächenschicht angereichert hatten, die in der Zeit dt abgetragen wird. Diese Zahl können wir aus Gl. (1a) entnehmen, wenn wir setzen $dx = v \cdot dt$. Wir erhalten also

$$dN_- = n_0 v dt \int_0^t f(x - v\tau) d\tau.$$

Dies läßt sich noch umformen, weil hier $x = v \cdot t$ ist, und wir erhalten so

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_+}{dt} - \frac{dN_-}{dt} = n_0 \left[\int_0^{\infty} f(\xi) d\xi - \int_0^v f(\xi) d\xi \right] = n_0 \int_v^{\infty} f(\xi) d\xi. \quad (2a)$$

U. h.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dN}{dt} \right) = -n_0 f(vt). \quad (2b)$$

Wenn nun, wie dies anzunehmen plausibel ist, f die Form einer Glocke oder Zacke hat, müßte nach (2a) die Aufzehrungsgeschwindigkeit von einem Höchstwert für $t = 0$ absinken auf den Wert 0, der dann erreicht ist, wenn $v \cdot t$ gleich der Glockenbreite geworden ist: dann wird eben gerade soviel eingeschossen, wie befreit wird. Im allgemeinen und insbesondere für Hohlkathoden wird nun zwar dieser einfache Sachverhalt gestört dadurch, daß auf der Kathodenoberfläche nicht überall nur Zerstäubung, sondern auch Auftragung stattfindet [Materialwanderung nach Bartholomeyczuk¹⁾]. Aber für überall konvexe Kathoden mit homogener Stromdichteverteilung lassen sich, wie Funk gefunden hat, die Voraussetzungen der obigen Überlegungen realisieren²⁾. Wir

¹⁾ Vgl. die ausführliche Mitteilung von W. Bartholomeyczuk, Ann. d. Phys. 42, 534, 1943. — ²⁾ Vgl. die Fig. 12 bei R. Seeliger, Naturwiss., 1. c.

sehen darin einen Beweis dafür, daß die Einschubfunktion in der Tat glockenförmig ist. Schematisch läßt sie sich, was für das folgende genügt, darstellen z. B. durch einen Verlauf nach Art des in Fig. 2 gezeichneten.

Wir kehren nun wieder zurück zu den Gl. (1) für die Dichteverteilung. Für $v = 0$, d. h. für den Fall, daß überhaupt keine Zerstäubung stattfindet, folgt aus (1a) natürlich einfach $dN = n_0 f(x) \cdot dx \cdot t$, d. h. die Dichteverteilung spiegelt die Einschubfunktion getreu wieder. Für $v > 0$ liegen die Dinge etwas komplizierter. Für das in Fig. 2 gezeichnete f finden wir durch eine Auswertung der Gl. (1b) ohne Mühe die Dichteverteilung zu verschiedenen Zeiten, an denen uns hier nur interessiert, daß bis zu einer Tiefe $d = \tau$ innerhalb endlicher Einschubzeiten t_m die Dichte noch auf dem Wert 0 bleibt; für $d = 0$ ist dies $t_m = \tau$ und nimmt dann mit zunehmender Tiefe linear ab auf $t_m = 0$ für $d = \tau$.

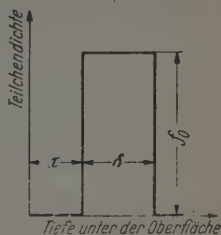


Fig. 2. Einschubfunktion, schematisch.

Physikalisch heißt dies, daß wir für genügend kleine Aufzehrungszeiten t (wo wir uns also noch im Bereich der Funkschen Versuchsbedingungen befinden), eine Dichteverteilung haben, die erst in einer endlichen Tiefe unter der Oberfläche zu von 0 verschiedenen Werten aufzusteigen beginnt. Diese Überlegungen legen nun für die Austreibekurve der Fig. 1 die Deutung nahe, daß merkliche Teilchenmengen erst in einer gewissen endlichen Tiefe unter der Oberfläche vorhanden sind und demgemäß eine endliche Zeit verstreichen muß, bis die ersten dieser Teilchen an die Oberfläche gewandert sind und austreten. Wir glauben deshalb, wenn auch diese Versuche noch mit größerer Genauigkeit weitergeführt werden müßten, neben den l. c. geschilderten Funkschen Aufzehrungsversuchen hier einen weiteren Hinweis dafür sehen zu können, daß die Einschubfunktion glockenförmig ist, d. h. ein offenbar ziemlich steiles Maximum in endlicher Tiefe unter der Oberfläche besitzt.

Die Durchrechnung des einschlägigen Diffusionsproblems würde u. E. nicht wesentlich Neues ergeben, weil zunächst nicht nur f , sondern auch der Diffusionskoeffizient unbekannt ist und deshalb eindeutige Folgerungen nicht möglich sind. Dazu kommt, daß die idealisierende Annahme einer glatten homogenen Kathodenoberfläche für derartige feinere Betrachtungen nicht mehr ausreichend zu sein

scheint, worauf unten noch einzugehen sein wird. Deshalb haben wir noch nach einer anderen Methode versucht, Aufschluß über die Dichteverteilung zu bekommen. Der Grundgedanke (nach einem Vorschlag von Bartholomeyczuk) war dabei der, eine schichtweise Abätzung der gasbeladenen Kathode vorzunehmen, diese Abätzung jedoch nicht mechanisch oder chemisch zu bewirken, sondern durch eine Zerstäubung in Quecksilberdampf. Abgesehen davon, daß es sich um die Entfernung jeweils nur außerordentlich dünner Schichten handelt, ist nämlich eine quantitative Bestimmung der in den einzelnen Schichten befindlichen Neonmengen, die natürlich sehr klein sind, wohl überhaupt nur durch Druckmessungen möglich, die sich bei der vorgeschlagenen Methode aber unmittelbar an die Zerstäubung anschließen lassen. Der

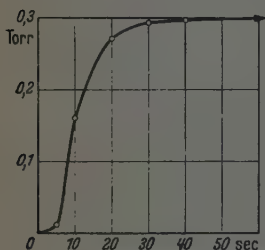


Fig. 3. Gasaustrahlung durch Zerstäubung.

Gang eines Versuchs war der folgende: Eine innen mit Quarz abgedeckte Zylinderkathode wurde bei hohem Druck (~ 8 Torr), um die Abtragegeschwindigkeit v möglichst klein zu machen, mit Neon beladen, dann das Rohr über einen Magnetverschluß ausgepumpt und mit Quecksilber beschickt und nun in Quecksilberdampf zerstäubt. Die Zerstäubung erfolgte in gesättigtem Dampf bei 130°C , um eine hinreichend intensive

Entladung zu erhalten. Die Zerstäubung wurde zu bestimmten Zeiten unterbrochen und nach Abkühlung des Rohres auf Zimmertemperatur der Druck jedesmal gemessen, der wegen des durch die Abstäubung frei werdenden Neons anstieg; dabei mußte das Manometer nun auch für Gemische von Neon mit Quecksilberdampf besonders geeicht werden, da seine Eichkurve eine spezifische ist. Naturgemäß handelt es sich hier um recht diffizile Messungen und wir werden deshalb das z. B. in Fig. 3 gezeigte Ergebnis auch mit aller Vorsicht und Kritik zu bewerten haben. Immerhin scheint uns bemerkenswert zu sein, daß die p, t -Kurve nicht sogleich steil vom Nullpunkt aus ansteigt und daß sie einen Sättigungswert erreicht, wie dies wiederum gerade für eine glockenförmige Dichteverteilung zu erwarten ist, die bei der Zerstäubung schichtweise angeschnitten wird. Um den auf der Zeitachse verzeichneten Zerstäubungszeiten die Dicken der während dieser Zeiten abgestäubten Schichtdicken zuordnen zu können, war die Kathode vor und nach einer gesamten Zerstäubungszeit von 2 Stunden gewogen worden. Aus dem Gewichtsverlust und aus ihrer Oberfläche ergab sich

so, daß einer Zerstäubungszeit von 1 sec eine Schichtdicke von fast genau 10^{-8} cm entspricht; es würde also die Dichteverteilungsglocke nach Fig. 3 in einer Tiefe von der Größenordnung $5 \cdot 10^{-8}$ cm anzuheben beginnen und sich bis zu einer Tiefe von der Größenordnung $20 \cdot 10^{-8}$ cm erstrecken, und diese Zahlen scheinen uns jedenfalls nicht unvernünftig zu sein.

II. *Die Wanderung des Gases im Metall.* Wenn auch alle unsere bisherigen Erfahrungen gezeigt hatten, daß das eingeschossene Neon bei Temperaturen bis hinauf zu etwa 200°C im Metall praktisch festsetzt, war es doch wünschenswert, noch quantitativ zu prüfen, wieweit

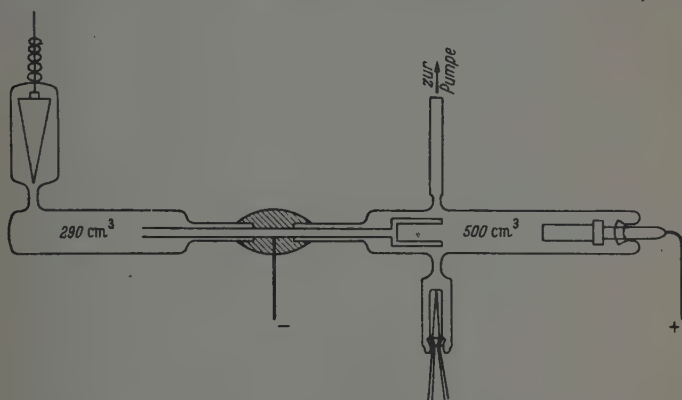


Fig. 4. Versuchsröhre für die Durchlässigkeitsmessung.

es durch Metallschichten (von der Dicke einiger Zehntel mm) hindurch- „diffundiert“. Zu diesem Zweck benutzten wir das in Fig. 4 gezeichnete Versuchsröhr, dessen wesentlicher Teil eine geschweißte Hohlkathode mit doppelter Wand (Wanddicke je 0,3 mm) war, die natürlich auf vollkommene Gasdichtheit geprüft worden war. Die Aufzehung im Entladungsraum rechts wurde mit einem Manometer nach Bartholomeyczik gemessen, eine eventuelle Druckzunahme im Meßraum links konnte mit einem Quarzfadenmanometer festgestellt werden. Der Meßraum wurde zunächst auf 10^{-6} Torr evakuiert und dann (ebenso wie der auf 3 Torr mit Neon gefüllte Entladungsraum) abgeschmolzen. Da nicht gegettert wurde, um die Metalloberfläche nicht unter Umständen zu verderben, stieg der Druck durch das Abschmelzen auf $6 \cdot 10^{-3}$ Torr. Bei der üblichen Entladungsstromstärke von 100 mA ergab sich nach einem anfänglichen geringen Druckanstieg auf $3 \cdot 10^{-2}$ Torr in der ersten Stunde und einem weiteren flacheren Druckanstieg auf

$3,5 \cdot 10^{-2}$ Torr in den nächsten 40 Stunden, daß der Druck über die ganze restliche Versuchsdauer von rund 100 Stunden innerhalb der Genauigkeitsgrenze des Manometers konstant blieb. Die Anfangsstörung dürfte sich zwanglos erklären durch das Hindurchdiffundieren von dem Neon beigemischten Verunreinigungen, weil das Neon im Entladungsraum nach früheren Erfahrungen ohne eine Reinigung durch ein Vorbrennen sicher nicht ganz rein war. Wesentlich ist allerdings nur die spätere praktisch vollkommene Konstanz des Druckes im Meßraum, obwohl die Entladung (mit Ausnahme natürlich der für die Druckmessungen erforderlichen kurzen Pausen) dauernd brannte. Aus den Voluminas des Meßraumes und des Entladungsraumes, aus der Aufzehrung im Entladungsraum und aus der Empfindlichkeit des Quarzfadenmanometers läßt sich angeben, daß sicher weniger als 10^{-6}_{00} des aufgezehrten Neons durch die Wand der Kathode *hindurch*diffundiert war. Bei höheren Temperaturen ist es schwierig, quantitative Messungen anzustellen; wir können hier nur sagen, daß auch noch bei 8500°C in 10 Stunden keine spektroskopisch nachweisbaren Mengen in den Meßraum gelangen.

Zum Schluß haben wir nun noch untersucht, wie die Wiedergewinnung (Austreibung) des aufgezehrten Gases von der Zeit und von der Temperatur abhängt. Diese Austreibung erfolgt, wie aus dem negativen Ergebnis des eben beschriebenen Versuchs hervorgeht und bei der gegen die Kathodendicke außerordentlich geringen Einschußtiefe anschaulich verständlich ist, natürlich praktisch nur durch die Vorderfläche der Kathode, durch die auch der Einschuß erfolgt ist. Benutzt wurden, um möglichst große Aufzehrung zu haben, Hohlkathoden üblicher Art, die jeweils unter genau denselben Bedingungen (Anfangsdruck, Stromstärke, Aufzehrungsdauer) mit Gas beladen wurden. Besonders mußte dabei auf möglichstste Reinheit des Gases geachtet werden, die sich nach früheren Erfahrungen durch ein Vorbrennen mit einer Hilfsentladung erzielen läßt. Ferner war es notwendig, die Austreibetemperatur in möglichst kurzer Zeit zu erreichen und dann konstant zu halten (Messung mit Thermoelement). Nach mancherlei unbefriedigenden Versuchen bewährte es sich, das Entladungsrohr (Fig. 5) aus Quarz zu bauen und die Kathode in einem übergeschobenen elektrischen Ofen zu heizen; die Kathode konnte so in 3 Minuten auf die jeweiligen Heiztemperaturen, die zwischen 4000°C und 11000°C lagen, gebracht werden. Selbstverständlich war in Blindversuchen festgestellt worden, daß auch noch bei diesen Temperaturen das Quarz

praktisch undurchlässig bleibt sowohl für Neon wie für Luft¹⁾; es zeigte sich, daß bis zu 1300° C (höchste Austreibetemperatur 1100°) in 72 Std.

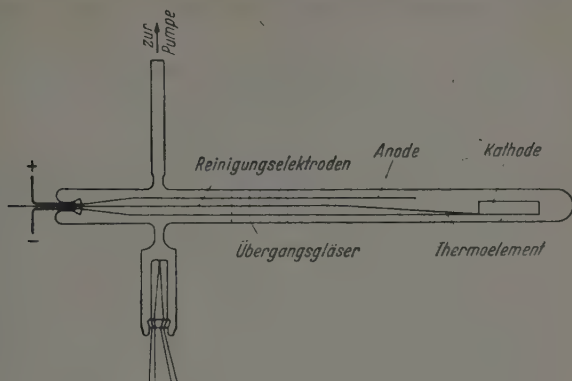


Fig. 5. Versuchsröhre für die Austreibungs-messungen.

(längste Austreibzeit 15 Std.) sich der Druck im Rohr sicher um weniger als 1% änderte. Die Versuche selbst gingen so vor sich, daß nach Beendigung der Beladung mit Neon die Kathode während einer bestimmten Zeit auf die Austreibetemperatur erhitzt, dann abgekühlt, dann der Druck gemessen und dann dieser Vorgang wiederholt wurde usw. Die Ergebnisse sind an einem Beispiel in Fig. 6 aufgezeichnet: aufgetragen ist der Prozentsatz des in der Kathode aufgezehrten Gases, der wiedergewonnen wird, in Abhängigkeit von der jeweils totalen Austreibzeit.

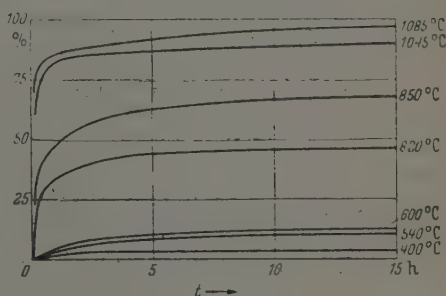


Fig. 6. Austreibungskurven.

Wie die Kurven zeigen, geht die Austreibung zuerst rasch, dann mit abnehmender Geschwindigkeit und, wie es scheint, sich asymptotisch einem Endwert nähernd, vor sich und erfolgt um so rascher und inten-

¹⁾ Für Helium ist Quarz ziemlich durchlässig (vgl. T. Alty, Phil. Mag. 15, 1035, 1933, mit Literaturangaben). Die Durchlässigkeit für Neon ist (vgl. Liu Sheng Tsai u. T. R. Hogness, Journ. Phys. Chem. 36, 2595, 1932) sehr viel kleiner; zu beachten ist zudem, daß in unseren Versuchen der Neonfülldruck nur einige Torr betrug, wodurch sich der negative Ausfall der Durchlässigkeitsprüfung erklären dürfte.

siver, je höher die Austreibetemperatur ist; es ist das qualitativ derselbe Verlauf, den man auch bei unedlen Gasen gefunden hat¹⁾. Bei genauerer Betrachtung stößt man jedoch auf eine grundsätzliche Schwierigkeit. Wenn es sich nämlich bei der Austreibung um einen Diffusionsvorgang üblicher Art handelt, d. h. um einen Vorgang, bei dem die Teilchendichte n im Metall durch die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \cdot \Delta n$$

gegeben ist, kann $n(x, y, z, t)$ von der Zeit t nur in der Verbindung $D \cdot t$ abhängen. Da nun jeder Kurve ein bestimmter konstanter, zu der betreffenden Austreibetemperatur T gehörender Wert des Diffusionskoeffizienten D zuzuschreiben ist (wobei D mit zunehmender Temperatur T offenbar stark zunimmt), müßten sich die Kurven aufeinander reduzieren lassen durch eine jeweils mit D proportionale Reduktion des Zeitmaßstabes. Ob dies für die Anfangsteile der Kurven zutrifft, müssen wir unentschieden lassen, weil hier, wenn man genügend viele Meßpunkte erhalten will, die Anheizzeiten von der Größenordnung der Austreibeziten werden. Man sieht aber sofort, daß es jedenfalls längst nicht für den ganzen Kurvenverlauf gilt. Dies aber würde heißen, daß es nicht möglich ist, die Wanderung des Neons im Metall durch den üblichen einfachen Diffusionsansatz zu beschreiben. Nun ist allerdings die Metalloberfläche nicht glatt, sondern gebirgig, aber auch wenn wir annehmen, daß die einzelnen „Berge“ die verschiedensten Formen haben und auch wenn wir ferner annehmen, daß die Anfangsverteilungen $n(x, y, z, 0)$ in diesen Bergen verschiedene sind, ändert dies nichts. Es ist vielmehr notwendig, z. B. anzunehmen, daß auch die Diffusionskoeffizienten verschiedene sind²⁾. Ein einfaches Modell eines Metalls, das sich bezüglich der Austreibekurven so verhalten kann, wie dies gefunden wurde, würde etwa bestehen aus Platten oder Zylindern, für die auch die Diffusionskoeffizienten verschiedene sind. Zur Veran-

¹⁾ Vgl. C. J. Smithells u. C. E. Ransley, Proc. Roy. Soc. London (A) 155, 195, 1936. Schon vorher hatte G. Euringer, ZS. f. Phys. 96, 37, 1935 die Entgasung von Drähten untersucht und die Ergebnisse insbesondere auch diffusionstheoretisch gründlich diskutiert. — ²⁾ Es ist dies natürlich nicht die einzige Erklärungsmöglichkeit. Nach bekanntem Muster¹ läßt sich eine (formale) Deutung der Kurven von Fig. 6 auch geben durch geeignete Kombination einer reinen Volumendiffusion mit einem Grenzflächenvorgang; aber eine derartige Annahme dürfte für Edelgase wohl erst bei sehr viel tieferen Temperaturen wie der hier vorliegenden physikalisch plausibel sein, so verlockend und leistungsfähig sie an sich auch ist.

schaulichung sei die Sachlage für ein System derartiger Platten kurz erläutert (für Zylinder liegen die Dinge ganz ebenso, nur würden dann in den folgenden Formeln statt der harmonischen Funktionen Bessel-Funktionen auftreten). Für eine Platte von der Dicke d und z. B. für eine durch τ und δ charakterisierte Anfangsverteilung nach Art der Fig. 2 ist die Lösung der Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 n}{\partial x^2},$$

mit den Randbedingungen $n = 0$ für $x = 0$ und $x = d$

$$n = 2 f_0 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\pi} \left\{ \cos \frac{i\pi}{d} \tau - \cos \frac{i\pi}{d} (\tau + \delta) \right\} \cdot \sin \frac{i\pi}{d} x \cdot e^{-\frac{i^2 \pi^2}{d^2} D t}$$

und daraus die Zahl der zur Zeit t noch in der Platte vorhandenen Teilchen N_t

$$\int_0^d n dx = N_t = 4 f_0 d \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 \pi^2} \left\{ \cos \frac{(2k+1)\pi}{d} \tau - \cos \frac{(2k+1)\pi}{d} (\tau + \delta) \right\} \cdot e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{d^2} D \cdot t},$$

die, wie dies auch sein muß, für $t = 0$ übergeht in $N_0 = f_0 \delta$. Die Zahl der in der Austreibezeit t austretenden Teilchen, die durch unsere Kurven Fig. 6 erfaßt war, ergibt sich also zu

$$J_t = N_0 - N_t = f_0 \delta - \tau f_0 d \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 \pi^2} \left\{ \right\} \cdot e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{d^2} D \cdot t},$$

Es ist demnach (wie oben bereits erwähnt wurde und natürlich ganz allgemein gilt) J_t nur abhängig von $D \cdot t$ und hieran ändert sich auch nichts, wenn man nun ein System beliebig vieler solcher Platten betrachtet, für die auch d , τ und δ verschiedene Werte haben können; denn das J_t für ein solches System setzt sich einfach additiv aus den einzelnen J_t zusammen. Wenn hingegen auch D verschiedene Werte für die einzelnen Platten hat, könnte man durch geeignete Wahl der Konstanten (d , τ , δ und) D Austreibekurven von der Gestalt der beobachteten konstruieren. Ein zwingender Grund, aus den Austreibekurven zu folgern, daß der Austreibung als Elementareffekt eine Diffusion im üblichen Sinne nicht zugrunde liegt, scheint uns also an sich zwar noch nicht gegeben zu sein, aber Folgerungen etwa auf die Größenordnung

von D oder auf den Temperaturkoeffizienten von D zu ziehen, dürfte hier vorläufig noch nicht möglich sein.

In diesem Zusammenhang ist das Ergebnis einer optischen Untersuchung der Oberfläche gasbeladener Kathoden von Interesse. Wie schon erwähnt, sitzt das aufgezehrte Neon in Hohlkathoden zum größten Teil an den Stellen der Innenwand, an denen die abgestäubten Metallatome durch Rückdiffusion aus dem Gas sich niederschlagen. Die mikroskopische Untersuchung eines senkrecht zur Oberfläche durch die Kathode gelegten Querschnitts läßt an diesen Stellen bei hinreichender

Vergrößerung die niedergeschlagene Schicht auch deutlich erkennen, die sich als ein feinkristallines Band von dem grobkristallinen Untergrund abhebt und an manchen Stellen von ihm sogar deutlich abgelöst zu sein scheint. Diese Bänder hatten unter unseren Versuchsbedingungen Dicken zwischen 0,002 und 0,005 mm je nach dem Druck und der Aufzehrungsdauer. Aus den aufgezehrten Gasmengen und den Flächengrößen der betref-

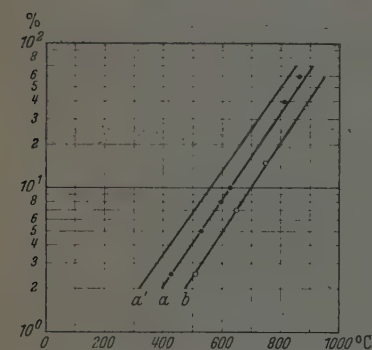


Fig. 7. Umzeichnung der Austreibekurven.

finden wir unter der Annahme, alles aufgezehrte Gas liegt nur in der erwähnten Schicht, daß in 1 cm³ Metall im Mittel 45 cm³ Neon (umgerechnet auf Atmosphärendruck) enthalten sind.

Wir wollen noch auf eine Gesetzmäßigkeit hinweisen, die sich aus unseren Austreibekurven ableiten läßt. Trägt man nämlich die prozentualen ausgetriebenen Mengen M für jeweils dieselbe Austreibzeit t in Abhängigkeit von der Austreibtemperatur T auf, so ergeben sich Kurven, die exponentiell ansteigend aussehen und es nahelegen, eine halblogarithmische Darstellung zu benutzen. Es zeigt sich dann tatsächlich, daß man als $\log M - T$ Kurven in dem Temperaturbereich zwischen 400 und 850° mit überraschend geringer und zudem unsystematischer Streuung Gerade erhält. In Fig. 7 ist eine solche Gerade a für die Austreibzeit $t = 2$ Std. aus den der Fig. 6 zugrunde liegenden Meßpunkten gezeichnet. Für die Austreibzeiten 5, 10 und 15 Std. ergeben sich mit einer nicht größeren Streuung ebensolche Gerade, die mit zunehmender Austreibzeit nach links hin fast parallel nebeneinander zwischen der 2 Std.-Geraden und der eingezeichneten 15 Std.-

Geraden a' liegen. Aus einer anderen Meßreihe, bei der die Aufzehrung (Gasbeladung) bei etwas höherem Druck (von 2,7 auf 1,7 Torr statt von 2,1 auf 1,6 Torr) und in längerer Aufzehrungszeit (80 statt 28 Std.) vorgenommen worden war, ergibt sich die 2 Std.-Gerade b . Es ist uns nicht gelungen, mit diesen Ergebnissen eine plausible theoretische Vorstellung zu verbinden. Man wird aber wohl kaum annehmen können, daß es sich hier um einen Zufall handelt und vielleicht ergibt sich deshalb gerade hier der Ansatzpunkt für weitere theoretische Überlegungen.

Aus äußeren Gründen mußten unsere Versuche vorzeitig abgebrochen werden. Immerhin dürften die im Vorstehenden zusammengefaßten bisherigen Ergebnisse nicht ohne Interesse und schon einigermaßen gesichert sein. Der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung möchten wir auch hier danken für die weitgehende Unterstützung mit apparativen Hilfsmitteln aller Art, den Herren Lompe und Jancke für einige Diskussionsbemerkungen.

(Mitteilung aus dem Zentrallaboratorium der Wernerwerke
der Siemens & Halske A.-G.)

Über die Dämpfung mechanischer Schwingungen durch magnetische Hysterese.

Von M. Kornetzki in Berlin-Siemensstadt.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 12. April 1943.)

Die durch eine von außen angelegte, homogene, mechanische Spannung verursachte Änderung der Magnetisierungsverteilung in den Weißschen Bezirken zeigt nach dem Entlasten eine Remanenz, die bei zyklischer Belastung einen dauernden Energieverlust, also eine Schwingungsdämpfung, verursacht. Dieser Energieverlust wird auf folgende Weise abgeschätzt: Es wird gezeigt, daß die Summe der Absolutwerte dieser Änderungen erhalten bleibt, wenn man an Stelle des entmagnetisierten Zustandes den Zustand der magnetischen 50 %-Remanenz betrachtet. Nun wird vorausgesetzt, daß eine durch eine kleine Spannung verursachte Änderung dieser Magnetisierung nach dem Entlasten ihrerseits wieder eine Remanenz aufweist, die ebenso groß sei, wie sie bestehen würde, wenn, vom entmagnetisierten Zustand ausgehend, dieselbe äußere Magnetisierungsänderung durch ein Magnetfeld erzeugt worden wäre. Aus der so bestimmten Remanenz wird nach dem magnetischen Rayleigh-Gesetz der Energieverlust und damit die Schwingungsdämpfung berechnet. Die abgeleitete Gleichung zeigt, daß diese magnetomechanische Dämpfung mit der Schwingungsweite ansteigt, daß sie ferner proportional der Rayleighschen Hysterese-konstante und der dritten Potenz des Verhältnisses von Sättigungsmagnetostriktion zu Sättigungsmagnetisierung sein sollte. Die mittels der aufgestellten Gleichung berechneten Dämpfungswerte stimmen größenordnungsmäßig mit vorliegenden Meßwerten überein. Aus der Gleichung folgt, daß eine Werkstoffbehandlung, welche die Rayleighsche Hysterese-konstante herabsetzt, auch die magnetomechanische Dämpfung vermindern muß.

Einleitung.

Setzt man einen ferromagnetischen Stoff unter elastische Spannung, so ändert sich die Verteilung der spontanen Magnetisierung in den verschiedenen Bezirken bekanntlich in der Weise, daß die mit der Magnetisierungsänderung verknüpfte Magnetostriktion die angelegte Spannung zu vermindern sucht. Dieses zusätzliche elastische Nachgeben des Stoffes ist die Ursache einer Änderung des Elastizitätsmoduls, des sogenannten ΔE -Effekts¹⁾. Mit der Richtungsverteilung ändert sich die äußere resultierende Magnetisierung des Probekörpers nur dann, wenn der Stoff schon vor Anlegen der Spannung nicht im makroskopisch

¹⁾ R. Becker, Phys. ZS. 33, 905, 1932.

unmagnetisierten Zustand war. Unabhängig davon ist jedoch die erzeugte Magnetisierungsänderung in den Bezirken mit einer Remanenz behaftet, die sich nach außen durch eine scheinbar plastische, remanente magnetostriktive Längenänderung¹⁾ äußert. Führt ein ferromagnetischer Stoff elastische Schwingungen aus, so verursacht diese remanente Längenänderung — deren Höchstbetrag mit der Remanenz der durch ein Magnetfeld erzeugten Magnetostriktion wahrscheinlich übereinstimmt — eine Dämpfung ϑ_m der Schwingungen¹⁾, die sich der auch unmagnetischen Stoffen eigenen, von anderen Ursachen²⁾ herrührenden Dämpfung ϑ_0 überlagert. Außerdem kommt bei ferromagnetischen Metallen noch die Dämpfung ϑ_w durch mikroskopische Wirbelströme um die einzelnen Weißschen Bezirke³⁾ und — falls der Stoff nicht im äußerlich unmagnetisierten Zustand vorliegt — auch durch makroskopische Wirbelströme über den ganzen Probenquerschnitt⁴⁾ hinzu. Nach Ausweis der vorliegenden Versuchsergebnisse scheint die mechanisch erzeugte Magnetisierungsänderung keine zusätzliche Nachwirkungsdämpfung zu bewirken⁵⁾. Die Gesamtdämpfung ϑ ist also gegeben durch

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_w + \vartheta_m. \quad (1)$$

Nimmt man an, daß die magnetomechanische Remanenz einer kleinen Belastungsschleife quadratisch mit der Schwingungsweite anwächst, genau wie nach dem Rayleigh-Gesetz⁶⁾ die magnetische Remanenz einer kleinen Magnetisierungsschleife mit dem Quadrat der Feldstärke steigt, so muß die Schleifenfläche mit der dritten Potenz der Schwingungsamplitude λ , die magnetomechanische Dämpfung ϑ_m also linear mit λ zunehmen:

$$\vartheta_m = c\lambda. \quad (2)$$

ϑ_0 und ϑ_w sind dagegen bei kleinen Dehnungen unabhängig von der Schwingungsweite. Während ϑ_w sowohl von der Frequenz wie auch — soweit makroskopische Wirbelströme beteiligt sind — von den Probenmessungen abhängt, ist ϑ_m von beiden unabhängig. Nur wenn die mechanische Schwingungsfrequenz so hoch gewählt werden könnte,

¹⁾ R. Becker u. M. Kornetzki, ZS. f. Phys. 88, 634, 1934. — ²⁾ Zusammenstellung bei A. Thum u. C. Petersen, ZS. f. Metallkde. 34, 39, 1942. —

³⁾ R. Becker u. W. Döring, Ferromagnetismus, S. 378. Berlin 1939. —

⁴⁾ Quantitative Deutung bei M. Kersten, ZS. f. techn. Phys. 15, 463, 1934; Versuchsergebnisse siehe O. v. Auwers, Ann. d. Phys. 17, 83, 1933. — ⁵⁾ Siehe z. B. G. Richter, Ann. d. Phys. (V) 32, 683, 1938. — ⁶⁾ Lord Rayleigh, Phil. Mag. 23, 225, 1887.

daß die magnetischen Vorgänge z. B. infolge Wirbelstrombremsung nicht mehr folgen¹⁾, müßte θ_m absinken.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß alle diese magnetischen Dämpfungsanteile verschwinden, wenn man die Magnetisierung durch ein starkes Magnetfeld oder durch hinreichend große mechanische Vorspannung festhält. In diesem Fall könnte nur noch durch Änderung der spontanen Magnetisierung eine Dämpfung entstehen, über deren Vorhandensein jedoch bisher nichts bekannt ist.

Mit dem erwähnten geradlinigen Anwachsen von θ_m ist ein lineares Absinken des Elastizitätsmoduls E verknüpft durch die Gleichung²⁾

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dz} = - \frac{3}{4} \frac{\theta_m}{z} = - \frac{3}{4} r \quad (3)$$

Diese Beziehung wurde bereits an vorliegenden Versuchsergebnissen³⁾ bestätigt. Sie entspricht dem aus dem Rayleigh-Gesetz folgenden Zusammenhang zwischen dem Anstieg der Permeabilität bei kleinen Feldstärken und dem Hystereseverlust.

Gl. (3) stellt eine Beziehung her zwischen zwei zwar magnetisch bedingten, aber rein mechanisch meßbaren Größen. Wir können nun einen Schritt weiter gehen und versuchen, die Dämpfung unmittelbar aus magnetischen Werten zu berechnen, indem wir den bei einer elastischen Schwingung entstehenden, magnetomechanischen Energieverlust abschätzen. Damit wäre eine theoretische Beziehung zwischen dem mechanischen und dem magnetischen Rayleigh-Gesetz geschaffen. Im folgenden werden Überlegungen mitgeteilt, die zu einem solchen Zusammenhang führen. Leider ergibt sich keine so genaue Übereinstimmung mit den vorliegenden Versuchsergebnissen wie bei Gl. (3), doch wird sich zeigen, daß dies wahrscheinlich an der Unsicherheit der dabei einzusetzenden Meßwerte liegt.

Ableitung der Beziehung zwischen mechanischem und magnetischem Rayleigh-Gesetz.

Wir betrachten einen ferromagnetischen Stoff im nichtmagnetisierten Zustand, also bei regelloser Verteilung der spontanen Magnetisierung auf die möglichen leichten Richtungen. Bei Gültigkeit des Rayleigh-Gesetzes erzeugt ein Magnetfeld H eine Magnetisierung

$$J = \alpha_a H + 2 r H^2 \quad (4)$$

¹⁾ K. Kriehlsheimer, *Ann. d. Phys.* (V) 17, 293, 1933; R. Becker, *Phys. ZS.* 39, 856, 1938. — ²⁾ M. Kornetzki, *WVSZ.* 17, 48, 1938.

³⁾ F. Förster u. W. Köster, *Naturwiss.* 25, 436, 1937.

Dabei ist χ_a die Anfangssuszeptibilität, ν die Hysteresekonstante¹⁾. Nach Abschalten des Feldes bleibt eine remanente Magnetisierung

$$J_r = \nu H^2 \quad (5)$$

übrig. Wechselt das Feld zwischen $+H$ und $-H$ hin und her, so wird bei jedem Wechsel die Energie

$$F = \frac{8\mu_0}{3} \nu H^3, \quad (6)$$

oder für hinreichend kleine Felder

$$F = \frac{8\mu_0}{3} \frac{\nu J^3}{\chi_a^3} \quad (7)$$

verbraucht.

Wir denken uns jetzt den Stoff in den unmagnetisierten Ausgangszustand zurückgeführt. Setzen wir ihn nun einer homogenen Spannung σ in Richtung des vorher vorhanden gewesenen Feldes aus, so tritt eine Verschiebung der Blochschen Wände zwischen den Bezirken und eine Drehung der Magnetisierung in den Bezirken ein, die zu keiner resultierenden, makroskopischen Magnetisierung des Probekörpers führt. Für die Berechnung der Hysterese wird es jedoch auf die Summe der Absolutwerte dieser Änderungen ankommen. Infolge der Tensor-symmetrie der Spannung können sich diese Absolutwerte nicht ändern, wenn man die Weißschen Bezirke vor dem Anlegen der Spannung durch 180°-Umklappungen so umgruppiert, daß man den Zustand der sogenannten magnetischen 50%-Remanenz erhält. In diesem Zustand, der sich z. B. nach dem An- und Wiederabschalten eines Magnetfeldes einstellen kann, bilden alle Magnetisierungsvektoren einen Winkel von höchstens 90° mit der Richtung des vorhanden gewesenen Magnetfeldes, doch befinden sich noch alle Bezirke in der energetisch tiefsten Lage, da keine 90°-Umklappungen gegenüber dem Ausgangszustand vorliegen. Nach dieser Umgruppierung ist der Stoff jedoch äußerlich magnetisiert, so daß nunmehr beim Anlegen der Spannung eine äußere Magnetisierungsänderung ΔJ entsteht, nämlich die bekannte Änderung der magnetischen Remanenz durch elastische Spannung.

Den Energieverlust bei einer Schwingung können wir nun folgendermaßen abschätzen. Wir setzen voraus, daß nach dem Entfernen der Spannung die Magnetisierungsänderung ΔJ ihrerseits mit einer ebenso

¹⁾ Die Gleichungen der folgenden Rechnung sind Größengleichungen im Sinne des AEF. (s. ETZ. 62, 765, 1941). Dabei ist der Zusammenhang zwischen Induktion \mathfrak{B} und Magnetisierung J gegeben durch $\mathfrak{B} = \mu_0 (H + J)$ (μ_0 = Permeabilität des leeren Raumes).

großen Remanenz behaftet sei, wie sie bestehen würde, wenn vom entmagnetisierten Zustand ausgehend dieselbe Magnetisierungsänderung durch ein magnetisches Feld erzeugt worden wäre. Der Energieverlust je Schwingung ist dann durch Gl. (7) bestimmt.

Für die Änderung der magnetischen 50%-Remanenz durch eine in Richtung eines vorher vorhanden gewesenen Magnetfeldes wirkende, gleichförmige kleine Spannung σ gibt es zwei verschiedene, theoretisch abgeleitete Beziehungen. Wird die Magnetisierung überwiegend durch die Kristallenergie festgehalten, so ergibt sich rechnerisch¹⁾

$$\Delta J = \frac{9}{16 \mu_0} \frac{|\lambda_l| x_a}{J_s} \sigma. \quad (8)$$

Darin ist λ_l die Sättigungsmagnetostriktion in der Richtung leichtester Magnetisierbarkeit, J_s die technische Sättigungsmagnetisierung. Ist jedoch die Wirkung der Kristallenergie geringer als die Bindung durch innere Gitterspannungen und Einlagerungen, so erhält man die Gleichung²⁾

$$\Delta J = \frac{9}{8 \mu_0} \frac{|\lambda_m| x_a}{J_s} \sigma. \quad (9)$$

λ_m ist die Sättigungsmagnetostriktion des isotropen Polykristalls, die durch den Mittelwert³⁾

$$\lambda_m = 1/5 (2 \lambda_{100} + 3 \lambda_{111}) \quad (10)$$

(λ_{100} = Magnetostriktion in der Kristallrichtung [100], λ_{111} = Magnetostriktion in der Richtung [111]) gegeben ist.

Bei Ableitung der Gln. (8) und (9) ist vorausgesetzt, daß an der Magnetisierungsänderung durch kleine Felder nur in unwesentlichem Maße 180°-Übergänge beteiligt sind. Wir brauchen diese Annahme auch bei der oben getroffenen Voraussetzung gleicher Remanenz bei der mechanisch und der magnetisch erzeugten Magnetisierungsänderung. Leider liegen bisher keine Untersuchungen vor, aus denen entnommen werden kann, ob und wieweit diese Voraussetzung allgemein erfüllt ist. Nur an einer Legierung aus 60% Nickel und 40% Eisen wurde gezeigt, daß die Stellen möglicher 180°-Wände nur in geringem Maße wirklich mit Wänden besetzt sind⁴⁾, so daß in diesem Fall mit einer gegenüber den 90°-Übergängen vernachlässigbaren Wirkung der 180°-Übergänge zu rechnen ist.

¹⁾ W. Döring, ZS. f. Phys. 114, 579, 1939. — ²⁾ M. Kersten, ebenda 82, 723, 1933. — ³⁾ R. Becker, WVS. 11, 1, 1932. — ⁴⁾ M. Kersten, ZS. f. techn. Phys. 19, 546, 1938.

Wir werden die Dämpfung aus beiden Gl. (8) und (9) berechnen, doch werden wir für den Vergleich zwischen Rechen- und Meßergebnissen weiter unten die Gl. (9) zugrunde legen. Es wird sich nämlich zeigen, daß die zur Prüfung der Rechnung benutzten Versuchsunterlagen an Stoffen gemessen wurden, bei denen die Wirkung der Kristallenergie etwa ebenso groß ist wie die Wirkung der Gitterspannungen. Nach Ausweis vorliegender Versuche¹⁾ folgt die Remanenzverschiebung durch mechanische Spannung in diesem Fall entweder der Gl. (9) oder, wenn Abweichungen zwischen den Meßergebnissen²⁾ und der Gl. (9) auftreten, dann liegen diese nicht im Sinne der Gl. (8).

Unter der Voraussetzung gleicher Remanenz für die durch ein Feld und die durch eine Spannung erzeugte Magnetisierungsänderung ergibt sich aus (9) und (7)

$$F = \frac{8\mu_0}{3} \frac{\nu \Delta J^3}{\alpha_a^3} = \frac{243}{64\mu_0^3} \frac{\nu |\lambda_m|^3}{J_s^3} \sigma^3. \quad (11)$$

Das Dämpfungsdekrement mechanischer Schwingungen ist definiert durch

$$\vartheta = \frac{F}{E\lambda^2} \quad (12)$$

(E = Elastizitätsmodul). Mit

$$\sigma = E\lambda \quad (13)$$

ergibt sich für kleine Schwingungsweiten λ die magnetomechanische Hysteresedämpfung im Fall überwiegender Wirkung der Gitterstörungen zu

$$\vartheta_m = \frac{243}{64\mu_0^3} \frac{\nu |\lambda_m|^3 E^2}{J_s^3} \lambda. \quad (14)$$

Tritt jedoch die Festhaltung der spontanen Magnetisierung durch die Gitterstörungen zurück gegenüber der Wirkung der Kristallenergie, so lautet die Beziehung

$$\vartheta_m = \frac{243}{512\mu_0^3} \frac{\nu |\lambda_1|^3 E^2}{J_s^3} \lambda. \quad (15)$$

Wollen wir in Gl. (14) ν in Ø^{-1} , J_s in $4\pi \text{Ø}^3$, E in kg/mm^2 einsetzen, so lautet die diesen Einheiten zugeordnete Zahlenwertgleichung

$$\vartheta_m \approx 3,0 \cdot 10^{15} \frac{\nu |\lambda_m|^3 E^2}{J_s^3} \lambda. \quad (16)$$

¹⁾ M. Kersten in „Beiträge zur Ballistik und technischen Physik“, herausgegeben von H. Schardin, Leipzig 1938, S. 191; G. Thiessen, Ann. d. Phys. (V) 38, 153, 1940. — ²⁾ F. Förster u. K. Stambke, ZS.f. Metallkde. 33, 97, 1941.

— ³⁾ Bisher wird im allgemeinen statt J die Größe $\mu_0 J$, gemessen in $4\pi \text{Gauß} = 1 \text{ el. magn. CGS-Einheit}$, angegeben. Der Zahlenwert von J , gemessen in $4\pi \text{Ørsted}$, stimmt praktisch überein mit dem Zahlenwert von $\mu_0 J$, gemessen in $4\pi \text{Gauß}$ (siehe ETZ. 62, 765, 1941). Ebenso ist der Zahlenwert von ν , gemessen in Ørsted^{-1} , gleich dem Wert von ν , gemessen in der bisher üblichen Einheit Gauß/Ørsted^{-2} .

So haben wir die gewünschte Beziehung zwischen magnetischem und mechanischem Rayleigh-Gesetz erhalten. Gl. (14) und (15) zeigen, daß die magnetomechanische Dämpfung der Rayleighschen Hysteresekonstante ν proportional ist. Von den in den Gleichungen enthaltenen Größen sind nur die mittlere Sättigungsmagnetostriktion λ_m und die Sättigungsmagnetisierung J_s als reine Werkstoffkonstanten anzusehen. E ist nur noch näherungsweise unempfindlich gegen Gitterstörungen, während ν in außerordentlich starkem Maße vom Werkstoffzustand abhängt. Leider ist es bisher nicht gelungen, ν auf Werkstoffkonstanten zurückzuführen, da bekanntlich das quadratische Rayleigh-Gesetz der Magnetisierungskurve bisher jeder physikalischen Deutung widerstanden hat. Auch das von F. Preisach angegebene Hysteresemodell¹⁾ ermöglicht keine Berechnung von ν .

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die der Rechnung zugrunde gelegte Voraussetzung gleich großer Remanenz der magnetisch und der mechanisch erzeugten Magnetisierungsänderung nur als Näherung anzusehen ist, selbst wenn magnetisch keine 180°-Übergänge stattfinden. Bei pauschal gleicher erzeugter Magnetisierung ist nämlich die Verteilungsänderung in den verschiedenen gerichteten Bezirken in beiden Fällen nicht gleich, da die Energie der spontanen Magnetisierung gegenüber dem angelegten Feld nicht von derselben Funktion des zwischen beiden vorhandenen Winkels abhängt wie die Energie der magnetostriktiven Verzerrung gegenüber der mechanischen Spannung. Es wird später versucht werden, diese Abweichungen rechnerisch zu berücksichtigen. Ein größerer Fehler der Abschätzung ist zu erwarten, wenn am Magnetisierungsvorgang bei kleinen Feldstärken schon 180°-Übergänge in nennenswertem Maße teilnehmen, und wenn diese auch noch wesentlich zur Remanenz kleiner Schleifen beitragen. Die aus den Gleichungen berechnete Dämpfung sollte in diesem Fall größer sein als die gemessene.

Prüfung der abgeleiteten Beziehungen an Hand vorliegender Meßergebnisse.

Eine einwandfreie Prüfung der Beziehung (14) ist nur möglich, wenn die magnetomechanische Dämpfung und die magnetischen Werte an ein und derselben Probe gemessen werden, denn die Hystereseeigenschaften eines Stoffes hängen, wie erwähnt, in außerordentlich starkem Maße vom Werkstoffzustand ab. ν kann durch Walz- oder

¹⁾ F. Preisach, ZS. f. Phys. 94, 277, 1935.

Glühbehandlung um mehrere Zehnerpotenzen geändert werden. Da jedoch Messungen dieser Werte an denselben Proben nicht vorliegen, konnten die im Schrifttum angegebenen Dämpfungswerte nur verglichen werden mit Rechnungswerten, die an möglichst ähnlich behandelten Proben gewonnen wurden. Doch bietet selbst die Anwendung gleicher Glühtemperatur keine hinreichende Sicherheit, da auch die vorhergehende Behandlung und die Reinheit der Meßproben die magnetischen Werte noch wesentlich beeinflussen. Ferner enthält Gl. (14) die mittlere Magnetostriktion in der dritten Potenz. Hierin steckt eine weitere Unsicherheit bei der Prüfung der Beziehungen, denn bisher sind weder die in Gl. (10) einzusetzenden Magnetostriktionswerte der Einkristalle sicher bekannt, noch die Magnetostriktion der isotropen Polykristalle, da die bei Messungen der polykristallinen Magnetostriktion benutzten Proben oft z. B. infolge von Textureinflüssen magnetisch anisotrop waren. Mehr als eine größenordnungsmäßige Bestätigung der angegebenen Gleichungen ist also auf diesem Wege nicht zu erwarten.

Zum Vergleich zwischen Rechen- und Meßergebnissen können besonders die von Förster und Köster¹⁾ mitgeteilten Versuchsergebnisse über die amplitudenabhängige Dämpfung transversal schwingender Eisen-Nickelstäbe dienen. Die Abb. 3 der genannten Arbeit zeigt die Schwingungsdämpfung bei verschiedenen Schwingungsweiten zwischen $37 \cdot 10^{-6}$ mm und $94 \cdot 10^{-6}$ mm. Die Meßwerte folgen, wie bereits früher gezeigt wurde²⁾, dem Gesetz

$$\vartheta = \vartheta_a + \vartheta_m$$

(ϑ_a = Dämpfung bei der Amplitude Null) mit

$$\vartheta_m = c \lambda.$$

Die Länge der bei 700° geglühten Proben war 20 cm; ihr Durchmesser betrug 0,8 cm. Aus diesen Angaben läßt sich berechnen, daß eine Amplitude von $34 \cdot 10^{-6}$ mm einer größten Randdehnung des schwingenden Stabes von $\lambda = 10^{-7}$ entspricht. Da jedoch bei einem schwingenden Stab die Spannung, also auch die Dämpfung ϑ_m nicht gleichförmig sind, ist an diesem Wert eine Verbesserung anzubringen. Wir können für deren Berechnung die Biegungslinie des schwingenden Stabes mit hinreichender Näherung durch eine sinus-Linie ersetzen. Dann ergibt sich ein Korrekturfaktor von $\pi/2$. Weiter ist zu beachten,

¹⁾ F. Förster u. W. Köster, Naturwiss. 25, 436, 1937. — ²⁾ M. Kornetzki, WVS. 17, 48, 1938.

daß das von Förster und Köster zur Bestimmung der Dämpfung verwendete Halbwertsbreitenverfahren bei amplitudenabhängiger Dämpfung nicht den richtigen Wert liefert, sondern bei linearer Abhängigkeit der Dämpfung von der Schwingungsweite einen etwa 15 % höheren Wert¹⁾. Unter Berücksichtigung dieser Verbesserungen ist für den Vergleich zwischen Rechnung und Versuchsergebnissen einer mittleren Dehnung $\lambda = 10^{-7}$ in diesem Falle eine Schwingungsweite von $46 \cdot 10^{-6}$ mm zuzuordnen.

Da anscheinend Messungen der magnetischen Rayleigh-Konstanten von Eisen-Nickellegierungen im geglühten Zustand bisher nicht veröffentlicht sind, wurden diese Werte teils an Bändern, teils an Drähten gemessen. Die Proben erhielten die Schlußglühung in Wasserstoff nach 50 %iger Kaltverformung. Die Glühtemperaturen betrugen 700° C mit anschließender langsamer Abkühlung im Ofen und 800° C mit schnellerer Abkühlung auf einer etwa 5 mm starken, metallenen Glühunterlage im kalten Teil des Ofens. Die Permeabilität μ_a und der Hysteresekoeffizient h wurden ballistisch bestimmt und aus beiden die Hysteresekonstante ν berechnet²⁾. Nur bei Nickel wurden bereits vorliegende Werte benutzt, die mit der Wechselstrombrücke an bei 500 und 1100° geglühten Bändern gemessen waren³⁾. Diese Werte sind in der Tabelle 1 zusammengestellt. Mit den bereits bekannten Werten der magnetischen Sättigung⁴⁾ der Sättigungsmagnetostriktion λ_s ⁵⁾ und des Elastizitätsmoduls E ⁶⁾ wurde dann die nach Gl. (14) zu erwartende magnetische Zusatzdämpfung ϑ_m für eine Dehnung $\lambda = 10^{-7}$ berechnet. Diese berechneten Werte sind in Fig. 1 über dem Nickelgehalt der Proben dargestellt und mit den in der oben angegebenen Weise aus den Förster-Kösterschen Messungen⁶⁾ entnommenen Werten verglichen. In Fig. 1 sind ferner die Dämpfungswerte eingezeichnet, die nach Gl. (3) aus der von Förster und Köster gemessenen Amplitudenabhängigkeit des Elastizitätsmoduls berechnet wurden.

Man erkennt, daß die Kurve, welche für die bei 800° geglühten Proben berechnet ist, den allgemeinen Verlauf der von Förster und Köster an bei 700° geglühten Proben gemessenen Werte mit Ausnahme

¹⁾ M. Kornetzki, WVSW. 17, 48, 1938. — ²⁾ W. Deutschmann, ENT. 9, 430, 1932. — ³⁾ Unveröffentlichte Messungen von H. Schulze. — ⁴⁾ T. D. Yensen, Journ. Frankl. Inst. 199, 333, 1925. — ⁵⁾ Siehe die Zusammenstellung bei R. Becker u. W. Döring, Ferromagnetismus, S. 281. Berlin 1939. — ⁶⁾ F. Förster u. W. Köster, Naturwiss. 25, 436, 1937.

Tabelle 1. Zur Berechnung der Dämpfung benutzte magnetische Werte
von Eisen-Nickellegierungen.

Legierung Ni/Fe	Gleich- temperatur °C	Abkühlung	μ_a μ_0	h cm/kA	ν Ø ⁻¹	J_s 4 π Ø	$ A_m $ 10 ⁻⁶	E 10 ⁴ kg/mm ²	ϑ_m für $\lambda = 10^{-7}$		$\frac{3}{2} \lambda_m \sigma_i$ 10 ³ erg/cm ³	W 10 ³ erg/cm ³
									berechnet	gemessen		
40/60	800	schnell	2000	6000	1300	1120	15	1,75	$3,8 \cdot 10^{-4}$		2,6	10
	700	langsam	2000	6000	1300				$3,8 \cdot 10^{-4}$	$0,8 \cdot 10^{-4}$		
50/50	800	schnell	1700	7000	1300	1200	23	1,6	$7 \cdot 10^{-4}$		3,8	8
	700	langsam	1800	4100	800				$4,3 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$		
60/40	800	schnell	4800	18000	9000	1120	20	1,67	$4,5 \cdot 10^{-3}$		1	5
	700	langsam	1200	3500	450				$2,2 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-3}$	4,5	
70/30	800	schnell	3000	14000	4400	1000	14	2,0	$1,5 \cdot 10^{-3}$		1,4	2
	700	langsam	1300	2000	280				$1,0 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$	3,3	
80/20	800	schnell	4500	12000	5700	850	4	2,15	$8,7 \cdot 10^{-5}$		0,7	1
	700	langsam	3100	5200	1700				$2,6 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	0,9	
90/10	800	schnell	1500	13000	2000	650	10	2,2	$1,2 \cdot 10^{-3}$		1,1	3
	700	langsam	1250	8000	1050				$6 \cdot 10^{-4}$	$0,9 \cdot 10^{-4}$	1,4	
100/0	1100	langsam	130	1400	19	500	33	2,1	$5,6 \cdot 10^{-4}$		7,5	6
	500	schnell	72	700	5,3				$1,5 \cdot 10^{-4}$	$3,9 \cdot 10^{-4}$	13	

des Ausreißers bei 90 % Nickel ungefähr wiedergibt. Die für 700° Glüh-temperatur berechnete Kurve liegt bis zu einer Größenordnung unter der für 800° berechneten. Dies zeigt, daß die Dämpfung sehr stark von der Probenvorbehandlung abhängt. Die größenordnungsmäßig richtige Wiedergabe der gemessenen Dämpfungswerte ist unter den vorliegenden Bedingungen als sehr befriedigend anzusehen. Ob die Abweichungen zwischen Meß- und Rechenergebnissen von Anisotropiewirkungen, vorhandenen 180°-Übergängen oder anderen Einflüssen

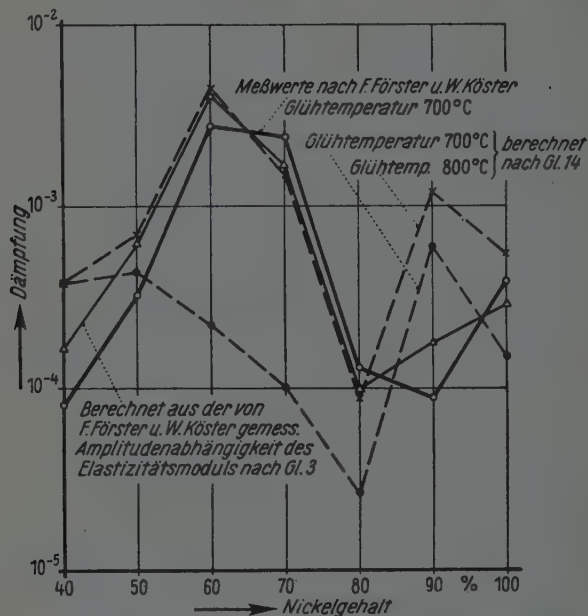


Fig. 1. Dämpfung mechanischer Schwingungen durch magnetische Hysterese bei Eisen-Nickel-Legierungen. Dehnungsamplitude 10^{-7} .

herrühren, ist noch nicht zu entscheiden. Genauere Aufschlüsse sind erst zu erwarten, wenn die magnetischen Werte und die Dämpfung an derselben Probe gemessen werden.

Tabelle 1 enthält in den letzten Spalten noch die Energie der inneren Gitterspannungen $3/2 \lambda_n \sigma_i$ (σ_i = Mittelwert der inneren Spannungen), die aus der gemessenen Anfangspermeabilität¹⁾ berechnet wurde, und den durch die Kristallenergie bedingten Energieunterschied W zwischen den Richtungen schwerster und leichtester Magnetisierbarkeit²⁾, d. h.

¹⁾ R. Becker u. M. Kersten, ZS. f. Phys. 64, 660, 1930. — ²⁾ J. D. Kleis, Phys. Rev. 50, 1178, 1936.

die Differenz zwischen den Magnetisierungsarbeiten in diesen beiden Richtungen. Man erkennt aus diesen Zahlen, daß bei den untersuchten Proben beide Energiewerte in gleicher Größenordnung liegen, daß es also berechtigt war, die Remanenzverschiebung nach Gl. (9) zu berechnen.

Ferner liegen Messungen der Schwingungsdämpfung von Nickel in Abhängigkeit von der Temperatur vor, und zwar von Snoek¹⁾ und von Möbius²⁾. In beiden Fällen handelt es sich um die Dämpfung von Torsionsschwingungen. Snoek gibt für seine Meßproben keine Glühtemperatur an, während die Möbiussche Probe kurzzeitig bei 550° geglüht war. Da die Temperaturabhängigkeit der Sättigungsmagnetostriktion³⁾ und des Elastizitätsmoduls⁴⁾ von Nickel bekannt sind, konnte mittels ebenfalls vorliegender Werte der Permeabilität und des Hysteresebeiwertes⁵⁾ die zu erwartende Schwingungsdämpfung des Nickels zwischen - 50° C und + 200° C nach Gl. (14) berechnet werden. In Tabelle 2 sind die benutzten magnetischen Werte zusammengestellt. Der hierbei verwendete, von Döring gemessene Wert $2,95 \cdot 10^{-5}$ für die Sättigungsmagnetostriktion von Nickel bei + 20° weicht zwar von dem sonst meist angenommenen Wert $3,3 \cdot 10^{-5}$ etwas ab, bisher ist jedoch nicht bekannt, welcher Wert als wirklich richtig anzusehen ist⁶⁾. Leider ist bei den Messungen von Möbius die Länge des verwendeten Nickeldrahtes nicht angegeben, doch kann sie auf Grund der Apparategrößen zu etwa 70 cm angesetzt werden. An den Meßwerten ist zur

Tabelle 2. Magnetische Werte von Nickel in Abhängigkeit von der Temperatur.

Meß- temperatur °C	Glüh- temperatur °C	μ_a μ_0	h cm/kA	ν G^{-1}	J_s $4 \pi \text{ G}$	$ \lambda_m $ 10 ⁶	E 10 ⁴ kg/mm ²	δ_m für $\lambda = 10^{-5}$ berechnet
- 50	1100	80	1300	11	495	31	2,15	0,039
	500	47	900	4,4				0,016
+ 20	1100	130	1400	19	480	2,95	2,09	0,061
	500	72	700	5,3				0,017
+ 90	1100	230	1600	39	455	27	1,94	0,093
	500	115	600	7,2				0,017
+ 150	1100	360	1800	68	430	24	1,86	0,12
+ 200	500	150	600	9,5	400	21	1,78	0,013

¹⁾ J. L. Snoek, Physica 8, 745, 1941. — ²⁾ W. Möbius, Phys. ZS. 35, 806, 1934; vgl. Fig. 6 und 7. — ³⁾ W. Döring, ZS. f. Phys. 103, 560, 1936. — ⁴⁾ S. Siegel u. S. L. Quimby, Phys. Rev. 49, 663, 1936. — ⁵⁾ Unveröffentlichte Messungen von H. Schulze. — ⁶⁾ Siehe die Zusammenstellung bei R. Becker u. W. Döring, Ferromagnetismus, S. 279. Berlin 1939.

Berücksichtigung der ungleichförmigen Torsionsspannung ein Korrekturfaktor von $5/4$ anzubringen.

Fig. 2 zeigt die gemessenen und die nach Gl. (14) berechneten Werte der Schwingungsdämpfung. Die Werte sind auf eine Dehnung von 10^{-5} bezogen. Auch in diesem Fall zeigt sich eine in Anbetracht der zu erwartenden Unsicherheit befriedigende Übereinstimmung.

Solange nicht Messungen der Schwingungsdämpfung und der magnetischen Werte an derselben Probe vorgenommen werden, wird

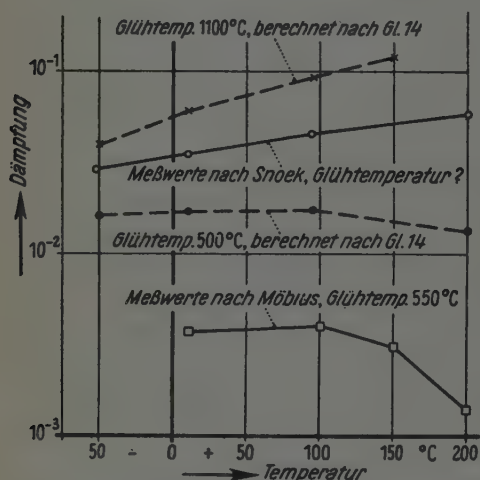


Fig. 2. Temperaturabhängigkeit der Dämpfung mechanischer Schwingungen durch magnetische Hysterese. Nickel, Dehnungsamplitude 10^{-5} .

es nicht möglich sein, die wirkliche Genauigkeit der mitgeteilten Abschätzung zu beurteilen. Als Beispiel sei nur darauf hingewiesen, daß an weichgeglühtem Nickel auch wesentlich höhere Permeabilitäten als die in den Tabellen angegebenen gemessen werden, und zwar bis etwa 350 Gauß/Örsted. Ein solches Nickel müßte entweder eine höhere Dämpfung haben oder am

Magnetisierungsvorgang müßten schon bei kleinen Feldern wesentlich 180°

Übergänge mitwirken. Schließlich besteht noch die Möglichkeit, daß man bei geringen Eigenspannungen doch noch in den Geltungsbereich der Gl. (15) kommt, die im Fall des Nickels dann bei gleichem ν einen etwa 18mal kleineren Wert für ϑ_m liefert ($\lambda_1 \approx 2,5 \cdot 10^{-5}$). Es wird besonders wichtig sein, diese Größen in Abhängigkeit von der Stärke einer plastischen Verformung zu messen. Da bei hohen Verformungen, die zu großen Eigenspannungen führen, die 90°-Übergänge wesentlich zurücktreten gegenüber den 180°-Übergängen und Drehungen der spontanen Magnetisierung, wird es in einem solchen Fall besonders gut möglich sein, die von der Vernachlässigung der 180°-Übergänge herrührenden Fehler zu erkennen.

Aus Gl. (14) kann man schließen, daß jede Werkstoffbehandlung, durch welche die Rayleighsche Hysteresekonstante vermindert

wird, auch zu einer Abnahme der Hysteresedämpfung führen wird. Diese Folgerung wird qualitativ bestätigt durch die Feststellung, daß bei einer 60%igen Eisen-Nickellegierung eine Reckung um 2% die amplitudenabhängige Hysteresedämpfung praktisch völlig beseitigt¹⁾. Statt durch Reckung wird man diese Dämpfungsverminderung im allgemeinen auch durch Kaltwalzen oder durch Ausscheidungshärtung erzielen können.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die magnetomechanische Hysteresedämpfung nur bei kleinen Dehnungen geradlinig mit der Amplitude wachsen kann. Da der magnetomechanische Hystereseverlust F [siehe Gl. (11)] nicht beliebig anwachsen kann, sondern schließlich einem Grenzwert F_{max} zustrebt, wird bei größeren Dehnungen der Dämpfungsanstieg flacher werden, entsprechend dem Verlauf des magnetischen Hystereseverlustwinkels mit der magnetischen Feldstärke. Schließlich wird die Dämpfung wieder abnehmen. Dieser Dämpfungsabfall bei hohen Amplituden ist aus früher veröffentlichten Aufnahmen von Torsionsschwingungen eines Nickeldrahtes zu erkennen^{2) 3)}.

F wird seinen Höchstwert F_{max} etwa dann erreichen, wenn die Dehnungsspannungen die Größenordnung der Eigenspannungen erreicht haben. Hier sollte also etwa die Dämpfung ihren Höchstwert haben, der nach Gl. (12) [unter Berücksichtigung von Gl. (13)] durch folgende Beziehung gegeben sein wird:

$$\vartheta_{max} \approx \frac{F_{max} E}{\sigma_i^2} \quad (17)$$

Da F_{max} bei harten Werkstoffen nicht wesentlich größer sein wird als bei weichen, oder wenigstens schwächer ansteigen wird als σ_i^2 , kann man aus Gl. (17) folgern, daß bei weichen Werkstoffen ϑ_{max} größer ist als bei harten. Ferner wird ein weicher Werkstoff den Dämpfungshöchstwert schon bei geringeren Amplituden erreichen als ein harter.

¹⁾ F. Förster u. W. Köster, Naturwiss. 25, 436, 1937. — ²⁾ R. Becker und M. Kornetzki, ZS.f. Phys. 88, 634, 1934. — ³⁾ Siehe auch T. Hibi, Sci. Rep. Toh. Univ. 28, 450, 1940.

(Mitteilung aus dem Stromrichterwerk der Siemens-Schuckertwerke,
Berlin-Siemensstadt.)

Das Abklingen von Trägerdichte und Elektronen- temperatur in verlöschenden Niederdruckentladungen.

Von G. Mierdel in Berlin.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 20. April 1943.)

In einem nach Kurzschließen einer Niederdruckentladung absterbenden Hg-Plasma werden Trägerdichte und Elektronentemperatur gemessen, und zwar der geometrischen Übersichtlichkeit wegen in einem zylindrischen Entladungsröhr. Es ergibt sich für geringe Gasdichte ($p < 10$ mTorr) eine quantitative Übereinstimmung mit Folgerungen aus der Diffusionstheorie der Säule. Bei höheren Dichten scheint Volumrekombination mitzuwirken. Die Elektronentemperatur sinkt sehr schnell auf etwa 2000° K und fällt dann sehr viel langsamer ab. Es wird angenommen, daß in diesem Stadium die Elektronen durch die noch im Plasma verbliebenen metastabil angeregten Hg-Atome aufgeheizt werden. Aus der hierfür geltenden Energiebilanz läßt sich die Ausbeute der Stöße II. Art berechnen. Sie folgt zu $1,8 \cdot 10^{-3}$. Ein dynamischer Anteil des Sondenstromes, wie er infolge des Wachsens der Langmuir-Schicht zu erwarten wäre, tritt hier quantitativ nicht in Erscheinung.

1. Einleitung.

Wenn man einer Entladung durch plötzliches Kurzschließen der Elektroden die Brennspannung nimmt, so erlischt sie, wobei die den Zustand der Entladungsstrecke beschreibenden Parameter wie Trägerdichte, Elektronentemperatur usw. nicht trägheitsfrei in die neuen, der Stromstärke $i = 0$ zukommenden Werte übergehen, sondern dazu eine bestimmte Zeit benötigen. Am übersichtlichsten liegen die Verhältnisse im Plasma einer Niederdruckentladung, wo die schon vorhandenen theoretischen Ansätze (Diffusionstheorie der Säule) gewisse Hinweise für den Mechanismus des Abklingens geben. Die auf diesem Gebiete bereits vorliegenden Ergebnisse¹⁻¹⁰⁾ sind nicht immer frei vom Einfluß der Elektroden und deshalb nicht ohne weiteres rechnerisch auswertbar. In der vorliegenden Untersuchung wurde daher durch Verwendung

¹⁾ C. Eckart, Phys. Rev. 26, 454, 1925. — ²⁾ I. Hayner, ZS. f. Phys. 35, 365, 1926. — ³⁾ J. v. Issendorff, ETZ. 50, 1079, 1929. — ⁴⁾ C. Kenty, Phys. Rev. 32, 624, 1928. — ⁵⁾ W. Koch, ZS. f. techn. Phys. 16, 464, 1935; 17, 446, 1936. — ⁶⁾ F. L. Moler, Journ. of Res., Bur. of Stand. 10, 447, 1937. — ⁷⁾ M. L. Pool, Phys. Rev. 30, 848, 1927. — ⁸⁾ R. G. Rendall u. H. Webb, ebenda 48, 544, 1935. — ⁹⁾ H. Webb u. D. Sinclair, ebenda 37, 182, 1931. — ¹⁰⁾ W. L. Granowsky, Bull. de l'Acad. des Sciences de l'URSS. 1938, S. 419.

eines im Vergleich zum Durchmesser langen Entladungsrohres jeglicher Elektrodeneinfluß ausgeschaltet und unter Verhältnissen gearbeitet, die den unmittelbaren Anschluß an die Theorie der Diffusionssäule ermöglichen.

2. Meßverfahren.

Gemessen wurde Trägerdichte n ($= n^+ = n^-$) und Elektronentemperatur T^- in einer erlöschenden Niederdrucksäule in Hg-Dampf bei Rohrweiten von 4 bis 5,6 cm und Strömen (im stationären Zustand) von 1 bis 3 Amp.

Die Messung der *Trägerdichte* geschah in der Weise, daß der durch eine negativ geladene Sonde abfließende Strom oszillographiert wurde. Die Dichte dieses Stromes ist

$$j^+ = \frac{n^+ v^+ \cdot e}{4}. \quad (1)$$

Unter der Annahme, daß sich die Ionentemperatur und damit auch v^+ während des Abklingens nicht wesentlich ändert, kann man also die Trägerdichte jeweils dem von der Sonde aufgenommenen Strom proportional setzen. Die Sonde selbst bestand entweder aus einem der Innenwand des Glasrohres anliegenden Eisenblechring von etwa 1 cm Höhe, oder aus einer normalen in der Rohrachse befindlichen freien Drahtsonde. Die zunächst verwendete Schaltung (Anordnung *A*) zeigt Fig. 1. Durch Einlegen des prellfreien Schalters *S* werden die beiden Stromtore *St I* und *St II* gleichzeitig gezündet. Durch *St I* wird damit der Speisekreis der Hauptentladung kurzgeschlossen, d. h. die Anodenspannung der letzteren wird plötzlich, nämlich innerhalb der Zündzeit des Stromtores, auf den Wert 0 heruntergerissen. Eine in den Hauptstromkreis eingelegte Akkubatterie von 12 Volt dient zur Kompensation der Brennspannung von *St I*. Der Sonden- bzw. Ringstrom fließt über einen Widerstand zur Erde, dessen Spannungsabfall nach entsprechender Verstärkung den Ablenkplatten einer Braunschen Röhre zugeführt wird.

Das Stromtor *St II* schließt einen *RC*-Kreis kurz, der die Zeitablenkung der Braunschen Röhre betätigt. Das Verfahren läßt sich auch für Wechselstrombetrieb anwendbar machen. Dabei ist der Schalter *S* durch einen in der Phasenlage geeignet liegenden Transformator zu ersetzen. Man erhält auf diese Weise auf dem Leuchtschirm stehende Bilder des Abklingvorganges. Da das Abklingen zum mindesten im ersten Stadium, d. h. bei Trägerdichteänderungen im Verhältnis

etwa 1:30 recht genau exponentiell erfolgte, kann durch geeignete Wahl der Zeitkonstanten des Zeitkreises die Abklingkurve auf dem Leuchtschirm zu einer geraden Linie gestreckt werden. Es ist dies eine

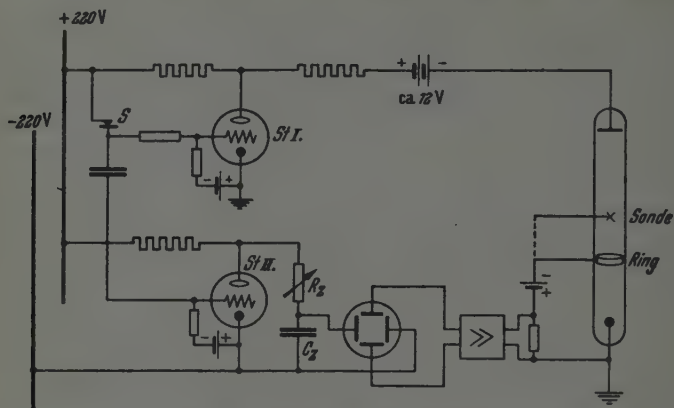


Fig. 1. Schaltung für die Messung der abklingenden Trägerdichte (Schaltung A).

sehr genaue und schnelle Methode zur Bestimmung der Anfangszeitkonstante; sie setzt allerdings einen linear arbeitenden Verstärker voraus.

Als Verstärker wurde in der Regel ein einstufiger Widerstandsverstärker benutzt mit 2 Röhren EL 12-Spezial in Gegentaktschaltung. Für Spezialzwecke wurde auch noch ein weiteres Rohr (REN 904) als Vorstufe vorgeschaltet.

Nach einem vollkommen andersartigen Verfahren arbeitet die Schaltung B (Fig. 2), die einem doppelten Zweck dient: Erstens einmal sollte mit ihr die *Trägerdichte* über sehr viel längere Zeiten hinaus verfolgt werden, und zwar bis zu so kleinen Sondenströmen herab, daß sie mit der Anordnung der Fig. 1 nicht mehr sicher zu messen sind, zweitens sollte durch Aufnahme von Sondenkennlinien die *Elektronentemperatur* während des Abklingens des Plasmas messend verfolgt werden. Zu diesem Zwecke war eine Schaltung gewählt, die die Messung des durch die Sonde fließenden Stromes jeweils nur während eines sehr kleinen Zeitintervalls ausführte, dessen Phasenlage gegenüber der Betriebswechselspannung der Hauptentladung beliebig eingestellt werden konnte. Der durch die Sonde fließende Strom erzeugt an R_s einen Spannungsabfall, der nach Zwischenschaltung einer geeigneten Kompensationsbatterie dem Steuergitter eines 2.-Gitterrohres R

(Type 110) zugeführt wird. Das Raumladegitter von R liegt an einer so hohen negativen Spannung, daß kein Strom durch R fließt. Durch einen besonderen Schaltkreis, nämlich Entladung eines gedämpften

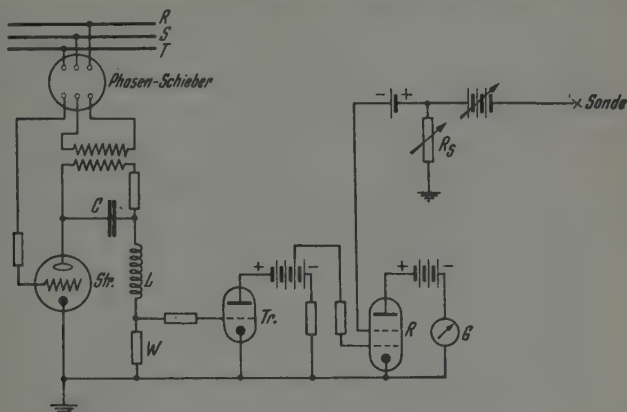


Fig. 2. Schaltung zur Messung der abklingenden Trägerdichte und Elektronentemperatur (Schaltung B).

Schwingungskreises über ein Stromtor Str und Verstärkung der über W abfallenden Impulsspannung durch eine Triode, erhält es jedoch in

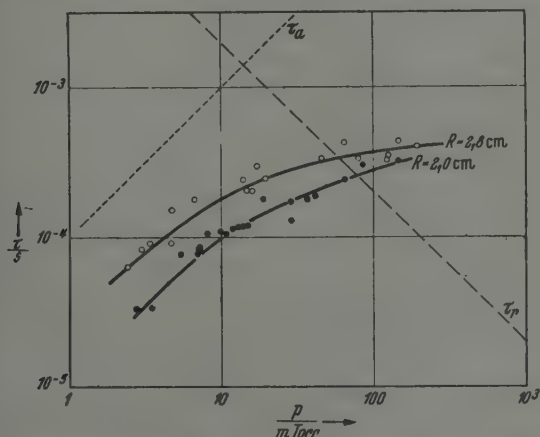


Fig. 3. Zeitkonstante des anfänglichen Trägerschwundes, der Dichte der metastabilen Atome (τ_a) und der Elektronentemperatur (τ_p).

einer bestimmten, mit Hilfe eines Phasenschiebers einstellbaren Phasenlage einen kurzen positiven Spannungstoß von etwa $20 \mu\text{s}$ Dauer, während dessen also das Rohr R „freigegeben“ wird. Der mit G ge-

gemessene Anodenstrom ist daher ein unmittelbares Maß für den jeweils zu dem ausgewählten Zeitpunkt fließenden Sondenstrom. Durch Veränderung des Widerstandes R_s läßt sich dieser Sondenstrom nach einem

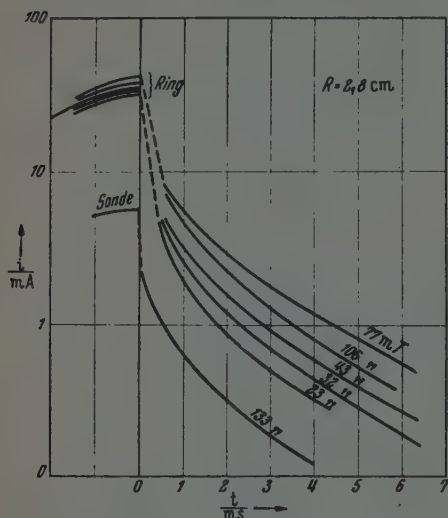


Fig. 4. Abklingen der Trägerdichte längere Zeit nach dem Ausschalten.

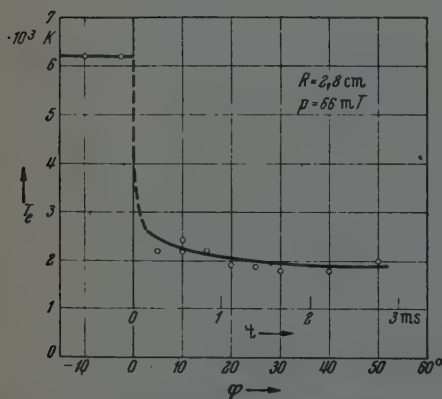


Fig. 5. Verlauf der Elektronentemperatur nach dem Abschalten der Entladung.

Nullverfahren messen, wobei man von der Form der Kennlinie von R unabhängig wird.

Mit diesem Verfahren läßt sich nun nicht nur das Abklingen der positiven Iondichte über mehrere Zehnerpotenzen hinweg verfolgen, sondern es lassen sich durch Veränderung der Sondenspannung auch vollständige Sondenkennlinien aufnehmen, die eine Ermittlung der Elektronentemperatur zu beliebig wählbaren Zeitpunkten nach dem Erlöschen der Hauptentladung erlauben.

3. Ergebnisse.

Die wesentlichen Ergebnisse sind in den Fig. 3 bis 5 zusammengestellt: Das Abklingen der Trägerdichte geht unmittelbar nach dem Abschalten nach einer Exponentialfunktion vor sich. Die Zeitkonstante steigt für kleine Gasdrucke p proportional mit p an, später jedoch sehr viel langsamer. Dies zeigen die Kurven Fig. 3 für zwei Rohrweiten ($R = 2,8$ bzw. $2,0$ cm).

Bei höheren Gasdrucken ($p > 15$ m Torr) sind die halblogarithmischen Abklingkurven — $\lg i$ gegen t — nicht mehr geradlinig, sondern nach oben konkav gebogen, d. h. der Trägerschwund folgt nicht mehr einem reinen Exponential-

gesetz. Als Beleg hierfür dienen die mit der Schaltung *B* aufgenommenen Kurven der Fig. 4. Nach Verlauf einer längeren Zeit hingegen werden die halblogarithmischen Abklingkurven wieder geradlinig, und zwar angenähert einander parallel. Das bedeutet, daß schließlich wieder das Exponentialgesetz für den Trägerschwund gilt, wobei die Zeitkonstante des Abklingens der Trägerdichte angenähert vom Gasdruck unabhängig und gleich $2,5 \cdot 10^{-3}$ s ist.

Die Elektronentemperatur im erlöschenden Plasma konnte nur bei höheren Gasdrucken ($p > 30$ mTorr) gemessen werden, da bei kleinen Drucken die Trägerdichte zu schnell abklingt. Sie nimmt den in Fig. 5 gezeigten Verlauf, der in seinem Abklingzweig ebenfalls nicht wesentlich vom Gasdruck abhängt.

4. Theoretische Überlegungen.

a) *Abklingen der Trägerdichte.* Die Diffusionstheorie der Säule verlangt einen exponentiellen Abfall der Trägerdichte, und zwar bei zylindrischem Entladungsrohr mit einer Zeitkonstanten¹⁾

$$\tau_n = \frac{R^2}{5,8 \cdot D_a} \quad (2)$$

Hierin ist R der Rohrradius und D_a der ambipolare Diffusionskoeffizient, für den die genannte Theorie liefert

$$D_a = \frac{D^+ b^- + D^- b^+}{b^+ + b^-}$$

Dieser Ausdruck geht für $b^+ \ll b^-$ über in

$$D_a = \frac{k}{e} \cdot \frac{b_1^+}{p} (T^+ + T^-), \quad (3)$$

wobei b_1^+ die Ionenbeweglichkeit für den Druck $p = 1$ Torr bedeutet ($k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ erg/grad).

Aus (2) und (3) folgt

$$\tau_n = \frac{R^2 \cdot e \cdot p}{5,8 k \cdot b_1^+ (T^+ + T^-)} \quad (4)$$

Aus (4) geht hervor, daß die Zeitkonstante nur soweit konstant ist, als dies für $T^+ + T^-$, also im wesentlichen für T^- gilt. Im übrigen sollte τ_n mit p proportional ansteigen.

Der experimentelle Befund (Fig. 3) zeigt, daß nur für kleine Drucke ($p < 10$ mTorr) die Zeitkonstante τ_n mit p proportional ansteigt. Auch gilt in diesem Gebiet die von der Theorie geforderte Beziehung

¹⁾ E. Spenke u. M. Steenbeck, Wiss. Veröff. d. Siemens-Konz. 15 (2), 18, 1936.

$\tau_n \sim R^2$ gut, so daß wir vermuten dürfen, daß hier die Diffusionstheorie anwendbar ist. Allerdings ist zum Verständnis des exponentiellen Trägerschwunds noch anzunehmen, daß $T^+ + T^-$, also im wesentlichen die Elektronentemperatur T^- , sich innerhalb der betrachteten Zeit, nämlich etwa innerhalb von drei Zeitkonstanten (entsprechend einer Abnahme von n um den Faktor 1 : 20), nicht merklich ändert.

b) *Abklingen der Elektronentemperatur.* Direkte Messungen des Absinkens der Elektronentemperatur T^- sind innerhalb dieser Zeitspanne nur schlecht durchführbar. Wir wollen daher eine Abschätzung durchführen: Die Elektronentemperatur der brennenden Entladung sei T_0^- bei einem Gasdruck p und einem Längsfeld E . Ist κ der „Stoßfaktor“, d. h. der Bruchteil der je Elektronenstoß abgegebenen kinetischen Energie, so folgt für das Abklingen der Temperatur von dem Augenblick an, in dem die Beschleunigung der Elektronen durch das Feld der Säule in Fortfall kommt, die Gleichung

$$d\left(\frac{3}{2} k T^-\right) = -\frac{v}{\lambda_1} \cdot p \cdot \kappa \cdot \frac{3}{2} k T^- \cdot dt,$$

woraus ein exponentielles Absinken von T^- folgt mit der Zeitkonstanten

$$\tau_T = \frac{\lambda_1}{v \cdot p \cdot \kappa}. \quad (5)$$

Nun ist τ_T jedoch nach dem Abschalten der Spannung keine Konstante, sondern nimmt wegen der Abnahme von v und namentlich von κ rasch zu. Einem anfänglichen Absinken der Temperatur mit einer Zeitkonstanten, die sich aus dem κ_0 der noch brennenden Entladung berechnet, schließt sich daher ein immer langsamer werdender Abfall an, der schließlich in einen exponentiellen Abfall übergeht mit einer Zeitkonstanten, die sich aus (5) berechnet, wenn man das elastische κ ($\kappa = 2 m/M = 5,5 \cdot 10^{-6}$) zugrunde legt. Dieser Endwert von τ_T ist in Fig. 3 in seiner Druckabhängigkeit durch die gestrichelte Gerade dargestellt.

Das κ_0 der noch brennenden Entladung berechnet sich in bekannter Weise aus der Energiebilanz der Säule (je Zeiteinheit):

$$\frac{e^2 \lambda}{m v} \cdot E^2 = \frac{v}{\lambda} \cdot \kappa_0 \cdot \frac{3}{2} k T^-,$$

die unter Einsetzen gemessener Werte von Feldstärke und Elektronentemperatur für $p = 5$ mTorr zu $\kappa_0 = 0,07$ und damit nach (5) zu $\tau_T = 1,4 \cdot 10^{-7}$ s als Zeitkonstante des anfänglichen Temperaturabfalls führt.

Die Elektronentemperatur nähert sich also sehr schnell dem Wert, bei dem die unelastischen Elektronenstöße gegenüber den elastischen keine Rolle mehr spielen. Von da an sinkt T^- nur noch langsam ab und zwar bei kleinen Gasdrucken, wie Fig. 3 zeigt, wesentlich langsamer als die Trägerdichte. Wir können sie also bezüglich des Trägerschwundes in erster Näherung als konstant ansehen und haben damit die Erklärung für den gemessenen exponentiellen Abfall der Trägerdichte bei kleinen Drucken.

Die Temperatursumme $T^- + T^+$ können wir aus den gemessenen τ_n -Werten nach (4) errechnen und erhalten hierfür: $T^+ + T^- = 3300^\circ \text{K}$, und zwar unter Benutzung des ziemlich unsicheren Wertes von $b_1^+ = 220 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ für die Beweglichkeit der positiven Ionen. Wenn wir die Ionentemperatur mit der Gastemperatur identifizieren dürfen, wäre $T^+ = 400^\circ \text{K}$ und damit $T^- = 2900^\circ \text{K}$ ein durchaus plausibler Wert als Grenzwert für die Vernachlässigung anregender und ionisierender Stöße. Als ambipolarer Diffusionskoeffizient (bezogen auf den Druck 1 Torr) errechnet sich aus den Messungen der Abklingzeit

$$D_a \approx 63 \text{ cm}^2/\text{s}.$$

Für Drucke oberhalb $p \approx 10 \text{ m Torr}$ versagt, wie Fig. 3 zeigt, die Beziehung $\tau_n \sim p$; wollte man trotzdem die Diffusionstheorie retten, müßte man nach (4) annehmen, daß die Elektronentemperatur T^- , die sich kurze Zeit nach dem Abschalten einstellt, mit dem Gasdruck p ansteigt. Z. B. müßte bei $p = 50 \text{ m Torr}$ die Elektronentemperatur über 10^4°K betragen. Das kann jedoch sicher nicht zutreffen, da in diesem Druckbereich die Elektronentemperatur der *brennenden* Säule bereits unter 6000°K gesunken ist. Man muß daher annehmen, daß bei höheren Drucken andere Ursachen für den Trägerschwund vorhanden sind, die eine mit steigendem Druck zunehmende Wirkung besitzen und die Träger schneller zum Verschwinden bringen, als dies die Wanddiffusion allein schafft.

Als naheliegende Ursache hierfür käme die Rekombination im Raum in Betracht. In diesem Sinne liegen auch die Abweichungen der halblogarithmischen $n(t)$ -Kurven von der Geradlinigkeit, wie sie beispielsweise in Fig. 4 in Erscheinung treten. Diese Abweichungen bestehen in einer nach oben konkaven Krümmung der Kurven. Eine quantitative Abschätzung der Rekombination ist jedoch nicht möglich, da der gleichfalls wirksame Diffusionsverlust sich dem Rekombinationsverlust überlagert und die Kombination beider rechnerisch noch nicht behandelt werden kann.

Ob die Rekombination zwischen Ionen und freien Elektronen erfolgt, oder vorwiegend über die Bildung negativer Ionen (gegebenenfalls unter Mitwirkung von geringen Verunreinigungen), bleibt dabei noch offen.

Verfolgt man den Trägerschwund über längere Zeiten hinweg (Fig. 4), so ergeben sich, wie oben erwähnt, schließlich halblogarithmische Geraden, d. h. die Trägerdichte klingt wieder exponentiell ab. Nach Verlauf einer längeren Zeit ist nämlich die Trägerdichte so weit abgeklungen, daß die Rekombination keinen merklichen Beitrag mehr zum Trägerschwund liefert, der jetzt also wieder nach dem Diffusionsgesetz erfolgt. Merkwürdigerweise ist jedoch nunmehr die Zeitkonstante des Abklingens praktisch unabhängig vom Gasdruck, nämlich etwa $\tau_n = 2,5 \cdot 10^{-3}$ s. Im Hinblick auf (4) bedeutet dies eine mit p angenähert proportional ansteigende Temperatursumme $T^+ + T^-$. Wir müssen unser Augenmerk daher auf den zeitlichen Verlauf der Trägertemperaturen, insbesondere der Elektronentemperatur, richten.

c) *Mitwirkung der metastabilen Atome.* Das Abklingen der Elektronentemperatur sollte nach obigen Überlegungen schließlich exponentiell erfolgen, und zwar mit einer der Gasdichte umgekehrt proportionalen Zeitkonstanten, die durch die gestrichelte Kurve der Fig. 3 gegeben ist. Dieses Ergebnis steht quantitativ im Widerspruch mit direkten Messungen der Elektronentemperatur, die bei höheren Drucken einen sehr viel langsameren Abfall derselben ergeben (Fig. 5).

Der Grund für diese Unstimmigkeit liegt wahrscheinlich im folgenden: Wir haben bis jetzt die Wirkung der *metastabilen Atome* außer acht gelassen, die auch noch im abklingenden Plasma einen Energiespeicher darstellen, von dem aus die Elektronen durch Stöße II. Art aufgeheizt werden. Wenn wir zunächst annehmen, daß die Lebensdauer τ_a der MS-Atome nur durch Wandstöße begrenzt wird, müssen wir für τ_a den (2) entsprechenden Ansatz

$$\tau_a = \frac{R^2}{5,8 D} = \frac{R^2 \cdot p}{5,8 D_1} \quad (6)$$

machen, wobei jetzt $D_1 = v \lambda_1 / 3$ zu setzen ist. v entspricht der Gas-temperatur ($\approx 400^\circ \text{K}$), für λ wollen wir in erster Näherung den Wert für normale Atome ($\lambda_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ cm bei $p = 1$ Torr) einsetzen und erhalten dann eine mit p proportionale Zeitkonstante τ_a , die als punktierte Gerade in Fig. 3 eingezeichnet ist (für $R = 2,8$ cm).

Wir stellen jetzt die Energiebilanz eines Elektrons im abklingenden, d. h. feldfreien Plasma, auf. Nennen wir z_0 und z_a die Zahl der Zu-

sammenstöße des Elektrons je Sekunde mit den Normalatomen bzw. den MS-Atomen und η die Wahrscheinlichkeit für den Stoß II. Art, d. h. die Übertragung der Anregungsenergie $e \cdot U_a$ auf das stoßende Elektron, so lautet diese

$$z_a \cdot \eta \cdot e \cdot U_a = z_0 \kappa \cdot 3/2 k T^- \quad (7)$$

In dem Bereich, in dem wir mit konstantem κ , d. h. mit nur elastischen Stößen rechnen können, fällt also T^- in gleicher Weise ab wie die Dichte der MS-Atome, also mit Zeitkonstanten, die dem Druck proportional ansteigen. Damit wird der Befund von Fig. 5 verständlich: Für $p = 66$ m Torr kann man nach Fig. 3 mit $\tau_a = 7 \cdot 10^{-3}$ s rechnen, was dem gemessenen Verlauf von Fig. 5 nicht widerspricht. Dabei ist allerdings vorausgesetzt, daß die MS-Atome im wesentlichen nur durch Wandstöße verschwinden. Wir können zeigen, daß die betrachteten Stöße II. Art mit Elektronen den Vorrat der MS-Atome im vorliegenden Falle nicht wesentlich vermindern. Gl. (7) gibt uns nämlich die Möglichkeit, die Ausbeute η der Stöße II. Art zu bestimmen. Wenn wir nämlich die freie Weglänge der Elektronen gegenüber normalen und metastabil angeregten Hg-Atomen einander gleich setzen, wird das Verhältnis der Stoßzahlen z_a/z_0 gleich dem doppelten Boltzmann-

Faktor $2 \cdot e^{-\frac{e U_a}{k T_0^-}}$, wobei jetzt natürlich T^- die Elektronentemperatur der brennenden Entladung ist. (Der Faktor 2 ist wegen der beiden bei etwa 5 Volt liegenden MS-Zustände des Quecksilbers notwendig.) Die Durchrechnung mit $T_0^- = 6200^\circ \text{K}$, $T^- = 2500^\circ \text{K}$ (aus Fig. 5) führt zu einem Ausbeutewert von $\eta = 1,8 \cdot 10^{-3}$, der nicht im Widerspruch steht mit nach anderen Verfahren gemessenen Werten. So haben z. B. Latyscheff und Leipunsky¹⁾ als *oberen Grenzwert* $\eta = 7 \cdot 10^{-3}$ angegeben. Bei derartig kleinen Ausbeuten der Stöße II. Art ist, wie man sich ferner leicht überzeugt, die Vernichtung der MS-Atome im Raum gegenüber der an den Wänden, die wahrscheinlich mit einer nahe an 1 liegenden Ausbeute vor sich geht, vollständig zu vernachlässigen²⁾. Die Lebensdauer τ_a der MS-Atome wird also im wesentlichen durch (6) bestimmt. Nach (7) sollte die Elektronentemperatur T^- des abklingenden Plasmas nicht mehr vom Druck abhängen, da dieser in der Gleichung nicht vorkommt. Das scheint auch durch die Messungen bestätigt, die stets auf etwa gleiche Elektronen-

¹⁾ G. D. Latyscheff u. A. S. Leipunsky, ZS. f. Phys. 65, 111, 1930.

— ²⁾ Zu einem ähnlichen Ergebnis für Neon gelangt auch A. Hoffmann (ZS. f. Phys. 119, 223, 1942).

temperaturen von ungefähr 2500° K führen. Hingegen sollte die Zeitkonstante des Abklingens von T^- wie die Lebensdauer der MS-Atome nach (6) mit p proportional ansteigen. Diese Folgerung konnte bisher mit Sicherheit nicht geprüft werden, da die Abklingkonstante der MS-Atome, wie Fig. 3 zeigt, erheblich größer ist als die der Trägerdichte, so daß die Messung längere Zeit nach dem Abschalten wegen der zu schwachen Sondenströme nicht mehr zuverlässig genug durchführbar ist, um die Zeitkonstante des Abklingens von T^- daraus zu entnehmen.

Einen gewissen Anhaltspunkt dafür, daß die Zeitkonstante der Elektronentemperatur mit p ansteigt, bietet der oben berichtete Befund, daß der Endwert der Zeitkonstanten für das Abklingen der Trägerdichte weitgehend unabhängig von p ist (s. Fig. 4), nämlich etwa $2,5 \cdot 10^{-3}$ s. Im Sinne von (4) müßte man dazu annehmen, daß die Druckproportionalität von τ_n dadurch wenigstens zum Teil kompensiert wird, daß in einem gegebenen Zeitpunkt die Elektronentemperatur um so höher ist, je größer die Zeitkonstante τ_a ist, die ja ebenfalls druckproportional ansteigt.

d) *Die wachsende Langmuir-Schicht.* Wir hatten unseren Messungen des Trägerschwundes stets die Gleichung (1) zugrunde gelegt. Die aus ihnen gezogenen Schlüsse sind jedoch nur dann bündig, wenn nachgewiesen werden kann, daß der dem abklingenden Plasma entzogene Sondenstrom außer dem durch (1) gegebenen „statischen“ Anteil keinen „dynamischen“ Anteil im Sinne der Überlegungen von Koch¹⁾ und Wasserrab²⁾ besitzt, der durch das Zurückweichen der Langmuir-Schichtgrenze mit abnehmendem Ioneneinstrom in die Sonde zustande kommt.

Für den Hochvakuumfall — keine Zusammenstöße der Ionen in der Langmuir-Schicht — folgt für das Verhältnis des dynamischen zum statischen Stromanteil:

$$\frac{j_d}{j_s} = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{2}{\pi^2 e M}} \cdot \frac{U^{3/4}}{\tau \sqrt{n} v^{3/2}} \quad (8)$$

und nach Einsetzen der Zahlenwerte, wie sie sich etwa aus den Bedingungen der Kurven von Fig. 4 ergeben ($U = 50$ Volt, $\tau = 1,25$ ms), ergibt sich

$$\frac{j_d}{j_s} = \frac{2900}{\sqrt{n}}$$

¹⁾ W. Koch, ZS. f. techn. Phys. 16, 464, 1935; 17, 446, 1936. —

²⁾ Th. Wasserrab, Wiss. Veröff. d. Siemens-Konz. 19 (1), 1, 1940.

Damit nun der dynamische Anteil j_d gerade gleich dem statischen j_s wäre, müßte also $n = 8,4 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-3}$ sein, was nach (1) einen Einstrom von $j_s = 7,3 \cdot 10^{-9} \text{ Amp./cm}^2$ bedeuten würde. Da die hier gemessenen Stromdichten um mindestens den Faktor 10^3 größer sind als dieser kritische Wert, folgt, daß der dynamische Anteil hier keine Rolle spielt.

Allerdings beträgt die Dicke d der Langmuir-Schicht bei den geringen in Fig. 4 angegebenen Stromstärken schon einige mm, so daß es nicht angängig ist, den Hochvakuumfall der Rechnung zugrunde zu legen.

Machen wir für die Ionengeschwindigkeit in der Schicht den Wurzelansatz

$$u = \sqrt{\frac{e \lambda_1}{2m}} \cdot \sqrt{\frac{E}{p}},$$

so führt die Integration des Raumladungsgesetzes zu

$$(p d)^{5/3} = A \cdot U \cdot \left(\frac{j}{p^2}\right)^{-2/3},$$

wobei für Hg-Dampf $A = 3,1 \cdot 10^{-7}$ (prakt. Einh.) wird.

Berechnet man jetzt den dynamischen Anteil ($j_d = ne \cdot dd/dt$) im Verhältnis zum statischen, so ergibt sich

$$\frac{j_d}{j_s} = \frac{2}{5} ne \frac{(AU)^{3/5}}{p^{1/5}} \cdot \frac{j^{-7/5}}{\tau}.$$

Die Bedingung $j_d/j_s = 1$ liefert als „kritische“ Stromdichte $j_s = \frac{5 \cdot 10^{-11}}{\sqrt{p}} \text{ Amp./cm}^2$, was bei den Drucken der Fig. 4 zu rund $j_s = 3 \cdot 10^{-10} \text{ Amp./cm}^2$ führt. Diese Werte liegen sogar um 5 Zehnerpotenzen unterhalb der tatsächlich zur Messung ausgenutzten Stromdichten, so daß auch diese Überschlagsrechnung zeigt, daß wir alle gemessenen Ströme als reine Diffusionsströme nach Gl. (1) auffassen können.

Berlin-Siemensstadt, den 1. Februar 1943.

Bemerkungen zu G. Haenzel: „Die Polygonfläche und das Periodische System der Elemente.“

Von W. Finke in Bremen.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 27. April 1943.)

1. Die Verteilung der Eigenwerte auf der Polygonfläche muß nach neueren Zahlenangaben (Madelung) eine Änderung erfahren. — 2. Für die dreidimensionale Mannigfaltigkeit n_1, n_2, n_3 würde sich ein gewöhnliches karthesisches oder gemischt karthesisch-polares System besser eignen als die Polygonfläche mit insgesamt 13 Transversalen.

1. Benutzt man die von Madelung¹⁾ 1936 angegebene *aufsteigende Reihe vierstelliger Zahlen der Elektronenanlagerung*, so ergeben sich folgende Umstellungen auf der Polygonfläche:

a) Die in den innersten Kreisen stehenden Elemente sind miteinander zu vertauschen, z. B. H und He, usw.

b) In allen Ringen sind die Elemente mit dem Spin $-\frac{1}{2}$ nach innen, die mit dem Spin $+\frac{1}{2}$ nach außen zu stellen, und zwar so, daß die n_3 -Werte auch den richtigen Transversalen entsprechen.

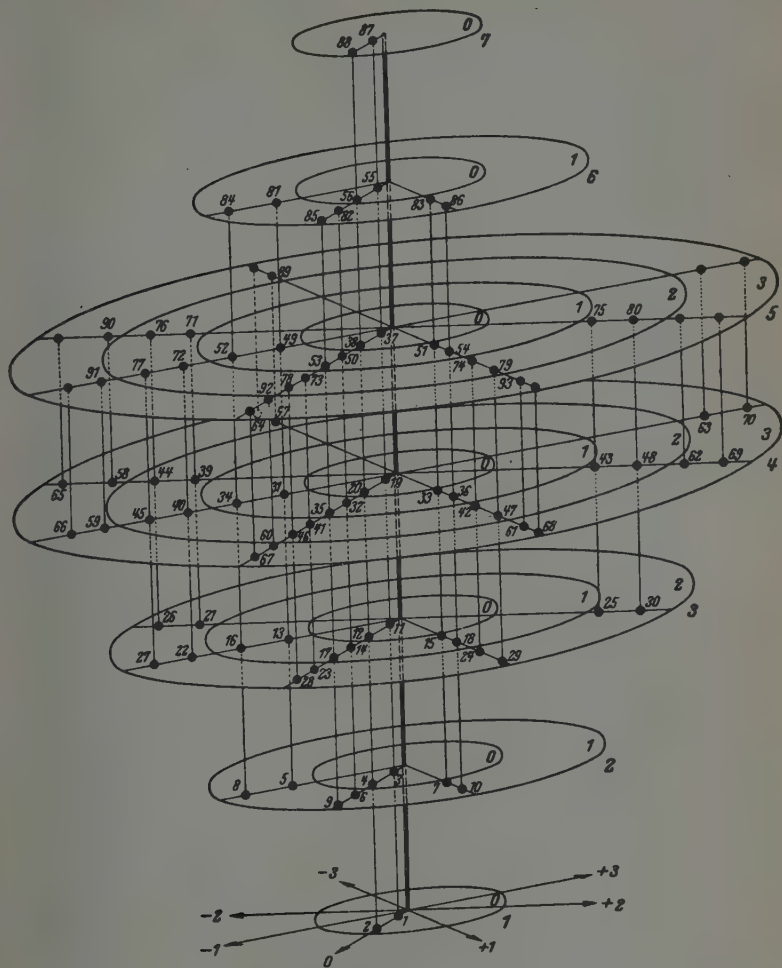
c) Die Lanthaniden kommen sämtlich, auch das führende Element 57, in den mit 4_4 bezeichneten Ring.

d) Für die radioaktiven Elemente 89 bis 93 kommt nicht der Ring 6_3 , sondern der Ring 5_4 in Frage.

2. Die Übersicht über die Eigenwerte auf der Polygonfläche wird durch die große Zahl (13) der Transversalen sehr erschwert. Bedenkt man aber, daß es für die Darstellung der drei Quantenzahlen n_1, n_2, n_3 nur eines dreidimensionalen Raumes bedarf, so muß eine Zuordnung zu einem karthesischen oder gemischt karthesisch-polaren System als die einfachste Lösung erscheinen. Die nebenstehende Zeichnung stellt eine Lösung der zweiten Art dar. Sie enthält alle oben für wünschenswert

¹⁾ H. A. Bauer, Grundlagen der Atomphysik. Wien, Springer, 1938.
E. Madelung, Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, 3. Aufl. Springer. 1936, S. 359.

hingestellten Änderungen und ersetzt eine umfangreiche über drei Druckseiten gehende Tabelle der vier Quantenzahlen n , l , m_l , m_s .



Periodisches System nach Quantenzahlen.

Die Hauptquantenzahl $n = 1, 2, \dots, 7$ bezieht die einzelnen Stockwerke.
Die Nebenquantenzahl $l = 0, 1, 2, 3$ bezieht die einzelnen Kreise und Ringe der Stockwerke.

Die magnetische Bahnpuls-Quantenzahl $m_l = 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ bezieht die Richtungen in den Stockwerken.

Die magnetische Spinquantenzahl $m_s = \pm 1/2$ wird dadurch zum Ausdruck gebracht, daß das Element negativen Spins jedesmal nach Innen, das positiven Spins nach außen gestellt wird.

Zur Ausmessung atomarer Strahlungsquellen in Kristallen. II.

Berechnung der Absorptionsverteilung für Dipolstrahlung und Bestimmung von Übergangswahrscheinlichkeiten.

Von K.-H. Hellwege in Göttingen.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 3. April 1943.)

Die früher qualitativ diskutierte Darstellung des atomaren Dipolmoments durch dem Kristallbau angepaßte Dipolscharen wird für schwache Absorption quantitativ durchgeführt. Die Absorption ist nur von der Richtung des elektrischen (bzw. magnetischen) Vektors abhängig. Trägt man die reziproke Wurzel aus der Absorptionskonstanten jeweils in Richtung von \mathcal{E} (bzw. \mathcal{H}) ab, so ergibt sich in Übereinstimmung mit der klassischen Kristalloptik ein Ellipsoid. Mit Hilfe der Rechnungen lassen sich die Übergangswahrscheinlichkeiten (Oszillatorenstärken) als richtungsunabhängige Größen experimentell bestimmen. Dazu sind bei optisch zweiachsigen Kristallen drei, bei optisch einachsigen zwei Messungen nötig. Optisch isotrope Körper verlangen nur eine Messung. Gleichzeitig ergeben sich experimentelle Aussagen über die durch zwei Winkel definierte Richtung der absorbierenden Dipole im Kristall. Und zwar erhält man in optisch zweiachsigen Kristallen beide, in optisch einachsigen einen dieser Winkel, während in optisch isotropen Körpern keine Aussage über die Richtung der Dipole gemacht werden kann. Zum Schluß werden als experimentelles Beispiel Messungen am hexagonalen Nd-Zn-Nitrat mitgeteilt.

1. Übersicht.

In einer Reihe von Arbeiten haben Deutschbein¹⁾, Hellwege²⁾ und Schmitten³⁾ qualitative Messungen über die Polarisierung der linienhaften Absorption von Kristallen mit Ionen der Seltenen Erden mitgeteilt. Das Ergebnis dieser Messungen war der Nachweis, daß den Absorptionslinien elektrische oder magnetische Dipole entsprechen, die auf Grund der Polarisierung ihrer Strahlungsfelder zum Teil in festen Kristallrichtungen orientiert sind (Dipole mit einem Freiheitsgrad), zum Teil aber auch in bestimmten Ebenen des Kristalls (Dipole mit zwei Freiheitsgraden) oder sogar über den ganzen Raum (Dipole mit drei Freiheitsgraden) frei drehbar erscheinen. In einer vorhergehenden Arbeit⁴⁾ wurde gezeigt, daß sich alle Fälle unter der Annahme fest-

¹⁾ O. Deutschbein, Ann. d. Phys. (5) 36, 183, 1939. — ²⁾ K.-H. Hellwege, ZS. f. Phys. 117, 198, 1941. — ³⁾ A. Schmitten, Ann. d. Phys. (5) 39, 502, 1941. — ⁴⁾ K.-H. Hellwege, ZS. f. Phys. 119, 325, 1942, im folgenden mit I bezeichnet.

stehender Dipole mit einem Freiheitsgrad verstehen lassen. Die „Drehbarkeit“ kann durch die Tatsache vorgetäuscht werden, daß auf Grund der Kristallsymmetrie eine Spektrallinie nicht von einem Dipol, sondern von einer Dipolschar absorbiert wird, deren Mitglieder nach den Symmetrieelementen angeordnet sind und im allgemeinen nicht parallel, sondern schief zueinander stehen¹⁾. Die im einzelnen möglichen Anordnungen sind für alle Kristallklassen in I angegeben worden.

In der vorliegenden Arbeit wird dieser Gedanke quantitativ durchgeführt. D. h. es wird zunächst berechnet, wie die Absorption bei vorgegebener Kristallsymmetrie von der Strahlrichtung (ζ) und der Schwingungsrichtung (ξ) des Lichtes abhängen muß (Abschnitte 2, 3). Dabei werden die einzelnen Dipole in bezug auf ihre Absorption als voneinander unabhängig und in bezug auf ihre Strahlungsfelder als Hertzsche Dipole vorausgesetzt. Ferner soll die Absorption so schwach sein, daß die einfallende Lichtwelle für alle Dipole einer Schar noch praktisch dieselbe Amplitude hat. Unter diesen, bei den Salzen der Seltenen Erden erfüllten Voraussetzungen ergibt sich eine Richtungsverteilung, die mit der aus der klassischen Kristalloptik sich ergebenden übereinstimmt (Abschnitt 4). Die Ergebnisse der Rechnung werden dann zur Bestimmung von Übergangswahrscheinlichkeiten oder Oszillatorenstärken benutzt (Abschnitt 5). Beide Größen sind nach Definition isotrop. Da die Absorption eines Kristalls dagegen im allgemeinen anisotrop ist, lassen sie sich nicht aus *einer* Absorptionsmessung bestimmen, sondern nur durch Kombination *mehrerer* solcher. Dabei ergeben sich gleichzeitig die Richtungen der Dipole aus denselben Experimenten als charakteristische Größen des Kristalls. Zum Schluß (Abschnitt 6) werden die skizzierten Überlegungen an einem Neodym enthaltenden, optisch einachsigen Kristall geprüft, sowie Übergangswahrscheinlichkeit und Struktur der Dipolscharen bestimmt.

2. Durchrechnung für linear polarisiertes Licht.

Die Orientierung der Dipolscharen entnehmen wir aus den „Lagebestimmungen“ der Arbeit I. Die einzelnen Dipole einer Schar werden durch einen Index $i = 1, 2, \dots, n$ unterschieden. Liegt ein Hertzscher Dipol vor, dann ist die Absorption des i -ten Dipols bestimmt durch das Quadrat des cos des Winkels zwischen Dipolachse und elektrischem

¹⁾ Hier wie im folgenden handelt es sich stets nur um die Richtung der Dipole, nicht um die Punktlagen der absorbierenden Ionen.

Lichtvektor. Wir legen einen Vektor p_i vom Betrag p in die Dipolachse und erhalten damit für die Absorptionskonstante

$$k_i(\nu) = k_0(\nu) \frac{(p_i \mathfrak{E})^2}{p^2 E^2} = k_0(\nu) \cdot \frac{(p_{ix} E_x + p_{iy} E_y + p_{iz} E_z)^2}{p^2 E^2} \quad (1)$$

Die Absorptionskonstante der ganzen Dipolschar, die im Experiment gemessen wird, ist demnach

$$k(\nu) = \sum_i k_i(\nu) = k_0(\nu) \frac{\sum_i (p_i \mathfrak{E})^2}{p^2 E^2} = k_0(\nu) \cdot \Phi. \quad (2)$$

Dabei ist $k_0(\nu)$ die Absorptionskonstante, die der einzelne Dipol maximal, nämlich für $\mathfrak{E} \parallel p_i$ haben kann, also von der Kristallsymmetrie und der Orientierung der Lichtvektoren unabhängig. Die Aufgabe besteht jetzt einfach darin, die orientierungsabhängige Summe Φ für die verschiedenen Kristallklassen auszurechnen.

Um alle Orientierungen von \mathfrak{S} und \mathfrak{E} den experimentellen Bedingungen entsprechend beschreiben zu können, ist es zweckmäßig, räumliche Polarkoordinaten anzuwenden. Wir legen die Strahlrichtung \mathfrak{S} durch die Poldistanz σ und die von der positiven x -Achse aus gemessene Länge τ fest. Da \mathfrak{E} immer auf \mathfrak{S} senkrecht steht, braucht man zu seiner Festlegung nur noch einen Winkel. Wir benutzen das von der x - y Ebene aus gemessene Azimut α . Aus Fig. 1 ergibt sich dann ohne weitere Erläuterung

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E (\cos \alpha \sin \tau - \sin \alpha \cos \sigma \cos \tau), \\ E_y &= -E (\cos \alpha \cos \tau + \sin \alpha \cos \sigma \sin \tau), \\ E_z &= E \sin \alpha \sin \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Um die Komponenten der p_i zu erhalten, legt man die Koordinatenachsen (x, y, z) , soweit es möglich ist, auf ausgezeichnete Kristallrichtungen fest. Ist das wegen zu geringer Kristallsymmetrie bei einer Achse nicht möglich, so bleibt ihre Richtung beliebig.

Die Anordnungen der p_i in den verschiedenen Klassen eines und desselben Kristallsystems unterscheiden sich im wesentlichen durch die Zahl der zu einer Schar (Frequenz) gehörenden Dipole. Die beim Übergang zu einer höheren Symmetrieklasse neu hinzukommenden Symmetrieelemente bewirken eine Vervielfachung von n . Dabei liegen die neu hinzukommenden Dipole symmetrisch zu den bereits vorhandenen. Berücksichtigt man nun, daß es in Übereinstimmung mit Gl. (1) sinnlos ist, bei der Berechnung der absorbierten oder emittierten

Intensität Richtung und Gegenrichtung der Dipole und Lichtvektoren zu unterscheiden, so kann man leicht jede Klasse auf die mit der niedrigsten Symmetrie desselben Systems zurückführen¹⁾. Es genügt also, die Rechnung für *irgendeine* Klasse jedes Systems durchzuführen. Doch wird daneben der Wert von n für alle Klassen angegeben. Ferner wird immer die allgemeinste Anordnung behandelt. Spezielle Lagen ergeben sich leicht als Spezialfälle aus den allgemeinen Formeln²⁾.

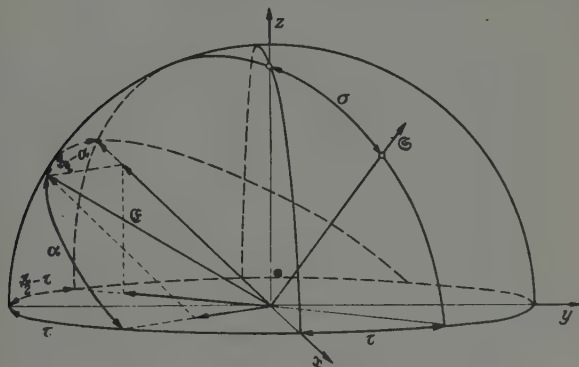


Fig. 1. Orientierung von Strahlvektor \mathbf{S} und elektrischem Vektor \mathbf{E} zu dem im Kristall festliegenden Koordinatensystem.

Fallen dabei mehrere Dipole zusammen, so werden sie trotzdem getrennt gezählt, damit die Gesamtzahl n eine für die Symmetrieklasse charakteristische Zahl bleibt.

Im folgenden werden für alle Kristallsysteme Ansatz und Ergebnis der Rechnung angegeben. Die Zwischenrechnungen sind elementar

¹⁾ Am besten an Hand der stereographischen Projektion (s. die Lehrbücher der Kristallographie und Mineralogie, z. B. Niggli). Da es nur auf die Richtung der Dipole ankommt, läßt man sie alle vom Kugelmittelpunkt ausgehen und faßt die üblicherweise zur Veranschaulichung der Symmetrie bei den einzelnen Klassen in die Projektionstafeln eingezeichneten Punkte als Durchstoßungspunkte der Dipole durch die Kugel auf. So hat man ein sehr plastisches Abbild der Dipolscharen vor Augen. Wegen der Gleichwertigkeit von Richtung und Gegenrichtung darf man jeden Dipol (Punkt) am Kugelmittelpunkt spiegeln. Daraus ergibt sich sofort die Reduktion auf die in der Klasse niedrigster Symmetrie vorhandene Anordnung oder doch wenigstens (bei optisch einachsigen und kubischen Kristallen) auf mehrere solche gegeneinander gedrehte Anordnungen. Da die Absorption aber von solchen Drehungen unabhängig ist, ist das gleichwertig mit der Reduktion auf eine solche Anordnung. — ²⁾ Anschaulich in der stereographischen Projektion dargestellt durch ein Wandern der Punkte auf irgendwelche Symmetrieelemente.

und werden deshalb fortgelassen. Regelmäßig benutzt werden die Summen ($n = 3, 4, 6, 8$)

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sin \left\{ \varphi + (i-1) \frac{2\pi}{n} \right\} &= \sum_{i=1}^n \cos \left\{ \varphi + (i-1) \frac{2\pi}{n} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \sin \left\{ \varphi + (i-1) \frac{2\pi}{n} \right\} \cdot \cos \left\{ \varphi + (i-1) \frac{2\pi}{n} \right\} = 0, \\ \sum_{i=1}^n \sin^2 \left\{ \varphi + (i-1) \frac{2\pi}{n} \right\} &= \sum_{i=1}^n \cos^2 \left\{ \varphi + (i-1) \frac{2\pi}{n} \right\} = \frac{n}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

I. Triklines System. Koordinatensystem beliebig im Kristall.

1. Hemiedrische Klasse¹⁾: $n = 1$. Die Richtung des Dipols sei durch die Poldistanz ϑ und die Länge φ gegeben. Dann ist

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p \sin \vartheta \cos \varphi, \\ p_y &= p \sin \vartheta \sin \varphi, \\ p_z &= p \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Daraus folgt mit (3):

$$\Phi = n [\sin \vartheta (\cos \alpha \cdot \sin (\tau - \varphi) - \sin \alpha \cos \sigma \cos (\tau - \varphi)) + \cos \vartheta \sin \alpha \sin \sigma]^2. \quad (6)$$

2. Sonstige Klasse: Gl. (6) mit $n = 2$.

II. Monoklines System. Z-Achse in der b -Achse des Kristalls, x - und y -Achse beliebig.

1. Hemimorphe Klasse: $n = 2$. Die Dipole gehen durch Drehung um die zweizählige b -Achse (z -Achse) ineinander über. Also haben sie dieselbe Poldistanz ϑ und es ist

$$\left. \begin{aligned} p_{ix} &= p \sin \vartheta \cos \varphi_i, \\ p_{iy} &= p \sin \vartheta \sin \varphi_i, \\ p_{iz} &= p \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

mit

$$\varphi_i = \varphi + (i-1)\pi, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Zusammen mit (3) folgt daraus:

$$\Phi = n \sin^2 \vartheta [\cos \alpha \sin (\tau - \varphi) - \sin \alpha \cos \sigma \cos (\tau - \varphi)]^2 + n \cos^2 \vartheta \sin^2 \alpha \sin^2 \sigma. \quad (9)$$

2. Sonstige Klassen: Gl. (9) mit $n = 2, 4$.

III. Rhombisches System. Koordinatenachsen in den Kristallachsen, z -Achse zweizählig.

¹⁾ Bezeichnungen nach P. Niggli; Lehrbuch der Mineralogie. 1. Aufl.

1. Hemimorphe Klasse: $n = 4$. Die vier Dipole haben dieselbe Poldistanz ϑ . Ihre φ -Werte sind

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi, & \varphi_3 &= -\varphi, \\ \varphi_2 &= \varphi + \pi, & \varphi_4 &= -\varphi + \pi. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Bildet man damit

$$\left. \begin{aligned} p_{ix} &= p \sin \vartheta \cos \varphi_i, \\ p_{iy} &= p \sin \vartheta \sin \varphi_i, \\ p_{iz} &= p \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

und benutzt (3), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi &= n \cdot \sin^2 \vartheta \{ [\cos \alpha \sin (\tau - \varphi) - \sin \alpha \cos \sigma \cos (\varepsilon - \varphi)]^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sin 2 \varphi [\sin 2 \tau (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \sigma) - \sin 2 \alpha \cos \sigma \cos 2 \tau] \} + \\ &+ n \cos^2 \vartheta \sin^2 \alpha \sin^2 \sigma. \end{aligned} \quad (12)$$

2. Sonstige Klassen: Gl. (12) mit $n = 4, 8$.

IV. *Wirtelige Systeme*. Z-Achse in der m -zähligen Drehachse ($m = 3, 4, 6$), x - und y -Achse beliebig.

1. Tetartoedrische Klasse: $n = m$. Alle Dipole haben dieselbe Poldistanz ϑ . Ihre φ -Werte sind

$$\varphi_i = \varphi + (i - 1) \frac{2\pi}{m}, \quad i = 1, \dots, m \quad (13)$$

Bildet man damit

$$\left. \begin{aligned} p_{ix} &= p \sin \vartheta \cos \varphi_i, \\ p_{iy} &= p \sin \vartheta \sin \varphi_i, \\ p_{iz} &= p \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

und benutzt (3), so ergibt sich

$$\Phi = \frac{n}{2} \sin^2 \vartheta (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \sigma) + n \cos^2 \vartheta \sin^2 \alpha \sin^2 \sigma. \quad (15)$$

2. Sonstige Klassen: Gl. (15) mit $n = m, 2m, 4m$.

V. *Kubisches System*. Koordinatenachsen in den drei Kristallachsen.

1. Holloedrische Klasse: $n = 48$. Da die drei Achsen gleichwertig sind, läßt sich die Dipolschar in drei gleiche Teilscharen I, II, III unterteilen, die jeweils gegen die x -, y -, z -Achse denselben Winkelabstand ϑ haben. Zunächst gilt für die auf die z -Achse bezogene Teilschar III

$$\left. \begin{aligned} p_{ix}^{\text{III}} &= p \sin \vartheta \cos \varphi_i, & \varphi_i &= \varphi + (i - 1) \frac{2\pi}{8}, \\ p_{iy}^{\text{III}} &= p \sin \vartheta \sin \varphi_i, \\ p_{iz}^{\text{III}} &= \pm p \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wegen der Gleichwertigkeit der Achsen folgt daraus für die beiden anderen Teilscharen durch zyklische Vertauschung

$$\left. \begin{aligned} p_{ix}^{\text{III}} &= p_{iy}^{\text{I}} = p_{iz}^{\text{II}}, \\ p_{iy}^{\text{III}} &= p_{iz}^{\text{I}} = p_{ix}^{\text{II}}, \\ p_{iz}^{\text{III}} &= p_{ix}^{\text{I}} = p_{iy}^{\text{II}}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Jede dieser Teilscharen besteht wieder aus zwei gleichwertigen Scharen, die sich nur durch das Vorzeichen einer Komponente von p_i unterscheiden. Man erhält somit

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{p^2 E^2} \sum_{i=1}^{n/3} [(p_i^{\text{I}} \mathfrak{E})^2 + (p_i^{\text{II}} \mathfrak{E})^2 + (p_i^{\text{III}} \mathfrak{E})^2] \\ &= \frac{2}{p^2 E^2} \sum_{i=1}^{n/6} [(p_i^{\text{I}'} \mathfrak{E})^2 + (p_i^{\text{II}'} \mathfrak{E})^2 + (p_i^{\text{III}'} \mathfrak{E})^2], \end{aligned} \quad (18)$$

wobei die Komponenten der $p_i^{\text{I}'}$, $p_i^{\text{II}'}$, $p_i^{\text{III}'}$ nur noch das positive Vorzeichen haben. Die Auswertung der Summen unter Benutzung von (3) gibt

$$\Phi = \frac{n}{3}, \quad (19)$$

2. Sonstige Klassen: Gl. (19) mit $n = 12, 24$.

3. Unpolarisiertes Licht und Kristallpulver.

Um die Absorption von unpolarisiertem Licht zu berechnen, hat man die Absorptionskonstante, d. h. den Summenausdruck Φ , über alle $0 \leq \alpha \leq \pi$ zu mitteln. Der gemessene Absorptionskoeffizient $k(\nu)$ wird also jetzt

$$k(\nu) = k_0(\nu) \cdot \frac{1}{\pi p^2 E^2} \int_0^\pi \sum_{i=1}^n (p_i \mathfrak{E})^2 d\alpha = k_0(\nu) \cdot \bar{\Phi}. \quad (20)$$

Da es sich wieder nur um elementare Rechnungen handelt, werden einfach die Ergebnisse für die verschiedenen Kristallsysteme zusammengestellt.

I. Triklines System.

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \frac{n}{2} [\sin^2 \vartheta \{ \sin^2(\tau - \varphi) + \cos^2 \sigma \cos^2(\tau - \varphi) \} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin 2 \vartheta \sin 2 \sigma \cos(\tau - \varphi) + \cos^2 \vartheta \sin^2 \sigma]. \end{aligned} \quad (21)$$

II. Monoklines System.

$$\bar{\Phi} = \frac{n}{2} [\sin^2 \vartheta \{ \sin^2(\tau - \varphi) + \cos^2 \sigma \cos^2(\tau - \varphi) \} + \cos^2 \vartheta \sin^2 \sigma]. \quad (22)$$

III. Rhombisches System.

$$\bar{\Phi} = \frac{n}{2} [\sin^2 \vartheta \{ \sin^2(\tau - \varphi) + \cos^2 \sigma \cos^2(\tau - \varphi) + \\ + \frac{1}{2} \sin 2 \varphi \sin 2 \tau \sin^2 \sigma \} + \cos^2 \vartheta \sin^2 \sigma]. \quad (23)$$

IV. Wirtelige Systeme.

$$\bar{\Phi} = \frac{n}{2} [\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta (1 + \cos^2 \sigma) + \cos^2 \vartheta \sin^2 \sigma]. \quad (24)$$

V. Kubisches System.

$$\bar{\Phi} = \frac{n}{3}. \quad (25)$$

Die Anwendung von natürlichem Licht ist vor allem immer dann angebracht, wenn keine Einkristalle genügender Größe, sondern nur Kristallpulver zur Verfügung stehen. Die Absorption eines solchen Pulvers ist ein Mittelwert über alle Richtungen, d. h. die Gl. (21) bis (25) sind über die ganze Kugel zu mitteln. Die gemessene Absorptionskonstante wird also jetzt

$$k(\nu) = k_0(\nu) \cdot \frac{1}{4\pi} \int \bar{\Phi} d\Omega = k_0(\nu) \cdot \bar{\bar{\Phi}} \quad (26)$$

mit

$$d\Omega = \sin \sigma d\sigma d\tau, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi. \quad (27)$$

Die Durchrechnung ergibt für alle Systeme dasselbe Ergebnis:

$$\bar{\bar{\Phi}} = \frac{n}{3}, \quad (28)$$

also

$$k(\nu) = \frac{n}{3} k_0(\nu)^1. \quad (29)$$

4. Das Absorptionsellipsoid.

Wir haben bisher die Richtungsverteilung der Absorption dargestellt in einem Koordinatensystem (σ, τ, α) , das den Bedürfnissen des Experiments entspricht. Legt man die Richtung des elektrischen Vektors statt durch die Strahlrichtung (σ, τ) und die Stellung des Polarisators (α) direkt durch seine Richtungswinkel (ξ, η, ζ) gegen die fest mit dem Kristall verbundenen x, y, z -Achsen fest, so gelangt man zu einer sehr einfachen geometrischen Interpretation der Absorptionsverteilung. Wegen

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E \cos \xi, \\ E_y &= E \cos \eta, \\ E_z &= E \cos \zeta \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

¹⁾ Dies Ergebnis muß selbstverständlich herauskommen, da wir ja $k_i(\nu)$ dem Quadrat eines Richtungscosinus proportional vorausgesetzt haben. Der Mittelwert davon über alle Richtungen ist $1/3$. Da jeder Dipol der Schar dasselbe beiträgt und n Dipole da sind, ist $n/3$ zu erwarten.

folgt aus (3):

$$\left. \begin{aligned} \cos \xi &= \cos \alpha \sin \tau - \sin \alpha \cos \sigma \cos \tau, \\ -\cos \eta &= \cos \alpha \cos \tau + \sin \alpha \cos \sigma \sin \tau, \\ \cos \zeta &= \sin \alpha \sin \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Wir behandeln zunächst die optisch einachsigen Kristalle. Wegen (15), (2) und (31) ist

$$k(\nu) = \frac{n}{2} k_0(\nu) \sin^2 \vartheta (\cos^2 \xi + \cos^2 \eta) + n k_0(\nu) \cos^2 \vartheta \cos^2 \zeta. \quad (32)$$

Das ist die Gleichung eines Rotationsellipsoids, das man erhält, wenn man jeweils in Richtung des elektrischen Vektors die reziproke Wurzel aus der Absorptionskonstanten für eine in dieser Richtung schwingende Welle abträgt. Rotationsachse dieses *Rotationsellipsoids* ist die optische Achse. Liegen die absorbierenden Dipole parallel zur Achse ($\vartheta = 0$), so artet das Ellipsoid in das Ebenenpaar $z = \pm (n k_0(\nu))^{-1/2}$ aus; liegen sie in der zur Achse senkrechten Ebene ($\vartheta = \pi/2$), so wird das Ellipsoid ein Kreiszyylinder parallel zur optischen Achse und mit dem Radius $r = \left(\frac{n}{2} k_0(\nu)\right)^{-1/2}$.

Bei kubischen Kristallen wird das Absorptionsellipsoid nach (19) eine Kugel mit dem Radius $r = \left(\frac{n}{3} k_0(\nu)\right)^{-1/2}$.

Optisch zweiachsige Kristalle haben ein Absorptionsellipsoid mit drei verschiedenen Achsen. Bei rhombischen Kristallen fallen seine Hauptachsen mit den kristallographischen Achsen zusammen. Bei monoklinen Kristallen ist aus Symmetriegründen eine Hauptachse in Richtung der kristallographischen b -Achse, eine zweite in einer solchen Lage zu erwarten, daß die absorbierenden Dipole in einer Hauptebene des Ellipsoids liegen. Deshalb drehen wir das bisher benutzte Koordinatensystem so um die z -Achse (b -Achse), daß $q' = 0$ wird. Im triklinen Fall, wo wir nur einen Dipol haben, liegt dieser aus Symmetriegründen in einer Hauptachse des Ellipsoids. Wir legen ihn also in die x -Achse und haben damit $\vartheta = \pi/2$, $q = 0$. Geht man unter Berücksichtigung dieser Festsetzungen mit (31) in die Gl. (2), (6), (9), (12) hinein, so ergibt sich immer die Gleichung des auf sein Hauptachsensystem bezogenen Absorptionsellipsoids:

$$k(\nu) = 1 / \left(\frac{1}{k(\nu)} \right)^2 = \frac{\cos^2 \xi}{a^2} + \frac{\cos^2 \eta}{b^2} + \frac{\cos^2 \zeta}{c^2}, \quad (33)$$

dessen Hauptachsen a , b , c für die einzelnen Fälle in nachstehender Tabelle aufgeführt sind.

Tabelle 1. Hauptachsen des Absorptionsellipsoids.

	Triklin	Monoklin	Rhombisch	Wirtelig	Kubisch
a	1 $\sqrt{n k_0(\nu)}$	1 $\sqrt{n k_0(\nu) \cdot \sin \vartheta}$	1 $\sqrt{n k_0(\nu) \cdot \sin \vartheta \cos \varphi}$	1 $\sqrt{\frac{n}{2} k_0(\nu) \sin \vartheta}$	1 $\sqrt{\frac{n}{3} k_0(\nu)}$
b	∞	∞	1 $\sqrt{n k_0(\nu) \cdot \sin \vartheta \sin \varphi}$	"	"
c	∞	1 $\sqrt{n k_0(\nu) \cdot \cos \vartheta}$	1 $\sqrt{n k_0(\nu) \cdot \cos \vartheta}$	1 $\sqrt{n k_0(\nu) \cdot \cos \vartheta}$	"

Im triklinen System ist das Ellipsoid immer zu einem Ebenenpaar, im monoklinen immer mindestens zu einem Zylinder entartet. In speziellen Fällen von ϑ und φ können Zylinder und Ebenenpaar in jedem System vorkommen. Ganz allgemein ergibt sich ein Zylinder, wenn die absorbierenden Dipole gleicher Frequenz alle in einer Ebene, aber nicht parallel zueinander liegen. Diese Ebene steht senkrecht auf der Zylinderachse. Liegen alle gleichfrequentigen Dipole parallel zueinander, so ergibt sich ein Ebenenpaar mit der Normalen parallel zur Richtung der Dipole¹⁾.

Die *klassische Theorie* der absorbierenden Kristalle berücksichtigt die Absorption rein formal durch einen komplexen Tensor der Dielektrizitätskonstanten. Sie setzt also nur voraus, daß eine Welle beim Fortschreiten im Innern des Kristalls nach einem Exponentialgesetz geschwächt wird, d. h. daß eine Absorptionskonstante definiert ist. Allein infolge dieser Voraussetzung führt sie für schwache Absorption bereits zu dem Ergebnis, daß ein Absorptionsellipsoid mit dem Radiusvektor $\frac{1}{\sqrt{k(\nu)}}$ existieren muß. Es ist demnach von jeder modellmäßigen Theorie der schwachen Absorption zu verlangen, daß sie dies Absorptionsellipsoid liefert; eine Forderung, die, wie wir gesehen haben, von unserer oben entwickelten Theorie erfüllt wird.

5. Übergangswahrscheinlichkeiten und Oszillatorenstärken.

Die Übergangswahrscheinlichkeit ist für elektrische Dipolstrahlung gegeben durch

$$A_{ik} = \frac{64 \pi^4 \nu_0^3}{3 h c^3} |e r_{ik}|^2 = \frac{64 \pi^4 \nu_0^3}{3 h c^3} \sum_q |e q_{ik}|^2 = \sum_q A_{ik}^q, \quad (34)$$

¹⁾ Zur Frage der Beobachtbarkeit ausgearteter Ellipsoide s. S. 603.

wobei q für x, y, z steht, eq_{ik} das Übergangsmoment in der q -Richtung bedeutet und ν_0 die Frequenz der Linienmitte ist. Man zerlegt also die atomare Strahlungsquelle in drei zueinander senkrecht stehende Dipole und berechnet deren Emission getrennt. In anisotropen Körpern sind die A_{ik}^q verschieden und wir stellen uns die Aufgabe, sie aus Absorptionsmessungen zu bestimmen.

Falle ein Lichtbündel der sehr engen Öffnung $d\Omega$ auf einen Kristall vom genügend kleinen Volumen dV . Wir betrachten zunächst nur die Dipolkomponente parallel zur z -Achse. Ist die Strahlrichtung festgelegt durch σ und τ ¹⁾ und liegt der elektrische Lichtvektor zwischen α und $\alpha + d\alpha$, so ist die in der Zeit dt aus dem Frequenzbereich ν bis $\nu + d\nu$ absorbierte Energie gegeben durch

$$-dE = k^z(\nu) \cos^2(z, \mathfrak{E}) \cdot J_\alpha(\nu) d\alpha d\nu d\Omega dV dt. \quad (35)$$

$k^z(\nu)$ ist die für $\mathfrak{E} \parallel z$ vorhandene Absorptionskonstante und mit linear polarisiertem Licht meßbar. Wegen Gl. (3) ist

$$\cos^2(z, \mathfrak{E}) = \frac{E_z^2}{E^2} = \sin^2\alpha \sin^2\sigma \quad (36)$$

und somit

$$-dE = k^z(\nu) \sin^2\alpha \sin^2\sigma J_\alpha(\nu) d\alpha d\nu d\Omega dV dt. \quad (37)$$

Wir gehen zur unpolarisierten und isotrop zugestrahlten Hohlraumstrahlung über, indem wir zunächst über alle Richtungen $0 \leq \alpha \leq \pi$ des elektrischen Vektors und dann über alle Strahlrichtungen mit

$$d\Omega = \sin\sigma d\sigma d\tau, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi, \quad (38)$$

integrieren. In diesem Fall wird die Energie

$$-E = \frac{4\pi^2}{3} k^z(\nu) J_\alpha(\nu) d\nu dV dt \quad (39)$$

absorbiert. Geht man mit der Beziehung

$$J(\nu) = \int_0^\pi J_\alpha(\nu) d\alpha = \pi J_\alpha(\nu) = \frac{c}{4\pi} u(\nu) = \frac{c}{4\pi} u(\nu_0) \quad (40)$$

zur Strahlungsdichte $u(\nu_0)$ über, so erhält man für die im ganzen Linienbereich absorbierte Energie

$$-E = \frac{c}{3} u(\nu_0) \cdot \int k^z(\nu) d\nu dV dt. \quad (41)$$

¹⁾ Siehe die Fig. 1.

Andererseits läßt sich dieselbe Energie auch darstellen als

$$-E = B_{ki}^z u(\nu_0) \cdot N_i dV dt \cdot h\nu_0. \quad (42)$$

Gleichsetzen mit (41) ergibt die Absorptionswahrscheinlichkeit

$$B_{ki}^z = \frac{c}{h\nu_0} \cdot \frac{1}{N_i} \cdot \frac{1}{3} \int k^z(\nu) d\nu, \quad (43)$$

woraus wegen der Gleichgewichtsbedingungen der Hohlraumstrahlung in der üblichen Weise die Emissionswahrscheinlichkeit

$$A_{ik}^z = \frac{8\pi h\nu_0^3}{c^3} \frac{g_i}{g_k} B_{ki}^z = \frac{8\pi\nu_0^3}{c^3} \cdot \frac{g_i}{g_k} \cdot \frac{1}{N_i} \cdot \frac{1}{3} \int k^z(\nu) d\nu \quad (44)$$

folgt. Da die Übergangsmomente parallel zu den drei Achsen voneinander unabhängig sind, gilt die Gl. (44) auch für die x - und y -Richtung. Man erhält demnach die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit in einer Spektrallinie als die Summe

$$A_{ik} = \sum_q A_{ik}^q = \frac{8\pi\nu_0^3}{c^3} \frac{g_i}{g_k} \cdot \frac{1}{N_i} \cdot \frac{1}{3} \sum_q \int k^q(\nu) d\nu \quad (45)$$

und dementsprechend die Oszillatorenstärke als

$$f_{ik} = \frac{mc}{\pi e^2} \cdot \frac{1}{N_i} \cdot \frac{1}{3} \sum_q \int k^q(\nu) d\nu. \quad (46)$$

Die Bestimmung von A_{ik} bzw. f_{ik} erfordert also drei Absorptionsmessungen mit $q = x, y, z$, die sich bei optisch einachsigen Kristallen auf zwei reduzieren und bei optisch isotropen Körpern in eine zusammenfallen. Hier ist

$$\int k^q(\nu) d\nu = \int k(\nu) d\nu \quad (47)$$

und die Gl. (45) und (46) gehen in die für isotrope Körper gewöhnlich abgeleiteten Formeln über.

Da die formale Aufspaltung des atomaren Dipolmoments in drei zueinander senkrechte Komponenten dem Kristallbau viel weniger angepaßt ist als seine Darstellung durch eine die Kristallsymmetrie widerspiegelnde Dipolschar, wollen wir jetzt den Anschluß an die Überlegungen der früheren Paragraphen wieder herstellen. Nach Gl. (2) ist

$$\frac{1}{3} \sum_q \int k^q(\nu) d\nu = \frac{1}{3} \sum_q \Phi_q \cdot \int k_0(\nu) d\nu, \quad q = x, y, z, \quad (48)$$

wobei

Φ_x durch die speziellen Werte $\alpha = 0, \quad \tau = \frac{\pi}{2}$,

Φ_y durch die speziellen Werte $\alpha = 0, \quad \tau = 0$,

Φ_z durch die speziellen Werte $\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma = \frac{\pi}{2}$

definiert wird. Aus den Gl. (6), (9), (12), (15), (19) folgt für alle Kristallsysteme derselbe Wert für die Summe, nämlich

$$\sum_q \Phi_q = n, \quad (49)$$

und damit

$$\frac{1}{3} \sum_q \int k^q(\nu) d\nu = \frac{n}{3} \int k_0(\nu) d\nu = \frac{1}{3} \frac{n}{\Phi} \int k(\nu) d\nu. \quad (50)$$

Wir erhalten also

$$\left. \begin{aligned} A_{ik} &= \frac{8\pi}{c^2} \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \cdot \frac{g_i}{g_k} \cdot \frac{1}{N_i} \cdot \frac{1}{3} \frac{n}{\Phi} \int k(\nu) d\nu, \\ f_{ik} &= \frac{mc_i^2}{\pi e^2} \cdot \frac{1}{N_i} \cdot \frac{1}{3} \frac{n}{\Phi} \int k(\nu) d\nu. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Da Φ bereits für jede Orientierung von \mathfrak{S} und \mathfrak{E} zum Kristall berechnet ist¹⁾, können mit Hilfe dieser Beziehungen Übergangswahrscheinlichkeiten und Oszillatorenstärken durch Absorptionsmessungen mit beliebiger Polarisation bestimmt werden. Die Anzahl der nötigen Messungen wird aber nicht verringert, da Φ bei optisch zweiachsigen Kristallen noch zwei (die Winkel ϑ und φ), bei optisch einachsigen Kristallen noch eine Unbekannte (den Winkel ϑ) enthält, so daß insgesamt drei bzw. zwei Messungen nötig sind.

Ein wesentlicher Fortschritt der Gl. (51) gegenüber den Gl. (45) und (46) besteht aber darin, daß diese unbekannten Winkel gleichzeitig mit den A_{ik} bzw. f_{ik} bestimmt werden. D.h. wir bestimmen die Struktur²⁾ der Dipolscharen, die sich bei zweiachsigen Kristallen vollständig (ϑ und φ), bei einachsigen Kristallen teilweise (Neigung ϑ der Dipole gegen die optische Achse) ergibt. Bei kubischen Kristallen schließlich läßt sich wegen der optischen Isotropie keine Aussage über die Lage der Dipole machen. Da die Struktur der Dipolscharen natürlich durch den Aufbau des Kristalls bestimmt wird, erhalten wir somit in ϑ und φ zwei neue Meßgrößen des Kristallbaues.

Die Behandlung der *magnetischen* Dipolstrahlung ist völlig analog der elektrischen, wenn man unter den p_i schwingungsfähige magnetische Dipole versteht. Das die Übergangswahrscheinlichkeit bestimmende Übergangsmoment er_{ik} wird durch ein magnetisches Moment m_{ik} ersetzt, und entscheidend für die Absorption ist nicht der elektrische

¹⁾ Bei Messungen mit unpolarisiertem Licht bzw. an Pulvern ist natürlich Φ durch $\bar{\Phi}$ bzw. Φ zu ersetzen.

²⁾ Natürlich wieder nur in bezug auf die *Richtung* der zugehörigen Dipole.

Vektor \mathfrak{E} , sondern der magnetische Vektor \mathfrak{H} der eingestrahnten Lichtwelle. Bei Berücksichtigung dieser Abänderungen bleiben alle Gleichungen dieses Paragraphens auch für magnetische Dipolstrahlungen gültig. Auszunehmen ist nur der Begriff der Oszillatorenstärke, da er der klassischen Elektronentheorie entnommen ist und somit streng genommen auf magnetische Dipolstrahlung nicht angewendet werden kann.

6. Experimentelles Beispiel.

Die Messungen wurden durchgeführt am hexagonalen Nd-Zn-Nitrat und zwar an den Liniengruppen D , D' und E . Zur Erzielung genügender Linienschärfe wurden die Kristalle in flüssiger Luft gekühlt, da dann die Linien einer Gruppe sich auch in den Linienflügeln nicht mehr merklich überlappen. Die Aufnahmen wurden am 6 m-Konkavgitter des Instituts gemacht, das bei 125000 Strichen in der ersten Ordnung eine Dispersion von $1,97 \text{ \AA/mm}$ hat. Die benutzte Spaltbreite betrug 1 bis $1,5 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$. Sofort nach den Aufnahmen wurden mittels einer Hansenschen Stufenblende von Zeiss Schwärzungsmarken auf die Platten gedruckt. Die Platten (Agfa-Isopan-F) wurden in Final entwickelt und zusammen mit der Schwärzungstreppe auf einem Zeisschen Mikrophotometer bei dem Übersetzungsverhältnis von 1 : 30 ausphotometriert. Nach Umzeichnung auf Absorptionskonstanten wurde durch Planimetrierung die Gesamtabsorption $\int k(\nu) d\nu$ innerhalb jeder Linie bestimmt. Die Genauigkeit beträgt etwa 5%.

Die Kristalle wurden einmal parallel zur optischen Achse (X) mit unpolarisiertem Licht und einmal senkrecht zur optischen Achse mit linear polarisiertem Licht ($\mathfrak{E} \perp X$ oder $\mathfrak{E} \parallel X$) durchstrahlt. Der polarisierende Nikol befand sich direkt vor dem Gitterspalt.

Zur Veranschaulichung der benutzten Bezeichnungen ist in Fig. 2 das Termschema der Gruppe D dargestellt. Mit a , b , c werden die Komponenten bezeichnet, in die der obere Term im elektrischen Kristallfeld aufspaltet. I und II sind diejenigen Komponenten des Grundzustandes, die bei 80° abs. noch merklich besetzt sind. Die Linien Ia, Ib, Ic gehen also vom tiefsten Niveau I, die Linien IIa, IIb, IIc vom angeregten Niveau II aus zu den drei Komponenten des oberen Terms

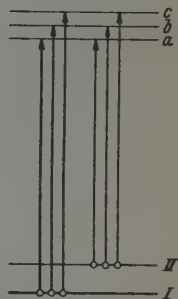


Fig. 2. Termschema der Liniengruppe D des $\text{Nd}_2\text{Zn}_2(\text{NO}_3)_{12} \cdot 24 \text{ H}_2\text{O}$.

Da es sich bei allen Übergängen um elektrische Dipolstrahlung handelt, ist die Gl. (51) unter Berücksichtigung von (15) und (24) anzuwenden. Sie wird speziell für die von uns gewählten Strahl- und Schwingungsrichtungen und in Oszillatorenstärken ausgedrückt zu

$$f_{ik} \cdot \sin^2 \vartheta = \frac{m c}{\pi e^2} \cdot \frac{1}{N_i} \cdot \frac{2}{3} \int k(\nu) d\nu \quad \text{für } \mathfrak{S} \parallel X, \text{ unpolar.}, \quad (52a)$$

$$f_{ik} \cdot \sin^2 \vartheta = \frac{m c}{\pi e^2} \cdot \frac{1}{N_i} \cdot \frac{2}{3} \int k(\nu) d\nu \quad \text{für } \mathfrak{S} \perp X, \mathfrak{E} \perp X, \quad (52b)$$

$$f_{ik} \cdot \cos^2 \vartheta = \frac{m c}{\pi e^2} \cdot \frac{1}{N_i} \cdot \frac{1}{3} \int k(\nu) d\nu \quad \text{für } \mathfrak{S} \perp X, \mathfrak{E} \parallel X. \quad (52c)$$

Die Gln. (52a) und (52b) sind identisch, d. h. die Theorie verlangt dieselbe Gesamtabsorption für diese beiden Fälle. Diese Vorhersage wird unten experimentell geprüft. Addiert man (52c) zu (52a) oder (52b), so erhält man f_{ik} . Der Winkel ϑ ergibt sich durch Division zweier solcher Gleichungen, die $\text{tg}^2 \vartheta$ liefert.

Die Zahl der absorbierenden Ionen (N_i) ist im Zustand II um den Boltzmann-Faktor kleiner als im Zustand I. Da höhere Komponenten nicht besetzt sind, ist

$$N_I + N_{II} = N = 1,50 \cdot 10^{21} \text{ cm}^{-3}. \quad (53)$$

Diese Gesamtzahl N der Ionen wurde aus einer Dichtebestimmung ermittelt. Es folgt dann

$$N_I = N \frac{e^{\frac{\epsilon}{kT}}}{\frac{g_{II}}{g_I} + e^{\frac{\epsilon}{kT}}}, \quad N_{II} = N \frac{e^{-\frac{\epsilon}{kT}}}{\frac{g_I}{g_{II}} + e^{-\frac{\epsilon}{kT}}}. \quad (54)$$

Nun ist als sicher anzunehmen, daß die Entartung der Elektronenterme im Kristall bis auf die Kramerssche zweifache Entartung bereits aufgehoben ist. D. h. es ist

$$g_I = g_{II} = 2 \quad (55)$$

zu setzen. Der Abstand ϵ zwischen I und II ist $36,6 \text{ cm}^{-1}$ und man erhält somit bei $T = 80^\circ$

$$N_I = 0,988 \cdot 10^{21} \text{ cm}^{-3}, \quad N_{II} = 0,512 \cdot 10^{21} \text{ cm}^{-3}. \quad (56)$$

Die Tabelle 2 enthält die mit diesen Werten berechneten ϑ -, f - und A -Werte zusammen mit den verschiedenen beobachteten Gesamtabsorptionen. Wie ein Vergleich der Spalten 3 und 4 zeigt, ist die Absorption einer Linie bei Beobachtung parallel zur Achse mit unpolarisiertem Licht

innerhalb der Fehlergrenzen tatsächlich, wie es die Theorie verlangt, ebenso groß wie bei Beobachtung senkrecht zur Achse mit ebenfalls senkrecht zur Achse schwingendem \mathcal{E} -Vektor.

Tabelle 2.

1	2	3	4	5	6	7	8
Linie	Wellenzahl	$\int k(\nu) d\nu \cdot 10^{-11} \text{ cm sec}$			ϑ	f	$\lambda \cdot \text{sec}$
		$\mathcal{E} \parallel X$ unpol.	$\mathcal{E} \perp X$				
			$\mathcal{E} \perp X$	$\mathcal{E} \parallel X$			
<i>D</i> Ia	17322 cm ⁻¹	4,13	4,19	47,9	22,5°	7,16 · 10 ⁻⁸	14,2
Ib	17372	24,0	22,4	—	90	5,92	11,8
Ic	17386	—	—	39,7	0	5,06	10,1
IIa	17285	19,15	18,8	—	90	9,35	18,7
IIb	17335	—	—	23,9	0	5,89	11,8
IIc	17350	7,77	8,02	—	90	3,89	7,8
<i>D'</i> Ia	17658	7,74	7,92	14,79	45	3,86	8,0
IIb	17650	—	—	7,98	0	1,97	4,1
<i>E</i> Ia	19182	11,94	11,97	15,81	50,5	4,97	12,8
Ib	19234	2,85	3,01	—	90	0,75	1,9
Ic	19246	—	—	11,82	0	1,51	3,9

Bei der Mehrzahl der Linien wird ein Neigungswinkel von 0 oder 90° gegen die Achse beobachtet, d. h. das Absorptionsellipsoid ist zu einem Ebenenpaar oder Zylinder ausgeartet. Die Voraussetzung für diese Beobachtung ist die große Schärfe der Linien und ihre daher rührende völlige Trennung. Denkt man sich z. B. durch Temperaturerhöhung die Terme so stark verbreitert, daß die Linien einer Gruppe sich zu einer breiten Bande überlappen, so wird wegen der Additivität der Absorptionskonstanten für jede Frequenz innerhalb dieser Bande zwar immer noch ein Ellipsoid gemessen werden, mit sehr großer Wahrscheinlichkeit jedoch kein ausgeartetes Ellipsoid mehr. Auch aus diesem Grunde sind die scharfen Spektren der Salze von Seltenen Erden besonders günstige Versuchsobjekte.

Die Messungen wurden gemeinsam mit Herrn cand. phys. D. Meyer durchgeführt und durch Hergabe von Apparaten von der Helmholtz-Gesellschaft unterstützt.

Göttingen, Zweites Physikalisches Institut, 29. März 1943.

Über die Verwendungsmöglichkeiten von Glühanoden zur massenspektroskopischen Isotopentrennung*).

Von W. Walcher in Göttingen.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 24. März 1943.)

Aus der Kenntnis des Emissionsvorganges der Kunsman-Koch-Anode wird geschlossen, daß Elemente mit einer Ionisierungsarbeit, die kleiner als die Austrittsarbeit der Trägersubstanz (Wolfram mit adsorbiertem Sauerstoff, maximal etwa 9 eV) ist, in einer solchen Anode in Ionenform erzeugt werden können. Es zeigt sich jedoch, daß diese Möglichkeit außer bei den Alkalien nur bei der In-, Ga-, Tl-Gruppe besteht, während z. B. die Erdalkalien für eine Ionisierung nach dieser Methode ungeeignet sind. Gründe hierfür werden angegeben. — Die Ausbeute der Alkalianoden wird zu fast 100% des auf der inneren Oberfläche des W-Pulvers adsorbierten Alkalimetalls gefunden, und zwar ist die in Amperestunden gemessene Kapazität konstant und weitgehend unabhängig vom Emissionsstrom, der bei einer Rubidiumanode bis zu 0,7 mA cm² dauernd gesteigert werden kann. Die Ausbeute einer Indiumanode hingegen beträgt nur etwa 5%. — Es wird gezeigt, daß sich die Anoden regenerieren lassen.

1. *Einleitung.* Für eine erfolgreiche massenspektroskopische Isotopentrennung ist das Vorhandensein stromstarker Ionenquellen mit genügender spezifischer Emission entscheidend. An die Ionenquellen sind dabei die Forderungen zu stellen¹⁾: 1. Die emittierten Ionen müssen eine genügend homogene Absolutgeschwindigkeit haben, und 2. die maximale seitliche Geschwindigkeitskomponente in einem „parallelen“ Ionenbündel muß unterhalb einer sehr kleinen Grenze²⁾ bleiben. Ionenquellen, die in geradezu idealer Weise diese Bedingungen erfüllen, sind die von Kunsman angegebenen und u. a. von Koch³⁾ in eine technisch handliche Form gebrachten Anoden. Sie beruhen in der Kochschen Ausführungsform auf der Eigenschaft eines zusammengepreßten Gemisches aus Wolframpulver und Alkalichlorid, bei Erhitzung Alkalionen zu emittieren. Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit war es, im

*) Teil einer Kieler Habilitationsschrift. Die Arbeit wurde am Institut für Experimentalphysik der Universität Kiel ausgeführt, ihre Veröffentlichung hat sich aus äußeren Gründen längere Zeit verzögert.

¹⁾ Vgl. den zusammenfassenden Bericht W. Walcher, *Ergebn. d. exakt. Naturwiss.* 18, 155, 1939. — ²⁾ Derselbe, *ZS. f. Phys.* 108, 376, 1938. — ³⁾ Jørgen Koch, ebenda 100, 679, 1936. Dort weitere Literatur.

Hinblick auf die massenspektroskopische Isotopentrennung die optimale Ausbeute solcher Anoden zu untersuchen und das Anwendungsgebiet dieser Art von Anoden auf möglichst viele chemische Elemente auszudehnen.

2. Form und Herstellung der Anoden. Die Form der Anode geht in allen Einzelheiten aus Fig. 1 hervor, sie ist ganz ähnlich der von Koch (l. c.) beschriebenen gewählt. Lediglich der das Gemisch aufnehmende Topf *T* ist im Hinblick auf die Erreichung optimaler Ausbeute anders als bei Koch gebaut. Der zylindrische Körper aus Molybdänblech ist mit Platin als Zwischenmetall geschweißt und

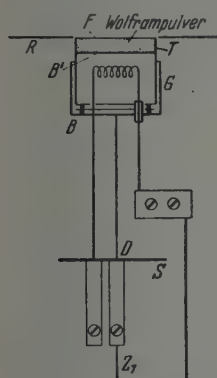


Fig. 1. Anodenaufbau.

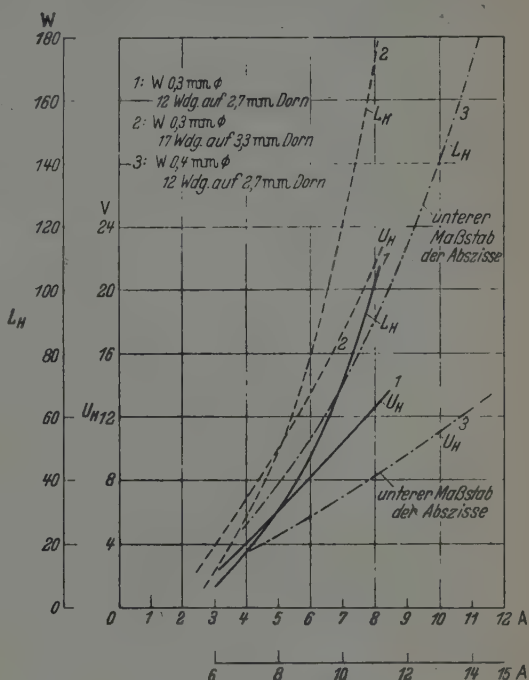


Fig. 2. Daten von Heizwendeln.

in die erweiterte Bohrung einer Pillenpresse so eingepaßt, daß der Stempel im Topfinnenen zügig läuft. Auf diese Weise kann mit Hilfe einer Presse das Gemisch im Topf selbst zu einer dichten Pille gepreßt werden, wodurch eine homogene Erwärmung der ganzen Pille im späteren Betrieb gewährleistet wird. Die Fläche *F* und der obere Topfrand liegen während des Pressens gegen eine gerichtete Platte an, so daß eine glatte Oberfläche der Pille entsteht, was zur Erfüllung der oben genannten Forderung 2. wesentlich ist. Nach Beendigung des Preßvorganges wird der Boden *B'* zur Halterung der Pille angebracht.

Die Heizung der Anoden erfolgt durch geeignet gewählte Wolframwendeln, deren Daten in Fig. 2 zusammengestellt sind.

3. *Emissionsvorgang und Folgerungen.* Das Gemisch besteht aus reinem, sauber ausgeheiztem (bei 1800 bis 2000° K) Wolframpulver (Korngröße etwa 1 μ) und einigen Prozent des Elements (bei den Alkalien in Form des Chlorids), dessen positives Ion erzeugt werden soll. Nach Herstellung der Pille muß die Anode erst einem Formierprozeß unterworfen werden, der im langsamen Hochheizen bis zur gewünschten Emission besteht. Im Falle der Alkalichloride hat man sich diesen Vorgang so vorzustellen, daß zunächst das Chlorid schmilzt und dissoziiert. Die positiven Alkaliionen werden an der großen „inneren Oberfläche“ der Wolframkörner bis zur monoatomaren Bedeckung — teils atomar, teils als Ion¹⁾ — adsorbiert, während das Chlor — nach Koch (l. c.) als Wolframchlorid — und das restliche Alkalimetall verdampfen. Am Ende des Formiervorgangs liegt also eine Wolframpille vor, deren ganze „innere Oberfläche“ monoatomar mit Alkali bedeckt ist²⁾. Steigert man die Temperatur der so vorbereiteten Anode weiter, so werden von der Anodenoberfläche (F) im ersten Moment adsorbierte Atome verdampfen, bis dort ein solcher Bedeckungsgrad erreicht ist, daß die Weiterverdampfung infolge Langmuir-Effekts in Ionenform vor sich geht. Die Anodenoberfläche kann bei diesem Vorgang nie völlig verarmen, da aus dem Inneren durch Diffusion längs der „inneren Oberfläche“ und durch die Zwischenräume zwischen den Wolfram-Körnern dauernd Alkali an die Oberfläche nachgeliefert wird, das diese aber sofort in Ionenform verläßt. Der Emissionsstrom wird also wesentlich durch die Größe des Diffusionsstromes bestimmt. Da dieser infolge Verarmung der ganzen Pille zeitlich stetig abnimmt, ist zur Erzielung einer konstanten Emission eine stetige Steigerung der Anodentemperatur nötig.

Nach den von Langmuir entwickelten Vorstellungen³⁾ ist das Verhältnis der Zahl der aus einer Adsorptionsschicht verdampfenden Ionen zur Zahl der verdampfenden neutralen Atome gegeben durch die Beziehung

$$\frac{n^+}{n^0} = e^{-\frac{e(I-\phi)}{kT}},$$

¹⁾ Vgl. I. H. de Boer, Elektronenemission und Adsorptionerscheinungen. Leipzig 1937. — ²⁾ Wird die Substanz in elementarer Form — vgl. Ziff. 5, Indium — zum Wolframpulver gegeben, so führt ein entsprechender Vorgang zum gleichen Endergebnis. — ³⁾ I. Langmuir, Proc. Roy. Soc. London (A) 107, 61, 1925.

wo I die Ionisierungsarbeit des adsorbierten Atoms und Φ die Austrittsarbeit der Unterlage ist. Man sieht, daß wenn I nur wenig größer als Φ ist, praktisch alle Teilchen als Atome verdampfen und umgekehrt. Nach dieser Vorstellung müßte es also möglich sein, die beschriebene Art von Ionenquelle für all die Elemente zu verwenden, deren Ionisierungsspannung kleiner als die höchste experimentell realisierbare Austrittsarbeit ist. Nun ist bekannt, daß die Austrittsarbeit des reinen Wolframs von $\Phi = 4,52$ e-Volt durch einen monoatomaren Sauerstoffbelag bis auf $\Phi = 9,2$ e-Volt erhöht werden kann. Eigene frühere Messungen haben jedoch in Übereinstimmung mit vielen anderen Messungen der Austrittsarbeit gezeigt, daß dieser optimale Wert von Φ kaum erreicht wird. Erhöhungen der Austrittsarbeit von 1 bis 2 e-Volt lassen sich durch Adsorption von Sauerstoff jedoch leicht erreichen. Andererseits weiß man, daß sich die Sauerstoffschicht nur sehr schwer¹⁾ ganz entfernen läßt, so daß das in den später berichteten Versuchen verwendete „reine“ Wolframpulver wahrscheinlich eine Austrittsarbeit von mehr als 5 e-Volt hatte.

Daher sind in Tabelle 1 zunächst einmal die Elemente mit einer Ionisierungsspannung unter 6 e-Volt zusammengestellt. Der Wert für das Cu ist deshalb mit aufgenommen, weil das Cu als Repräsentant eines Elements mit größerer Ionisierungsspannung im folgenden untersucht wurde.

Tabelle 1. Ionisierungsspannungen einiger Elemente.

Cs	3,88 eV	Na	5,12 eV	Ga	5,97 eV	Sr	5,67 eV
Rb	4,16 „	Li	5,37 „	Tl	6,08 „	La	5,5 „
K	4,32 „	In	5,76 „	Ba	5,19 „	Cu	7,69 „

Mit den in Tabelle 1 aufgeführten Elementen sollten sich also theoretisch derartige Anoden herstellen lassen, insbesondere da sämtliche Alkalien bereits mit Erfolg auf diese Weise in Ionenform erzeugt wurden und die Elemente Ga, In, Tl beim Beschießen eines oxydierten Wolframdrahtes mit einem Atomstrahl, wenigstens teilweise, ionisiert werden konnten²⁾.

¹⁾ Erst bei 2000° K, vgl. I. Langmuir u. D. S. Villars, Journ. Amer. Chem. Soc. 53, 486, 1931. — ²⁾ D. Brata, Proc. Roy. Soc. London (A) 141, 454, 1933; C. F. Powell u. D. Brata, ebenda 141, 463, 1933; C. F. Powell u. R. L. Mercer, Phil. Trans. 235, 101, 1933.

4. *Zeitlicher Verlauf und Temperaturabhängigkeit der Emission einer Rubidiumanode.* In Fig. 3 ist der Zeitverlauf der Emission einer mit RbCl (reinst) beschickten Anode aufgetragen. Man erkennt, daß der Emissionsstrom bei schrittweiser Steigerung der Heizleistung mit geringen Schwankungen auf einem konstanten Wert gehalten werden kann, daß er aber nach 16,5 Stunden trotz beliebiger Heizleistungssteigerung rasch auf Null absinkt. Die massenspektroskopische Untersuchung des Ionenstroms zeigt, daß er während des größten Teiles der Versuchszeit zum weitaus größten Teil aus Rb^+ , wenigen Prozenten K^+

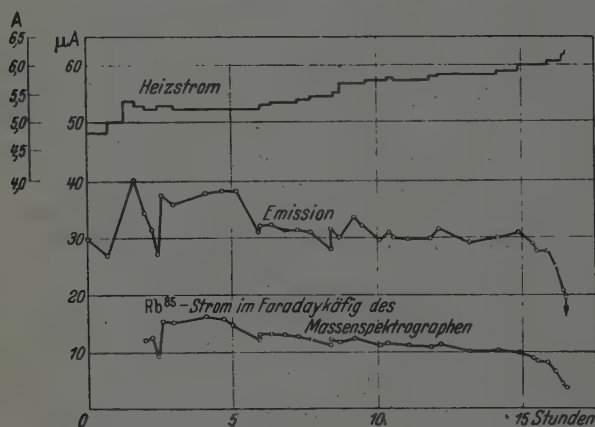


Fig. 3. Zeitlicher Verlauf der Emission einer gepreßten Rubidiumanode.

und Spuren Na^+ -Ionen besteht. Erst in der letzten Stunde treten die leichteren Alkalien etwas mehr in Erscheinung und sie sind es, die am Ende allein den Reststrom ausmachen.

Aus der unter der Ionenstromkurve gelegenen Fläche ermittelt man die „Kapazität“ der Anode zu $1,9 \text{ Cb}$ entsprechend $1,2 \cdot 10^{19}$ Teilchen, die also insgesamt auf der inneren Oberfläche adsorbiert sein müssen. Aus der mittleren Korngröße der W-Körner von 1μ Durchmesser und dem Volumen der Pille von $0,35 \text{ cm}^3$ ermittelt man bei „dichtester Kugelpackung“ eine innere Oberfläche von $14 \cdot 10^3 \text{ cm}^2$. Bei einem Durchmesser des Rb-Ions von $3,0 \text{ \AA}$ ¹⁾ haben auf dieser inneren Oberfläche bei monoatomarer Bedeckung $1,5 \cdot 10^{19}$ adsorbierte Teilchen Platz. Mit der Genauigkeit dieser Abschätzung läßt sich also aussagen, daß nahezu das gesamte beim Formiervorgang adsorbierte Rb in Ionenform abgegeben wird, daß also die Ausbeute der Rb-Anode

¹⁾ Goldschmidtscher Wert.

fast 100% ist. Ganz ähnlich verhalten sich Anoden mit Cs und K, während bei Na und Li die Verhältnisse schlechter liegen; dieses Verhalten soll in Ziffer 5 am Indium diskutiert werden.

Das Ergebnis an der Rb-Anode ist als wesentliche Stütze der Auffassung zu werten, daß 1. die „innere Oberfläche“ monoatomar bedeckt ist und 2. an der Anodenoberfläche (F) ein solcher Bedeckungsgrad (< 1) vorherrscht, daß vollständige Ionisation eintreten kann.

Fig. 4 zeigt die Abhängigkeit der Emission einer Rb-Anode von der Heizleistung (Temperatur). Durch passende Nachregulierung der Heizung läßt sich jede Emission bis zur Erschöpfung der Anode konstant halten¹⁾; die „Kapazität“ der Anode ist dabei innerhalb der Genauigkeitsgrenzen obiger Betrachtung konstant, sofern nicht bei zu hoher Heizung der Bedeckungsgrad an der Oberfläche so groß wird, daß nicht mehr vollständige Ionisation auftritt.

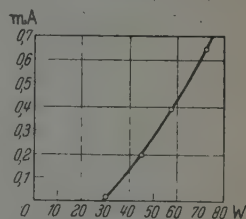


Fig. 4. Emission einer neu formierten Rubidianode in Abhängigkeit von der Heizleistung.

5. *Zeitlicher Verlauf der Emission einer Indiumanode.* Als Vertreter der Ga-, In-, Tl-Gruppe wurde eine In-Anode untersucht. Da ein beständiges In-Chlorid nicht erhältlich ist²⁾, wurde das In in Form von kleinen Metallspänen dem W-Pulver beigemischt. Beim Formierprozeß verdampft das Metall, und es entsteht dieselbe Adsorptionsschicht wie bei den Alkalien.

Fig. 5 zeigt die Gesamtemission (alle Ionensorten) einer solchen Anode in Abhängigkeit von der Zeit. Die Heizleistung ist bei dieser Anode von Zeit zu Zeit erhöht zum Zwecke der Feststellung der in den verschiedenen Temperaturbereichen auftretenden Ionenarten. Diese sind mit ihren relativen Intensitäten, wie sie im Massenspektrographen beobachtet wurden, in Fig. 5 eingetragen. Bei niedriger Temperatur erscheinen merklich nur Cs, Rb und K³⁾; bei steigender Heizleistung treten zunächst Na und In zur Emission hinzu, während die schweren Alkalien allmählich aussterben⁴⁾. Mit weiter wachsender

¹⁾ Bei Stromstärken über 0,2 mA wird die Konstanz der Emission immer schwerer realisierbar. — ²⁾ Die In-Chloride sind alle sehr hygroskopisch. —

³⁾ Die Alkalien, die in Spuren als Verunreinigungen überall vorhanden sind, treten in allen Anoden auf; die Methode ist als empfindlichster Nachweis dieser Elemente zu betrachten. — ⁴⁾ Diese Tatsache wurde ganz allgemein immer beobachtet. Bei Alkalimischananoden treten bei steigender Temperatur genau der Reihenfolge ihrer Ionisierungsspannung nach die Ionen auf und sterben entsprechend aus.

Heizleistung übernimmt das In den Hauptteil der Emission, dazu tritt Li auf, bis gegen Ende der Lebensdauer nur noch In, Na und Li vorhanden sind.

Eine Abschätzung der „Kapazität“ der In-Anode für In-Ionen ergibt eine wesentlich kleinere Ausbeute als beim Rb; sie beträgt etwa 5%. Das bedeutet, daß nur ein Bruchteil der die Oberfläche verlassenden Teilchen in Ionenform verdampft.

Da die Ionisierungsspannung des In 5,76 e-Volt beträgt, ist, damit überhaupt Ionisierung eintritt, eine Erhöhung der Austrittsarbeit

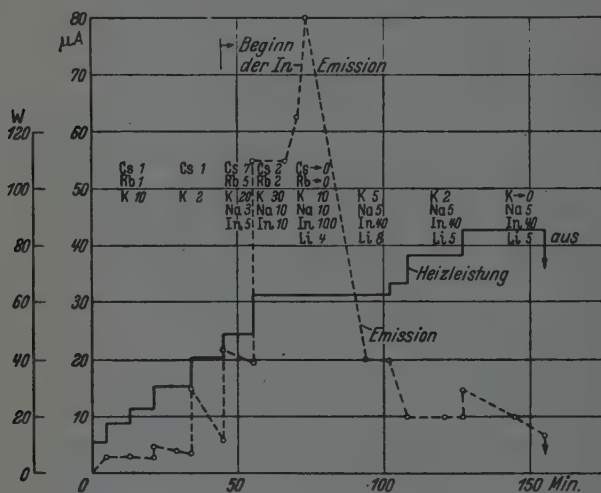


Fig. 5. Zeitlicher Verlauf der Emission einer Indiumanode.

des W durch Sauerstoff nötig; sie dürfte im vorliegenden Fall, wie in Ziffer 3 bereits erwähnt, von vornherein vorhanden sein. Da die Sauerstoffbelegung jedoch noch weit entfernt von der monoatomaren ist, treten lokale Schwankungen der Austrittsarbeit auf, denen zufolge nur ein geringer Teil der Oberfläche fähig ist, das In in Ionenform zu verdampfen; hieraus würde sich zwanglos die geringe Ausbeute der In-Anoden erklären lassen.

6. Emission einer mit „reinem“ Cu_2O beschickten Anode. Als Vertreter eines Elements mit größerer Ionisierungsspannung wurde Cu ($I = 7,69$ e-Volt) untersucht. Es wurde in Form seines Oxyds Cu_2O dem Wolframpulver beigegeben, da vermutet wurde, daß der bei der Zersetzung des Oxyds entstehende Sauerstoff auf der W-Oberfläche

teilweise adsorbiert und damit eine Erhöhung der Austrittsarbeit hervorgerufen würde.

Fig. 6 zeigt das Ergebnis. Es entstehen nur die Ionen der Alkalien, die als Spuren immer, auch bei reinsten Substanzen, vorhanden sind (vgl. Anm. 3, S. 609). Das einzig Bemerkenswerte an dem Versuch ist das relativ starke Auftreten des Lithiums, das wohl einer Erhöhung

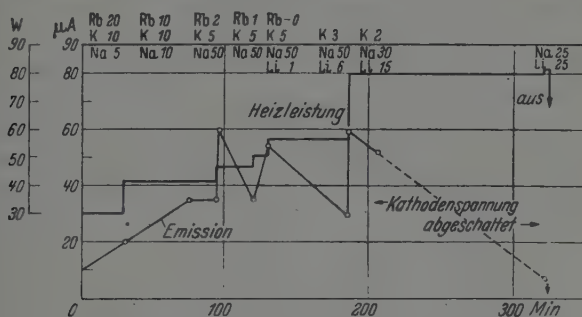


Fig. 6. Emission einer mit reinem Cu_2O beschickten Anode.

der Austrittsarbeit durch den Sauerstoff zuzuschreiben ist, diese Erhöhung hat aber offenbar nicht bis zu $\Phi = 7,69$ e-Volt geführt.

7. *Versuche mit Barium.* Das Barium erscheint unter den Nichtalkalien wegen seiner geringen Ionisierungsspannung von nur 5,19 e-Volt besonders geeignet zur Ionisierung in der vorliegenden Anode. Da ein Versuch mit BaCl_2 völlig negativen Erfolg hatte, wurden dem W-Pulver, ähnlich wie beim In, Barium-Metallschnitzel zugesetzt. Auch diese Maßnahme brachte keine Emission. Deshalb wurde zur Erhöhung der Austrittsarbeit das Wolframpulver in verschiedener Weise präpariert, teils durch Zusatz reiner Wolframsäure (WO_3), teils durch Beigabe selbst hergestellter niedriger Wolframoxyde. Der Erfolg war lediglich ein Emissionsstrom in Alkalien (Cs, Rb, K, Na) ohne jede Spur von Ba¹).

Es ist bekannt, daß Ba auf Wolfram als zweiwertiges Ion adsorbiert wird, da das Ba^+ weniger fest gebunden ist als das Ba^{++} . Das geht aus Fig. 7 hervor, wo die Potentialkurven für die Adsorption von Ba^\times , Ba^+ und Ba^{++} an reinem Wolfram aufgezeichnet sind; die Adsorptionswärmen sind dabei in bekannter Weise berechnet²). Man erkennt

¹) Ströme unter 10^{-7} Amp. waren für den vorliegenden Zweck uninteressant und wurden deshalb auch nicht festgestellt. — ²) Vgl. I. H. de Boer, l. c. S. 21 ff.

daraus, daß das adsorbierte Ba^{++} -Ion, wenn es die nötige Aktivierungswärme bekommt, sich in P neutralisieren und neutral verdampfen wird. Eine Erhöhung der Austrittsarbeit des W um mehr als 0,67 e-Volt bewirkt jedoch, daß die Kurven des Ba^+ und des Ba^{++} um einen entsprechenden Betrag nach unten geschoben werden, so daß die Kurve Ba^+ in großer Entfernung r unter der des Ba^x liegt. In diesem Falle findet bei Vorhandensein der nötigen Aktivierungsenergie in N eine Umladung von Ba^{++} in Ba^+ statt und das Teilchen kann als Ba^+ verdampfen.

Die Beobachtung zeigt aber, daß weder Ba^+ -Emission noch Ba^{++} -Emission auftritt, obwohl erstere energetisch möglich wäre. Dies mag vielleicht daher rühren, daß das Ba^{++} mit dem adsorbierten Sauerstoff

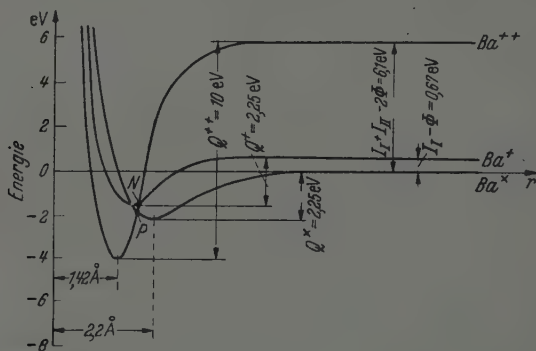


Fig. 7. Potentialkurven zur Adsorption von Ba^x , Ba^+ und Ba^{++} an einer Wolframfläche.

ein BaO -Molekül bildet, dessen Bindungsenergie stärker ist als seine Adsorptionsenergie. Rechnet man letztere aus der Bildkraft aus, so ergeben sich 2,72 e-Volt, während die Bindungsenergie einer Sr-O -Molekel (BaO unbekannt) experimentell zu 3,5 e-Volt bestimmt wurde. Nach dieser Annahme würde demnach nicht ein Ba^+ -Ion, sondern ein neutrales Ba-O -Molekül verdampfen.

8. *Regenerierbarkeit der beschriebenen Anoden.* Auf Grund der oben gegebenen Beschreibung vom Emissionsvorgang beruht die Erschöpfung der Anode auf der Entfernung der adsorbierten Metallmenge. Es muß daher prinzipiell möglich sein, durch Nachlieferung derselben der Anode eine wesentlich längere Lebensdauer zu geben.

Zur Prüfung dieser Annahme wurde oberhalb des Bodens B' (vgl. Fig. 1) einer Kaliumanode ein durch eine Wendel heizbares Nickelröhrchen eingeführt, das gegen die Anode zu mit W-KCl -Gemisch

und im hinteren Teil mit reinem KCl gefüllt war. Die Anode war sonst in der üblichen Weise hergestellt. Fig. 8 zeigt den zeitlichen Verlauf des Versuchs. Nachdem während der ersten 240 Minuten der Emissionsstrom bei konstanter Heizung auf etwa $2 \cdot 10^{-5}$ Amp. abgefallen war, wurde die Heizung der Anode auf einen Bruchteil erniedrigt und die Heizung des Regenerierröhrchens 30 Minuten lang angestellt; nach Ende des Regeneriervorganges erhielt die Anodenheizung den alten

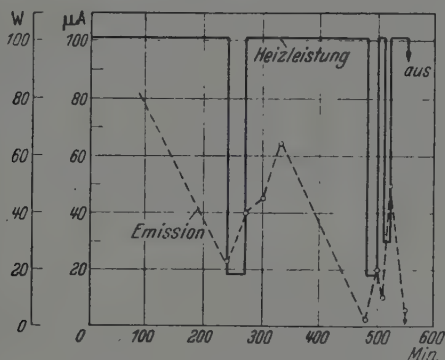


Fig. 8. Regenerierung einer Kaliumanode.

Wert. Die Emission ist durch die Regenerierung auf das Dreifache gestiegen und sinkt nach 3,5 Stunden auf $2 \cdot 10^{-6}$ Amp. ab. Zwei weitere Regenerierungen zeigen ihren Erfolg, doch ist er wegen der Erschöpfung der Regeneriervorrichtung nicht mehr so nachhaltig.

Da sowohl der Diffusionsvorgang als auch der Emissionsvorgang temperaturabhängig sind und wahrscheinlich bei verschiedenen Temperaturen ihr Optimum haben, ist in der Praxis so vorzugehen, daß ein Regenerierreservoir genügender Größe angebracht wird, das dauernd auf der für Diffusionsnachlieferung günstigsten Temperatur gehalten wird, während die Anode selbst die für Emission günstigste Temperatur erhält¹⁾.

¹⁾ Eine Vergrößerung des Anodenvolumens, die ebenfalls zu einer höheren Kapazität führen würde, ist auf Grund experimenteller Erfahrung weniger ratsam, da hierdurch die Heizleistung unnötig ansteigt und die Homogenität der Anodentemperatur in Frage gestellt wird.

Eine Näherungsmethode zur Berechnung der magnetischen Suszeptibilität.

Von **Heinz Koppe** in Berlin-Adlershof.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 15. April 1943.)

Die Suszeptibilität wird berechnet unter Zugrundelegung der Eigenfunktionen des Wasserstoffs im Magnetfeld. Diese können in beliebig hoher Näherung geschlossen angegeben werden. Wendet man auf diese Eigenfunktionen die Störungsrechnung zur Berücksichtigung der Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Elektronen an, so erhält man für die Suszeptibilität außer dem bekannten Mittelwert der Störungsenergie im Magnetfeld (gebildet über die normalen Wasserstoff-Eigenfunktionen) noch einen Zusatzterm, durch den die Übereinstimmung mit den experimentellen Werten verbessert wird. — Benutzung der so erhaltenen Eigenfunktion zur Berechnung der Feldstärkenabhängigkeit der Suszeptibilität und des Einflusses eines (elektrostatischen) Kristallfeldes.

1. Einleitung.

Zur Berechnung der magnetischen Suszeptibilität wird in der Regel so vorgegangen, daß man das Magnetfeld als kleine Störung auffaßt, und die üblichen Methoden der Störungsrechnung anwendet. Da die Suszeptibilität eines Atoms (im Falle des Diamagnetismus, der uns hier allein interessiert) von der Feldstärke unabhängig ist, solange diese nicht zu groß wird, so braucht man nur die erste Näherung. Das übliche Verfahren würde also richtige Werte liefern, wenn die Atom-eigenfunktionen genau bekannt wären. Berechnungen unter Zugrundelegung des Hartreeschen „self-consistent-field“ bestätigen das. Meistens kennt man aber die Atomeigenfunktionen auch nicht genau, sondern muß sie selbst erst wieder mit Hilfe irgendwelcher Näherungsmethoden bestimmen. Da die bei der Störungsrechnung auftretenden Matricelemente der Störungsfunktion in bezug auf die zu ihrer Berechnung benutzten Funktionen durchaus nicht unempfindlich sind, so macht man meist die Erfahrung, daß selbst Funktionen, die eine ganz brauchbare Näherung des betreffenden Atomterms liefern, bei der Berechnung der Suszeptibilität schlechte Werte ergeben.

Man kann nun versuchen, hier ohne allzgroßen Rechenaufwand eine Verbesserung zu erzielen, indem man das in Wirklichkeit vorliegende doppelte Störungsproblem umkehrt, und erst einmal die Eigenfunktionen des wasserstoffähnlichen Atoms im Magnetfeld berechnet. Sie mögen die Gestalt

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 H^2 + \psi_2 H^4 + \dots$$

haben (es treten nur gerade Potenzen von H auf, da, solange kein permanentes Moment vorhanden ist, die Feldstärke in die Störungsfunktion quadratisch eingeht). Solange Sättigungserscheinungen außer Betracht bleiben, braucht man sich um die höheren Potenzen von H nicht zu kümmern. (Es sei an dieser Stelle gleich bemerkt, daß von dieser Erlaubnis im folgenden auch ohne besondere Erwähnung laufend Gebrauch gemacht wird, gelegentlich unter dementsprechendem „Mißbrauch“ des $=$ -Zeichens.) Es zeigt sich nun, daß man ψ_1 (und im Prinzip natürlich auch ψ_2 usw.) sehr einfach in geschlossener Form berechnen kann. Gehen wir damit in die Atomstörungsrechnung ein, so haben wir jetzt „exakte“ (im Sinne des obigen Vorbehalts) Eigenfunktionen zur Verfügung. Man erhält auf diese Weise übrigens ein Ergebnis, welches analog ist zu der empirischen additiven Methode zur Berechnung der Molekülsuszeptibilitäten: Das Ergebnis setzt sich zusammen aus der Suszeptibilität der einzelnen Elektronen und einem „Bindungsinkrement“.

In dieser Arbeit wird die Rechnung an dem einfachen Beispiel des Heliums und der entsprechenden isoelektronischen Ionen durchgeführt.

2. Wellengleichung des Wasserstoffatoms im Magnetfeld.

Die zu lösende Wellengleichung des Kepler-Problems in einem Magnetfeld lautet¹⁾

$$\Delta \psi + \frac{2e}{\hbar c} \mathfrak{A} \operatorname{grad} \psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V] \psi - \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \mathfrak{A}^2 \psi = 0. \quad (1)$$

Dabei bedeutet \mathfrak{A} das Vektorpotential, für ein konstantes Magnetfeld der Stärke H in Richtung der z -Achse ist es gegeben durch:

$$\begin{aligned} A_x &= -\frac{1}{2} H \cdot y, \\ A_y &= \frac{1}{2} H \cdot x, \\ A_z &= 0. \end{aligned}$$

Wir gehen nun zu Polarkoordinaten über. Das zweite Glied in (1) hat dann die Form

$$\operatorname{const} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi.$$

Wir werden uns im folgenden auf s -Zustände beschränken. Da in diesem Falle die Eigenfunktionen nicht von φ abhängen, braucht

¹⁾ Siehe A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Band 2, S. 43, Formel (5). Braunschweig 1939.

dieser Term weiterhin nicht mehr berücksichtigt zu werden. Als Störungsglied bleibt dann in (1) noch stehen:

$$\frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \mathfrak{A}^2 \psi = \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \frac{H^2}{4} (x^2 + y^2) \psi = \mu (1 - \cos^2 \vartheta) r^2 \psi. \quad (2)$$

Setzt man schließlich für V noch das Potential eines Kerns von der Ladung Z

$$V = -\frac{Z e^2}{r},$$

so geht Gleichung (1) über in¹⁾

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + A + 2 \frac{B}{r} + \frac{1}{r^2} A_{\vartheta} \right] \psi = \mu [(1 - \cos^2 \vartheta) r^2 - a] \psi \quad (3)$$

mit

$$A = \frac{2m}{\hbar^2} E_0,$$

$$a = \frac{2m}{\hbar^2} \varepsilon,$$

$$E = E_0 + \mu \varepsilon + o(\mu^2),$$

$$B = \frac{m}{\hbar^2} Z e^2.$$

A_{ϑ} ist ein Differentialoperator, der nur von der Winkelkoordinate ϑ abhängt, und dessen Eigenfunktionen die Kugelfunktionen sind.

$$A_{\vartheta} P_l(\vartheta) = -l(l+1) P_l. \quad (4)$$

Wir führen jetzt

$$\varrho = 2r\sqrt{-A}$$

als neue Veränderliche ein, und erhalten aus (3) nach Multiplikation mit $-1/4A$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{1}{4} + \frac{B}{\sqrt{-A}} \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} A_{\vartheta} \right] \psi \\ = \frac{\mu}{16A^2} [(1 - \cos^2 \vartheta) \varrho^2 + 4Aa] \psi. \end{aligned} \quad (5)$$

Wir wollen die Störungsrechnung für einen 1s-Term durchführen. In diesem Falle besitzt das ungestörte Problem den Eigenwert

$$E_0 = -\frac{m e^4}{2 \hbar^2} Z^2 \quad (6)$$

und die Eigenfunktion

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-1/2 \varrho}. \quad (6')$$

¹⁾ Die Bezeichnungen, soweit sie sich auf die Wasserstoffeigenfunktionen beziehen, sind im Anschluß an die Behandlung bei A. Sommerfeld, l. c., S. 104ff. gewählt.

Die Normierung ist dabei so gewählt, daß ψ_0 über ϱ normiert ist. Wir merken noch an, daß sich mittels (6) ergibt:

$$\sqrt{-A} = \frac{m e^2 Z}{\hbar^2}; \quad \frac{B}{\sqrt{-A}} = 1. \quad (6'')$$

Wir unterwerfen nun (5) der üblichen Störungsrechnung, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \mu \psi_1 + o(\mu^2), \\ E &= E_0 + \mu \varepsilon + o(\mu^2). \end{aligned}$$

könnte nun sofort in der üblichen Weise berechnet werden. Wir verzichten darauf, da wir es später ohne Intergrationen nebenbei mitbekommen. ψ_1 genügt der Gleichung¹⁾

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{1}{4} + \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} A \vartheta \right] \psi_1 \\ = -\frac{1}{32\sqrt{2}\pi} \frac{1}{A^2} \{ (1 - \cos^2 \vartheta) \varrho^2 + 4 A a \} e^{-\varrho/2} \equiv \lambda f(\varrho). \end{aligned} \quad (7)$$

Wir entwickeln nun $f(\varrho)$ nach Kugelfunktionen:

$$\begin{aligned} f(\varrho) &= f_2(\varrho) P_2(\cos \vartheta) + f_0(\varrho), \\ f_2(\varrho) &= -\frac{2}{3} \varrho^2 e^{-\varrho/2}, \\ f_1(\varrho) &= \left[\frac{2}{3} \varrho + 4 A a \right] e^{-\varrho/2} \end{aligned}$$

und setzen schließlich:

$$\psi_1 = y_2(\varrho) P_2(\cos \vartheta) + y_0(\varrho).$$

Dann erhalten wir unter Berücksichtigung von (4) zunächst für y_2 die Gleichung

$$y_2'' + \frac{2}{\varrho} y_2' - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\varrho} + \frac{6}{\varrho^2} \right) y_2 = -\frac{2}{3} \lambda \varrho^2 e^{-\varrho/2}. \quad (8)$$

Die Form der rechten Seite legt es nahe, für y_2 den Ansatz

$$y_2 = (u \varrho^2 + v \varrho^3) e^{-\varrho/2}$$

zu machen. Einsetzen in (8) liefert für u und v zwei lineäre Gleichungen, aus denen man beide bestimmen kann. So erhält man:

$$y_2 = +\frac{2}{\varrho} \lambda (\varrho^3 + 3 \varrho^2) e^{-\varrho/2}.$$

Dazu wäre noch eine beliebige den Randbedingungen genügende Lösung der homogenen Gleichung zu addieren. Eine solche gibt es aber nicht²⁾ (das wäre nämlich die Eigenfunktion eines $1p$ -Terms).

¹⁾ Siehe z. B. E. Kamke, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, S. 229. Leipzig 1942. — ²⁾ Vgl. E. Kamke, l. c. S. 444, Gleichung (2. 171).

Für y_0 bekommen wir eine ähnliche Differentialgleichung,

$$y_0'' + \frac{2}{\varrho} y_0' - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\varrho} \right) y_0 = \lambda \left(\frac{2}{3} \varrho^2 + 4 A a \right) e^{-\varrho/2}, \quad (8')$$

in die wir wieder mit dem Ansatz (9) hineingehen. Diesmal bekommen wir aber für die zwei Unbekannten u und v drei lineare Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 6u &= 4\lambda A a, \\ 2u - 12v &= 0, \\ v &= -2/3\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Das kommt daher, daß in diesem Falle auch die homogene Gleichung eine Lösung besitzt (nämlich ψ_0), und sich dann die inhomogene Gleichung nur lösen läßt, wenn die rechte Seite bestimmten Bedingungen genügt. In $f_0(\varrho)$ können wir nun in der Tat noch über a verfügen. Wir bestimmen es so, daß die drei Gleichungen (11) miteinander verträglich werden. Man bekommt auf diese Weise

$$a = -\frac{2}{A}, \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon = \frac{h^6}{m^3 c^4 Z^2} \quad (12)$$

und für y_0 ergibt sich:

$$y_0 = -\frac{2}{\varrho} \lambda (\varrho^3 + 6\varrho^2) e^{-\varrho/2} + c e^{-\varrho/2},$$

da in diesem Falle, wie oben schon bemerkt, die homogene Gleichung eine Lösung besitzt. c legen wir an besten so fest, daß y_0 zu ψ_0 orthogonal ist. Auf diese Weise ist nämlich (y_2 ist wegen der als Faktor auftretenden Kugelfunktion ebenfalls orthogonal zu ψ_0) $\psi' = \psi_0 + \mu \psi_1$ bis auf Glieder von der Größenordnung μ^2 normiert. Für c findet man so den Wert -121 .

$$y_0 = -\frac{2}{\varrho} \lambda (\varrho^3 + 6\varrho^2 - 121) e^{-\varrho/2}. \quad (12')$$

Die so gefundene Lösung ist eine Eigenfunktion erster Näherung von (3). Es ist für das folgende zweckmäßig, diese Tatsache etwas anders auszusprechen, nämlich so: Die Funktion $\psi' = \psi_0 + \mu \psi_1$ ist die *exakte* Eigenfunktion der Differentialgleichung

$$\Delta \psi' + \frac{2m}{h^2} [E' - V] \psi' - U \psi' = 0, \quad (13)$$

bei der sich U nur um Größen der Ordnung μ^2 von der rechten Seite von (3) unterscheidet.

3. Das Zweielektronenproblem.

Wir wenden jetzt die gewonnenen Ergebnisse auf die Behandlung des Zweielektronenproblems an. Je nach dem Wert, den wir für Z einsetzen, erhalten wir auf diese Weise die Suszeptibilität von H^- , He , Li^+ , Be^{++} . Bei der wellenmechanischen Behandlung des Zweielektronenproblems ist es bekanntlich zweckmäßig, die Wechselwirkung der Elektronen zunächst einmal annähernd durch eine geeignete Abschirmung des Kernfeldes zu berücksichtigen¹⁾. Man spaltet zu diesem Zweck die potentielle Energie des Kerns auf

$$Z \frac{e^2}{r} = (Z - \alpha) \frac{e^2}{r} + \alpha \frac{e^2}{r}$$

und behandelt das zweite Glied auf der rechten Seite als Störungsglied. Die Schrödinger-Gleichung sieht dann so aus:

$$\begin{aligned} \sum_{1,2} \left[A_i + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E' + (Z - \alpha) \frac{e^2}{r_i} \right) - U(r_i) \right] \psi \\ = - \frac{2m}{\hbar^2} \left[\alpha \frac{e^2}{r_1} + \alpha \frac{e^2}{r_2} - \frac{e^2}{r_{12}} + \Delta E' \right] \psi. \end{aligned} \quad (14)$$

Dabei ist U das oben in (13) eingeführte Störungsglied. Die linke Seite läßt sich durch einen Produktansatz separieren. Um die Ergebnisse des vorigen Abschnitts anwenden zu können, führen wir wieder neue Variable

$$\varrho_i = 2r_i \sqrt{-A'},$$

wobei aber jetzt, da $Z - \alpha$ an die Stelle von Z getreten ist, A hier, und wo es sonst noch in diesem Abschnitt auftritt, durch

$$A' = - \frac{m^2 e^4}{\hbar^4} (Z - \alpha)^2 = A \left(\frac{Z - \alpha}{Z} \right)^2 \quad (15)$$

zu ersetzen ist. Benutzen wir als Eigenfunktion nullter Näherung das Produkt zweier Eigenfunktionen von (13)

$$\psi'(1, 2) = \psi'(\varrho_1) \psi'(\varrho_2),$$

so ergeben die bekannten Formeln der Störungsrechnung

$$\Delta E' = 2 \frac{Z - \alpha}{Z} e^2 \sqrt{-A} \{ 2\alpha J_1 - J_{12} \}, \quad (16)$$

¹⁾ Vgl. den Artikel von H. Bethe, Die Quantenmechanik der Ein- und Zwei-Elektronenprobleme im Handb. d. Phys. XXIV 1, S. 329. Berlin 1933.

wobei

$$\begin{aligned}
 J_{12} &= \int \psi'(1)^2 \psi'(2)^2 \frac{1}{e_{12}} d\tau_1 d\tau_2, \\
 &= \int \psi_0(1)^2 \psi_0(2)^2 \frac{1}{e_{12}} d\tau_1 d\tau_2 + \\
 &\quad + 4\mu \int \psi_0(1) \psi_1(1) \psi_0(2)^2 \frac{1}{e_{12}} d\tau_1 d\tau_2, \\
 J_1 &= \int \psi'(1)^2 \frac{1}{e_1} d\tau \\
 &= \int \psi_0(1)^2 \frac{1}{e_1} d\tau + 2\mu \int \psi_0(1) \psi_1(1) \frac{1}{e_1} d\tau.
 \end{aligned}$$

Die Auswertung der Integrale bereitet keine Schwierigkeiten. Zunächst fallen auf Grund der Orthogonalitätsrelationen der Kugelfunktionen alle Integrale, in denen y_2 auftritt, wegen des Faktors $P_2(\cos \vartheta)$ fort. Die Werte einiger sonst noch bei J_{12} auftretender, etwas komplizierterer Integrale sind im Anhang 1 abgeleitet. Es ergibt sich:

$$J_1 = \frac{1}{2} + \frac{61}{72} \frac{\mu}{A'^2},$$

$$J_{12} = \frac{5}{16} + \frac{349}{576} \frac{\mu}{A'^2}.$$

Einsetzen in (16) liefert

$$\begin{aligned}
 \Delta E' &= \Delta E_0 + \mu \Delta \varepsilon \\
 &= -2e^2 \sqrt{-A} \frac{Z-\alpha}{Z} \left(\alpha - \frac{5}{16} \right) + \frac{2e^2 \mu}{|A|^{3/2}} \left(\frac{Z}{Z-\alpha} \right)^3 \left(\frac{349}{576} - \frac{61}{36} \alpha \right). \quad (17)
 \end{aligned}$$

Es ist nun noch ein geeigneter Wert für α zu bestimmen. Nun ergibt sich auf Grund des Zusammenhanges der Störungsrechnung mit dem Ritzschen Variationsverfahren, daß der so erhaltene Eigenwert höchstens zu groß ist. Die günstigste Wahl ist also diejenige, die $2E' + \Delta E'$ zu einem Minimum macht. Da μ von erster Ordnung klein ist, können wir alle damit behafteten Glieder vernachlässigen¹⁾ und erhalten so

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (2E_0 + \Delta E_0) = 0 \quad (18)$$

und daraus²⁾

$$\alpha = \frac{5}{16}.$$

Damit ergibt sich:

$$E = -\frac{me^4}{\hbar^2} (Z-\alpha)^2 + \frac{1}{2} H^2 \cdot \frac{\hbar^4}{m^3 e^3 c^2} \frac{1}{(Z-\alpha)^2} \left[1 + \frac{0,0764}{Z-\alpha} \right] \quad (20)$$

¹⁾ Genauer: Eine Abhängigkeit zwischen α und μ etwa in der Form $\alpha = \alpha_0 + \mu \alpha_1$ würde zu Gliedern führen, die mindestens quadratisch in μ , also bei einer ersten Näherung zu vernachlässigen sind. — ²⁾ Auf Grund andersartiger Überlegungen wurde dieser Wert bereits von J. Frenkel erhalten. S. J. Frenkel, Wellenmechanik, Berlin 1929, und H. Bethe, l. c.

und daraus insbesondere für die Energie des Grundzustandes

$$E_0 = - \frac{m e^4}{\hbar^2} (Z - \alpha)^2 \quad (20')$$

und für die Suszeptibilität

$$\chi_{mol} = - 2 N_L \frac{\partial}{\partial H^2} E = - \frac{\hbar^4 N_L}{m^3 c^2 e^2} \frac{1}{\left(Z - \frac{5}{16}\right)^3} \left[1 + \frac{0,0764}{Z - \frac{5}{16}} \right]. \quad (20'')$$

Um ein Bild von der Güte der Näherung zu bekommen, vergleichen wir zunächst einmal die nach (20') berechneten Werte der Energie des Grundzustandes mit den experimentellen Daten.

Tabelle 1.

Element	E_0 ber. nach (20')	E_0 experimentell
He ⁻	$1,617 \cdot 10^{-11}$	$2,035 \cdot 10^{-11}$ 1)
He	$12,26 \cdot 10^{-11}$	$12,51 \cdot 10^{-11}$
Li ⁺	$31,10 \cdot 10^{-11}$	$31,33 \cdot 10^{-11}$
Be ⁺⁺	$58,55 \cdot 10^{-11}$	$58,84 \cdot 10^{-11}$

Für die Suszeptibilität erhalten wir nach (20'')

Tabelle 2.

$\chi_{mol} \cdot 10^{+6}$	H	He	Li ⁺	Be ⁺⁺
	11,1	1,74	0,672	0,349

Ein von Hilfsannahmen freier experimenteller Wert steht nur für He zur Verfügung. Nach Messungen von Hector und Wills²⁾ ist $\chi_{mol} = - 1,88 \cdot 10^{-6}$. Die Genauigkeit wird mit 2% angegeben. Die Differenz zu dem berechneten Wert ist $0,14 \cdot 10^{-6} = 7,5\%$.

Es erhebt sich nun die Frage nach dem Gewinn, den die hier benutzte Umkehrung der Reihenfolge der Störungsrechnung gebracht hat. Nun überzeugt man sich leicht, daß die Berechnung der Suszeptibilität nach dem üblichen Schema

$$\chi_{mol} = - \frac{N_L e^2}{6 m c^2} \Sigma \overline{r^2} \quad (21)$$

mit

$$\psi' = \frac{1}{8\pi} e^{-1/2} (e_1' + e_2')$$

¹⁾ Theoretischer Wert hoher Näherung vgl. H. Bethe, l. c. — ²⁾ A. P. Wells u. L. G. Hector, Phys. Rev. 23, 209, 1926 und L. G. Hector, ebenda 24, 418, 1926. — Anmerkung bei der Korrektur: Neuerdings hat G. G. Havens (Phys. Rev. 43, 933, 1933) die Suszeptibilitäten einiger Gase sehr genau gemessen. Für He findet er $- 1,906 \cdot 10^{-6}$ in guter Übereinstimmung mit dem Wert von Hector.

als Näherungseigenfunktion einen Ausdruck ergeben hätte, der mit (20'') bis auf den zweiten Summanden in der Klammer übereinstimmt¹⁾. Dieser stellt das oben erwähnte „Bindungsinkrement“ dar. Im Falle des Heliums erhöht es den Wert von χ um 4,5 %, es drückt also trotz seiner Kleinheit den Fehler um mehr als $1/3$ herunter. Daß diese Korrektur so verhältnismäßig wenig ausmacht, liegt daran, daß wir von einigermaßen brauchbaren Näherungs-Eigenfunktionen ausgegangen sind. Man kann sich die Zweckmäßigkeit des eingeschlagenen Weges recht eindrucksvoll vor Augen führen, wenn man den Vergleich zwischen (20'') und (21) unter Benutzung von ungünstigeren Näherungseigenfunktionen anstellt. Wir können das in einfacher Weise dadurch bewerkstelligen, daß wir der Abschirmungskonstante α verschiedene von $5/16$ abweichende Werte erteilen. In der Fig. 1 sind die so erhaltenen Werte von χ_{mol} aufgetragen. Man sieht, daß die nach (20'') berechneten Suszeptibilitäten von α ziemlich unabhängig sind, solange α nur nicht allzusehr von dem Wert $5/16$ abweicht.

Es wäre nun erwünscht, ein Verfahren zur Abschätzung der Genauigkeit von χ zu besitzen. Bei der Berechnung von Eigenwerten ist das bekanntlich ohne weiteres möglich, da der berechnete Wert selbst eine obere Schranke darstellt, und seit einiger Zeit Methoden zur Verfügung stehen, nach denen man eine untere Schranke für den betreffenden Eigenwert berechnen kann²⁾. Im vorliegenden Falle hängt nun der Eigenwert von der Feldstärke ab:

$$E = E_0 + \chi_{mol} \cdot \frac{H^2}{2N_L}. \quad (22)$$

Wendet man darauf die oben erwähnten Methoden an, so erhält man einen „Schlauch“, innerhalb dessen die Kurve (22) verlaufen muß (Fig. 2). Wie man aus der (absichtlich übertriebenen) Darstellung sieht, lassen sich daraus gar keine Schlüsse auf den Differentialquotienten, auf den es ja hier ankommt, ziehen. (Mathematisch drückt sich das

¹⁾ Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei betont, daß Gl. (21) selbstverständlich richtig ist. Nur kann man eben normalerweise $\sum \bar{r}^2$ nicht genau berechnen, und durch den zweiten Summanden in (20''), dessen Form und Größe von der benutzten Näherungseigenfunktion abhängt, wird ein Teil des so begangenen Fehlers kompensiert. — ²⁾ Vgl. E. Kamke, l. c. S. 233ff.; L. Collatz, ZS. f. angew. Math. Mech. 19, 224ff., 297ff., 1939. Eine Reihe dieser Abschätzungsmethoden gelten nur für positiv-definite Eigenwertprobleme, von ihrer Anwendbarkeit auf die Schrödinger-Gleichung muß man sich in jedem Falle erst überzeugen. Vgl. dazu auch A. Newing, Phil. Mag. 7) 24, 114—127, 1929.

darin aus, daß man Ungleichungen nicht auf beiden Seiten differenzieren kann). Zu einem etwas positiveren Ergebnis gelangt man im Falle, daß die benutzten Näherungseigenfunktionen einen sehr genauen Wert für die Energie des Grundzustandes liefern. Aus der Fig. 3 erkennt man, daß dann der berechnete Wert eine obere Grenze für χ_{mol} darstellt. Ein Vergleich zwischen einem mit Hartree-Funktionen berechneten Wert für He ($1,90 \cdot 10^{-6}$) und dem experimentellen bestätigt das.

Methoden, nach denen sich allgemein die Genauigkeit der berechneten Werte für die Suszeptibilität abschätzen läßt, scheint es noch nicht zu geben. Im Anhang 2 wird eine Abschätzung abgeleitet, die sich aber nur auf Formeln vom Typ (21) bezieht, und außerdem außerordentlich grob ist. In unserem Falle liefert sie das zwar richtige, aber ziemlich nichtssagende Ergebnis, daß die berechneten Suszeptibilitäten zumindest größenordnungsmäßig richtig sind.

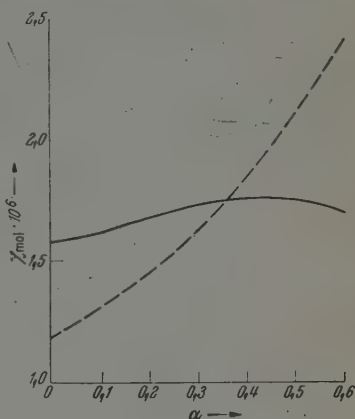


Fig. 1. χ_{mol} in Abhängigkeit von α , berechnet nach (20') (ausgezogene Kurve) und nach (21) (gestrichelt).

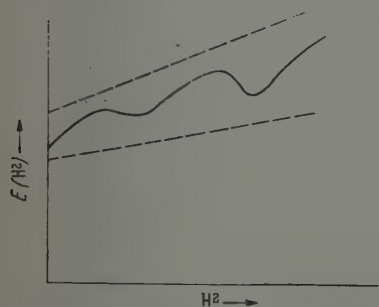


Fig. 2. E in Abhängigkeit von H^2 (ausgezogen) mit oberer und unterer Grenze (gestrichelt).

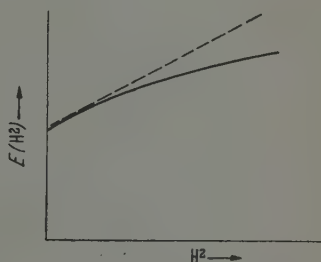


Fig. 3. Dasselbe wie Fig. 2.

Vermutlich dürfte der Fehler von χ_{mol} denselben Gang aufweisen wie der von E_0 . Daraus wäre zu schließen, daß die berechneten Suszeptibilitäten von Li^+ und Be^{++} noch etwa um 10% falsch sein können, während der Fehler bei H^- größer sein kann.

¹⁾ E. C. Stoner, Proc. Leeds Phil. Soc. 1, 484, 1929.

4. Suszeptibilität des Wasserstoffatoms in höherer Näherung.

Bis jetzt haben wir in bezug auf den Parameter μ immer Störungsrechnung 1. Näherung getrieben. Man kann nun die in Abschnitt 1 gefundenen Eigenfunktionen dazu benutzen, die zweite Näherung des Eigenwertes der Gleichung (3) auszurechnen. Dies ist in Hinblick auf Sättigungserscheinungen bei der Suszeptibilität von Interesse.

Wir wiederholen nochmals kurz: Für die Eigenfunktion bzw. den Eigenwert der Gleichung (3) hatten wir den Ansatz

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 + \mu \psi_1 + \mu^2 \psi_2 + \dots, \\ E &= E_0 + \mu \varepsilon_1 + \mu^2 \varepsilon_2 + \dots\end{aligned}$$

gemacht. ψ_2 genügt nun der inhomogenen Differentialgleichung¹⁾

$$L[\psi_2] = \left[\varepsilon_1 - \frac{\hbar^2}{2m} (1 - \cos^2 \vartheta) r^2 \right] \psi_1 + \varepsilon_2 \psi_0. \quad (23)$$

Dabei ist $L[\psi_2]$ als Abkürzung für die durch $2m/\hbar^2$ dividierte linke Seite der Gleichung (3) gesetzt. Damit (23) eine Lösung besitzt, muß die rechte Seite orthogonal zur Lösung der homogenen Gleichung sein. Da ψ_1 zu ψ_0 orthogonal ist, ergibt sich, wenn man unter dem verbleibenden Integral noch ϱ für r einführt,

$$\varepsilon_2 = - \frac{\hbar^2}{8m A} \int \psi_0 \psi_1 (1 - \cos^2 \vartheta) \varrho^2 d\tau. \quad (24)$$

Ausführung der Integration liefert:

$$\varepsilon_2 = \frac{329}{72} \cdot \frac{\hbar^2}{m A^3}.$$

Der entsprechende Anteil an der Suszeptibilität ergibt sich dann zu

$$\chi' = -2 N_L \frac{\partial}{\partial H^2} \mu^2 \varepsilon_2 = \frac{329}{288} \cdot \frac{1}{Z^6} \cdot \frac{\hbar^{10} N_L}{c^4 e^8 m^7} \cdot H^2 = 9,79 \cdot 10^{-25} \cdot \frac{H^2}{Z^6}.$$

Mit $Z = 1$ erhält man so die Feldstärkenabhängigkeit der Suszeptibilität von H-Atomen. Den entsprechenden Wert für He bekommt man annähernd, indem man für Z den Wert $2 - 5/16$ einsetzt und den so erhaltenen Wert verdoppelt. Man findet auf diese Weise für die Suszeptibilität

$$-\chi_{mol} = 1,74 \cdot 10^{-6} - 0,848 \cdot 10^{-25} \cdot H^2.$$

Eine merkliche Inkonzanz der Suszeptibilität (Abweichung um 10%) sollte demnach bei He bei Feldstärken von $1,5 \cdot 10^9$ (elst. Einh.) zu bemerken sein.

¹⁾ Vgl. E. Kamke, l. c. S. 229, Formel (9).

5. Einfluß des Gitterfeldes auf die Suszeptibilität von Ionen in Kristallen.

Wir können die in Abschnitt 2 berechneten Eigenfunktionen erster Näherung auch dazu benutzen, die Beeinflussung der Suszeptibilität der betrachteten Ionen durch den Eintritt in einen Kristall zu berechnen. Die Wechselwirkung eines Ions mit seinen Nachbarn im Kristall beruht auf zweierlei Einflüssen: Einmal wirken diese durch rein elektrostatische Kräfte, dann treten noch Austauschwirkungen hinzu. Wir wollen die letzteren hier vernachlässigen, und zusehen, wie groß der Einfluß der rein elektrostatischen Kräfte ist. Betrachten wir die Nachbarionen als Punktladungen (was berechtigt sein dürfte, da sich nach den Ergebnissen der Fourier-Analyse von Ionenkristallen die Elektronenwolken der einzelnen Ionen praktisch nicht überdecken), so haben wir in Gleichung (3) noch ein Zusatzpotential U_g neben dem Kernfeld zu berücksichtigen. Dieses muß der Laplaceschen Differentialgleichung genügen, und läßt sich demnach nach Kugelfunktionen entwickeln in der Form

$$U_g = \frac{1}{d} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^l \sum_{m=-l}^{+l} c_{lm} \cdot P_l^{|m|}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad (25)$$

wobei d irgend eine charakteristische Länge des Gitters bedeutet. Der Einfluß auf die Suszeptibilität ist dann gegeben durch den Ausdruck

$$\Delta\chi_{el} = -2N_L \cdot \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} \int \psi_0 U_g \psi_1 d\tau. \quad (26)$$

Da, wie wir oben gesehen haben, ψ_1 die Form $y_2 P_2 + y_0$ hat, ist $\Delta\chi_{el}$ proportional zu c_{20} .

Das einzige Gitter aus Ionen vom „Heliumtyp“, auf das wir unsere Betrachtungen anwenden können, ist das Lithiumhydrid. Es kristallisiert in einem kubischen Gitter mit Steinsalzstruktur. In einem solchen Gitter muß aber aus Symmetriegründen¹⁾ c_{20} verschwinden. Beim LiH werden deshalb die Atomsuszeptibilitäten durch das elektrostatische Gitterfeld nicht beeinflusst²⁾. Die Molsuszeptibilität ist als einfach durch die Summe der betreffenden Werte für die Ionen gegeben:

$$-\chi_{mol}(\text{LiH}) = 11,8 \cdot 10^{-6}.$$

¹⁾ Da U_g eindeutig bestimmt ist, müssen alle Glieder der Reihe (25) mindestens die Symmetrie des Gitters aufweisen. Nun besitzt die Verteilung der Atome um ein herausgegriffenes im Steinsalzgitter die Punktsymmetrie O in der Schönflieschen Bezeichnung, $P_2(\cos \vartheta)$ dagegen die Symmetrie $C_{\infty h}$.

— ²⁾ Die Frage, in welchem Gitter c_{20} , und damit $\Delta\chi_{el}$ nicht verschwinden würde, läßt sich nach der vorhergehenden Fußnote dahin beantworten, daß dann die zum Gitter gehörige Punktsymmetrie eine Untergruppe von $C_{\infty h}$ sein müßte. Das ist beim tetragonalen, trigonalen und hexagonalen Gitter der Fall

Dieses etwas negative Resultat ist insofern erfreulich, als es gestattet, nachzuprüfen, ob eine Beeinflussung der Suszeptibilität durch Austauschkräfte stattfindet. Eine solche muß nämlich in allen Fällen vom Abstand der Ionen im Gitter abhängen. Damit ist eine Volumenabhängigkeit der Suszeptibilität gegeben, und daraus folgt auf Grund einer bekannten thermodynamischen Beziehung¹⁾ das Auftreten einer Magnetostriktion. Diese ist also bei LiH ein Maß dafür, inwieweit die Suszeptibilität durch Austauschkräfte beeinflußt werden kann.

Diese Betrachtungen gelten, wie nochmals betont sei, nur für *s*-Elektronen. Bei Elektronen in Quantenzuständen mit höherer Nebenquantenzahl treten in der Entwicklung von $\psi_0 \psi_1$ wesentlich mehr Kugelfunktionen auf und demzufolge können auch mehr Glieder in (25) zu $\Delta\chi$ beitragen, welches demnach im allgemeinen durchaus nicht zu verschwinden braucht.

Anhang 1.

Bei der Auswertung des Integrals J_{12} [Formel (16)] treten folgende etwas kompliziertere Integrale auf:

$$A(n) = \int e^{-(r_1 + r_2)} \frac{r_1^{n-1}}{r_2 r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 = 16\pi^2 \cdot n! \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$A(0) = 8\pi^2$$

$$A(1) = 12\pi^2$$

$$A(2) = 28\pi^2$$

$$A(3) = 90\pi^2$$

$$A(4) = 372\pi^2$$

$$B(n) = \int e^{-(r_1 + r_2)} \frac{r_1^{n-1}}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2 = 32\pi^2 \cdot n! \left(1 - \frac{n+5}{2^{n+3}}\right)$$

$$B(0) = 12\pi^2 \quad [= A(1)]$$

$$B(1) = 20\pi^2$$

$$B(2) = 50\pi^2$$

$$B(3) = 168\pi^2$$

$$B(4) = 714\pi^2$$

¹⁾ Vgl. Felix Bloch, Molekulartheorie des Magnetismus in Handb. d. Radiologie VI/2, 2. Auflage, S. 383, Leipzig 1933.

Beide Integralformeln lassen sich aus einer von Hellmann¹⁾ angegebenen

$$J_0 = \int e^{-(u r_1 + v r_2)} \frac{1}{r_1 r_2} \cdot \frac{1}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2$$

ableiten, indem man entsprechend oft nach u bzw. v differenziert, und nachträglich $u = v = 1$ setzt.

$$A(n) = \left| \frac{\partial^n}{\partial u^n} J_0 \right|_{u, v=1}$$

$$B(n) = \left| \frac{\partial^n}{\partial u^n} \frac{\partial}{\partial v} J_0 \right|_{u, v=1}$$

Anhang 2. Ableitung einer Abschätzungsformel.

Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$L[q] = E q. \quad (A)$$

E_1, q_1 bzw. seien der tiefste Eigenwert und die zugehörige normierte Eigenfunktion. Wir bilden mit einer beliebigen Funktion F den Mittelwert

$$\bar{F} = \int q_1 F q_1 d\tau. \quad (B)$$

Es sei jetzt Φ eine normierte Näherungseigenfunktion von (A) und \bar{F}' der damit analog gebildete Wert. Gesucht ist jetzt eine obere Grenze für den Fehler ($\bar{F} - \bar{F}'$). Nun ist

$$\bar{F} - \bar{F}' = \int q_1^2 F d\tau - \int \Phi^2 F d\tau = \int (q_1 + \Phi)(q_1 - \Phi) F d\tau. \quad (C)$$

Und daraus folgt mit Hilfe der Schwarz'schen Ungleichung

$$|\bar{F} - \bar{F}'| \leq \sqrt{\int (q_1 + \Phi)^2 F^2 d\tau \cdot \int (q_1 - \Phi)^2 d\tau}. \quad (D)$$

Wir wollen annehmen, daß die Differenz $q_1 - \Phi$ klein gegenüber $q_1 + \Phi \sim 2\Phi$ sei, und demzufolge setzen

$$\int (q_1 + \Phi)^2 F^2 d\tau = \int [2\Phi + (q_1 - \Phi)]^2 F^2 d\tau \sim 4 \int \Phi^2 F^2 d\tau.$$

Ferner ist

$$\int (q_1 - \Phi)^2 d\tau = 2(1 - \int q_1 \Phi d\tau) = 2(1 - a_1).$$

Nun gilt nach Newing²⁾

$$a_1 \geq \sqrt{\frac{E_2 - E_1}{E_2 + E_1}},$$

¹⁾ H. Hellmann, Quantenchemie, S. 336, Formel (62, 2), Leipzig 1937.
²⁾ R. A. Newing, Phil. Mag. (7) 24, 120, Formel (2, 12'), 1937.

wobei $I = \int \Phi L[\Phi] d\tau$ und E_2 der nächsthöhere Eigenwert der Differentialgleichung (A) ist¹⁾. Daraus ergibt sich:

$$|\bar{F} - \bar{F}'| \leq 2,9 \sqrt{\int \Phi^2 F^2 d\tau \left(1 - \sqrt{\frac{E_2 - I}{E_2 - E_1}}\right)}.$$

Wie schon bemerkt, ist diese Abschätzung sehr grob. Berücksichtigt man, daß das unter der Wurzel stehende Integral größenordnungsmäßig gleich \bar{F}^2 ist, und entwickelt man in der Klammer nach der kleinen Größe $I - E_1$, so erhält man für den relativen Fehler

$$\left| \frac{\bar{F} - \bar{F}'}{\bar{F}} \right| \lesssim 2 \sqrt{\frac{I - E_1}{E_2 - E_1}},$$

d. h. der relative Fehler von \bar{F} kann größenordnungsmäßig gleich der Wurzel aus dem relativen Fehler des Eigenwertes sein. Meistens ist er aber wesentlich kleiner. Daß diese Abschätzung so ungünstig ist, liegt hauptsächlich an der Anwendung der Schwarzschen Ungleichung beim Übergang von Formel (C) zu (D). Dieser wäre nämlich auch noch richtig, wenn im letzten Integral von (C) der absolute Betrag des Integranden stünde. Da aber im allgemeinen sein Vorzeichen im Integrationsgebiet wechseln wird (zumindest wegen des Faktors $\varphi_1 - \Phi$), so heben sich die Beiträge dieser verschiedenen Gebiete zum Integral (C) teilweise auf. Das braucht aber nicht der Fall zu sein, und es ist durchaus möglich, daß bei besonders „ungeschickt“ gewählten Näherungseigenfunktionen die obere Grenze des Fehlers tatsächlich erreicht wird.

¹⁾ Man kann auch für E_1 , E_2 bzw. untere Grenzen l_1 , l_2 bzw. setzen. Zerfallen die Eigenfunktionen in verschiedene „Rassen“ (gekennzeichnet durch Symmetrieeigenschaften gegenüber Vertauschung der Variablen oder Spiegelungen usw.), so kann für E_2 der nächsthöhere Eigenwert derselben Rasse wie E_1 gesetzt werden.

Über räumlich periodische Verteilungen frei fallender Ionen und Elektronen.

Von W. O. Schumann in München.

Mit 14 Abbildungen. (Eingegangen am 25. Februar 1943.)

Treten in einen Hochvakuumraum von einer Seite Ionen und von der anderen Seite Elektronen ein, so können sich bekanntlich je nach der Größe der Stromdichten, der Eintrittsgeschwindigkeiten und der angelegten Spannungen sehr verschiedene Verteilungen der Feldstärke, der Trägerdichte usf. in der Fallstrecke ausbilden. Bekannte Fälle sind z. B. der von Langmuir¹⁾ behandelte Fall der Doppelschicht, wo Elektronen und Ionen mit den Anfangsgeschwindigkeiten Null und den Anoden- und Kathodenfeldstärken Null eine Freifallstrecke durchsetzen, oder der ebenfalls von Langmuir²⁾ behandelte Fall einer positiven Ladungsschicht vor der Kathode, zur Erklärung des „Feldbogens“.

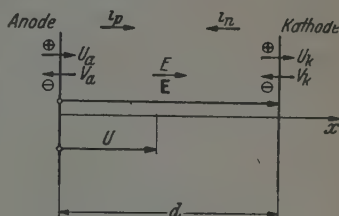


Fig. 1.

Untersucht man die Erscheinungen für etwas allgemeinere Bedingungen, so ergibt sich als interessantes Resultat, daß auch räumlich periodische Zustände möglich sind, die im folgenden beschrieben sind.

Gegeben sei eine „ebene“ Strecke, Fig. 1, links die Anode, rechts davon im Abstand d die Kathode. An der Anode treten positive Träger mit der Voltgeschwindigkeit U_a ein, an der Kathode treten negative

Fig. 1.

Träger mit der Voltgeschwindigkeit V_k ein. Die Spannung von der Anode aus gerechnet sei $U = \int_0^x E dx$. Wenn die Spannung an der ganzen Strecke $U_{x=d} = U_k = \int_0^d E dx = E d$ ist, so ist die Ionengeschwindigkeit an der Kathode gleich $U_k = U_a + E d$ und die Elektronengeschwindigkeit an der Anode gleich $V_a = V_k + E d$.

¹⁾ Phys. Rev. 33, 956, 1929. — ²⁾ Phys. Rev. 2, 450, 1913.

Aus der Raumladungsgleichung

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{A} (p - n) = \frac{1}{A} \left(\frac{i_p}{u} - \frac{i_n}{v} \right)$$

folgt

$$\frac{dE}{dx} = \frac{a}{4} \frac{1}{\sqrt{U_a + U}} - \frac{b}{4} \frac{1}{\sqrt{V_a - U}} = \frac{d^3 U}{dx^3}, \quad (1)$$

wo $a = 4 \frac{i_p}{A} \sqrt{\frac{M}{e}}$, $b = 4 \frac{i_n}{A} \sqrt{\frac{m}{2e}}$, i_p positive, i_n negative Stromdichte A/cm², M Ionenmasse, m Elektronenmasse, und e die Trägerladung bedeuten. Das Maximum von E , $\frac{dE}{dx} = 0$, der Wendepunkt in der Spannungskurve U , tritt auf für

$$U = U_w = \frac{a^3 V_a - b^3 U_a}{a^3 + b^3} \quad (2)$$

und liegt für $a = b$ bei $U_w = \frac{V_a - U_a}{2}$.

An der Anode, $U = 0$, ist $\left(\frac{dE}{dx}\right)_a = \frac{a}{4} \frac{1}{\sqrt{U_a}} - \frac{b}{4} \frac{1}{\sqrt{V_a}}$, d. h. $\left(\frac{dE}{dx}\right)_a \geq 0$

und damit auch die Ladung, je nachdem ob $\frac{a}{b} \geq \sqrt{\frac{U_a}{V_a}}$ ist. An der

Kathode, $U = E$, ist $\left(\frac{dE}{dx}\right)_k = \frac{a}{4} \frac{1}{\sqrt{U_k}} - \frac{b}{4} \frac{1}{\sqrt{V_k}}$ und $\left(\frac{dE}{dx}\right)_k \geq 0$, je ob

$\frac{a}{b} \geq \sqrt{\frac{U_k}{V_k}}$ ist, d. h. je nachdem, ob die positiven oder negativen Dichten

$\left(p = \frac{A}{4} \frac{a}{\sqrt{U_a + U}}, n = \frac{A}{4} \frac{b}{\sqrt{V_a - U}}\right)$ größer sind. Die Integration von Gl. (1) nach U ergibt

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 = E^2 = E_a^2 + a(\sqrt{U_a + U} - \sqrt{U_a}) - b(\sqrt{V_a} - \sqrt{V_a - U}), \quad (3)$$

wobei E_a das Feld an der Anode ist. Das Feld E_k an der Kathode, für $U = E$ ist

$$E_k^2 = E_a^2 + a(\sqrt{U_k} - \sqrt{U_a}) - b(\sqrt{V_a} - \sqrt{V_k}). \quad (3a)$$

Für $E = 0$, $V_a = V_k$; $U_k = U_a$ ist $E_k^2 = E_a^2$ bei beliebigem a und b . Allgemein ist $E_k = E_a$ für

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{V_a} - \sqrt{V_k}}{\sqrt{U_k} - \sqrt{U_a}},$$

was z. B. für $U_a = 0$, $V_k = 0$, $U_k = V_a$, wie bekannt, $a = b$, d. h.

$\frac{i_p}{i_n} = \sqrt{\frac{m}{M}}$ verlangt.

Mit Gl. (3) kann man den Abstand x berechnen, der zu einer angelegten Spannung U gehört, nach der Gleichung

$$x = \int_0^U \frac{dU}{E} = \int_0^U \frac{dU}{\sqrt{E_a^2 + a(\sqrt{U_a + U} - \sqrt{U_a}) - b(\sqrt{V_a} - \sqrt{V_a - U})}} \quad (4)$$

und speziell d für $U = E$

$$d = \int_0^E \frac{dU}{\sqrt{E_a^2 + a(\sqrt{U_a + U} - \sqrt{U_a}) - b(\sqrt{V_a} - \sqrt{V_a - U})}} \quad 1). \quad (5)$$

Bestimmt man nach Gl. (3) die Werte von U ($= U_m$), für die $E = 0$ ist, d. h. wo die Spannungsverteilung Extrema durchläuft, so ergibt sich

$$E_a^2 = b(\sqrt{V_a} - \sqrt{V_a - U_m}) - a(\sqrt{U_a + U_m} - \sqrt{U_a}),$$

woraus

$$\begin{aligned} U_m^2 (a^2 + b^2)^2 + 2 U_m \{ E_a^2 (b^2 - a^2) [E_a^2 - 2(a\sqrt{U_a} + b\sqrt{V_a})] - \\ - 2ab(a\sqrt{V_a} - b\sqrt{U_a})(a\sqrt{U_a} + b\sqrt{V_a}) \} + \\ + E_a^2 [E_a^2 - 2(a\sqrt{U_a} + b\sqrt{V_a})] \{ E_a^2 [E_a^2 - 2(a\sqrt{U_a} + b\sqrt{V_a})] + \\ + 4ab\sqrt{U_a}\sqrt{V_a} \} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

folgt.

Aus dieser quadratischen Gleichung folgt, daß im allgemeinen zwei verschiedene Extrema existieren, d. h. daß U Maxima und Minima durchlaufen kann, mit Ausnahme der Fälle, wo in dieser Gleichung $U_m^2 \alpha + 2 U_m \beta + \gamma = 0$ die Bedingung $\beta^2 = \alpha \gamma$ erfüllt ist. Es ist dies ein prinzipiell anderes Verhalten, als wenn nur Elektronen allein die Strecke durchsetzen, denn dann ist mit $a = 0$

$$U_m = \frac{E_a^2}{b^2} (2b\sqrt{V_a} - E_a^2), \quad (7)$$

wo es nur ein Extremum gibt, für das

$$E_a^2 = b(\sqrt{V_a} \pm \sqrt{V_a - U_m}) \quad (8)$$

ist, d. h. U_m kann höchstens gleich $V_a = U_m$ werden (Maximum von U oder Potentialminimum) bei $E_a^2 = b\sqrt{V_a}$; bei $E = 0$, $V_a = V_k$ wird

¹⁾ Die Auswertung der Integrale (4) und (5) ist ziemlich kompliziert, läßt sich aber, wie F. Wenzl gezeigt hat (noch unveröffentlichte Arbeit, München, Elektrophysikal. Laboratorium der Technischen Hochschule München), mit Hilfe elliptischer Integrale 1. und 2. Gattung durchführen. Die Folgerungen daraus wird Wenzl noch mitteilen. In dieser Arbeit wird davon kein Gebrauch gemacht.

z. B. wie bekannt $U_m = V_k$ mit $E_a^2 = b \sqrt{V_k}$ ¹⁾. Liegt ein Extremum an der Anode, $E_a = 0$, so wird das zweite nach Gl. (6)

$$U_m = \frac{4ab}{(a^2 + b^2)^2} (a \sqrt{V_a} - b \sqrt{U_a}) (a \sqrt{U_a} + b \sqrt{V_a}). \quad (9)$$

Es ist positiv oder negativ, je nachdem ob $\frac{a}{b} \geq \sqrt{\frac{U_a}{V_a}}$ ist, und hat für $a = b$ den Wert

$$U_m = V_a - U_a. \quad (10)$$

Für $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{U_a}{V_a}}$ ist $U_m = 0$, und da $E_a = 0$ ist, ist auch überall $U = 0$ und $E = 0$, $V_A = V_K$ (Einschuß von Ionen und Elektronen gleicher Dichte in eine spannungslose Strecke).

Für $U_a = 0$, Ioneneintrittsgeschwindigkeit Null, wird das zweite Extremum U_m

$$U_m = \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} V_a \quad (11)$$

und verschwindet für $a = 0$ oder $b = 0$.

Das Maximum von $\frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2}$ liegt bei $a = b$ und hat den Wert 1, dann ist $U_m = V_a$ und für $V_k = 0$, $V_a = E$ wird $U_m = E$ und liegt an der Kathode (Langmuir-Doppelschicht mit $U_a = V_k = 0$ und $E_a = E_k = 0$).

An der Stelle dieser Extrema ist im allgemeinen

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{dE}{dx} = \frac{a}{4} \frac{1}{\sqrt{U_a + U_m}} - \frac{b}{4} \frac{1}{\sqrt{V_a - U_m}}$$

nicht gleich Null, so daß es sich um wahre Maxima und Minima und nicht etwa um Wendepunkte von U mit horizontaler Tangente handelt. Es wird im Gegenteil nach Gl. (1) z. B. für $U_m \rightarrow V_a$, $\frac{dE}{dx} \rightarrow -\infty$, also sehr große negative, und für $U_m \rightarrow -U_a$, $\frac{dE}{dx} \rightarrow \infty$ sehr große positive Raumladung für U_m vorhanden sein. Da nach Gl. (3) E^2 eindeutig durch U bestimmt ist, ist die Spannungs- (bzw. Potentialverteilung) und auch die Ladungsverteilung räumlich symmetrisch um die Punkte x_m für $U = U_m$ verteilt. Ist also z. B. $E = 0$, Spannung Null zwischen den Elektroden, $U_{x=0} = U_{x=d} = 0$, so muß ein Extremum immer räumlich in der Mitte zwischen den Elektroden liegen, während bei endlicher angelegter Spannung E sich die Lage der Extrema relativ zu den Elektroden verschiebt, und bis in die Elektroden selbst wandern kann.

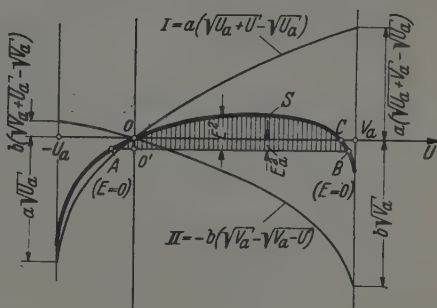
¹⁾ Siehe z. B. H. Rothe u. W. Kleen, Grundlagen und Kennlinien der Elektronenröhren, S. 29. Leipzig 1940.

Während nach Gl. (9) der Unterschied der beiden Extrema (Maximum-Minimum) vom Verhältnis a/b abhängig ist, ist nach Gl. (4) die räumliche Entfernung zweier Extrema ($E = 0$), die Wellenlänge, bei gegebenem a/b auch von der Größe von a und b abhängig, und zwar so, daß die Wellenlänge proportional $\frac{1}{\sqrt{a}}$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{b}}$ ist. Kleine Stromdichten ergeben große Wellenlängen, die mit wachsender Stromdichte immer kleiner werden.

Es erscheint nach dem Bisherigen also möglich, bei geeigneter Wahl von a , b , U_a , V_k und E periodische Verteilungen in einer solchen Strecke zu erzeugen mit einer beliebigen Zahl von Wellenlängen, wenn a und b genügend groß sind¹⁾. Zu einer Übersicht diene folgende Darstellung, Fig. 2. Die äußersten Extremwerte, die U durchlaufen kann,

Fig. 2

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{U_a}} &> \frac{b}{\sqrt{V_a}}, \\ a\sqrt{U_a} &> b\sqrt{V_a} \cdot \frac{U_a}{V_a}, \\ V_a &= 3U_a, \\ a\sqrt{U_a} &= \frac{3}{4}b\sqrt{V_a}, \\ \frac{a}{b} &= 1,22. \end{aligned}$$



sind nach Gl. (3) $U = -U_a$ und $U = V_a$, wo die Ionen bzw. die Elektronen auf die Geschwindigkeit Null abgebremst werden. In Fig. 2 ist abhängig von U für $a/b > \sqrt{\frac{U_a}{V_a}}$ innerhalb dieser Werte E^2 als $f(U)$ nach Gl. (3) dargestellt.

In der Figur sind die beiden Kurven $I = a(\sqrt{U_a + U} - \sqrt{U_a})$ und $II = -b(\sqrt{V_a} - \sqrt{V_a - U})$ aufgetragen, deren Summe die stark ausgezogene Kurve S ist. Wird nach unten eine Gerade im Abstand E_a^2 aufgetragen, so geben die Ordinaten zwischen der Summenkurve S und der Geraden — senkrecht schraffiert — die Werte von E^2 , die in den Punkten A und B zu Null werden. Die Abszissen dieser Punkte sind die äußersten Werte, zwischen denen in diesem Fall U schwanken

¹⁾ Es folgt das auch daraus, daß x durch elliptische Integrale von U gegeben ist [Gl. (5) und Anmerkung dazu], deren Umkehrung bekanntlich periodische Funktionen sind.

kann. Natürlich muß die an der Strecke angelegte Spannung E kleiner sein als die Abszisse $O'B$. Ist sie gleich $O'B$, so ist an der Kathode die Feldstärke Null. Der Unterschied zwischen V_a und E ergibt die Eintrittsgeschwindigkeit der Elektronen V_k an der Kathode. A und B bedeuten Extremwerte der Potentialfunktionen, die aber von den gebremsten Teilchen mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufen werden. Wird $E_a = 0$, so liegt ein Spannungsextremum an der Anode selbst

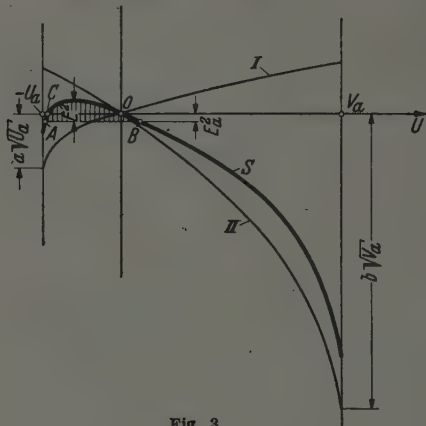


Fig. 3.

$$\frac{a}{\sqrt{U_a}} < \frac{b}{\sqrt{V_a}}, \quad a\sqrt{U_a} < b\sqrt{V_a} \frac{U_a}{V_a},$$

$$a\sqrt{U_a} = \frac{1}{5,3} b\sqrt{V_a}, \quad V_a = 3 U_a, \quad \frac{a}{b} = 0,33.$$

und es gibt in Fig. 2 überhaupt keine negativen U -Werte relativ zur Anode, wohl aber ein positives Maximum im Punkte C .

Ist hingegen $a/b < \sqrt{U_a/V_a}$, so verlagert sich die E^2 -Kurve im Sinne der Fig. 3.

Damit überhaupt Spannungsmaxima und -minima auftreten, die von den Teilchen mit endlichen Geschwindigkeiten durchlaufen werden (Punkte A und B , Fig. 2); muß

$$\left. \begin{aligned} E_a^2 &< a\sqrt{U_a} - b(\sqrt{V_a + U_a} - \sqrt{V_a}) \\ \text{und} \quad E_a^2 &< b\sqrt{V_a} - a(\sqrt{U_a + V_a} - \sqrt{U_a}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

sein.

Da bei einem Zustand mit periodischer Verteilung nirgends die Geschwindigkeiten der Ionen und Elektronen den Wert Null haben

dürfen, da sich dann sofort eine virtuelle Kathode bzw. Anode einstellen würde, folgt zunächst, daß beide Teilchenarten mit endlicher Geschwindigkeit in die Strecke eintreten müssen, denn an der Anode, $U = 0$, darf U_a nicht Null sein, noch an der Kathode, $U = E$, darf $V_k = 0$ sein, weil diese Werte sich periodisch wiederholen würden.

Weiter folgt nach Fig. 2 an der Stelle $U = 0$ für $\frac{dE^2}{dU_{U=0}} = 2 \frac{dE}{dx} = \frac{a}{2\sqrt{U_a}} - \frac{b}{2\sqrt{V_a}}$, d. h. es ist $\frac{dE^2}{dU_{U=0}} \geq 0$, je nachdem ob $\frac{a}{b} \geq \sqrt{\frac{U_a}{V_a}}$ ist, Kurve 1 oder 2, Fig. 4, je nachdem ob an der Anode positive oder negative Dichte herrscht.

Die Neigung der $E^2 - U$ -Kurve gibt überall die Ladungsverteilung abhängig von U an. Je nachdem, ob an der Anode ein die Teilchen beschleunigendes oder verzögerndes Feld ($E_a \geq 0$) herrscht, werden von $U = 0$ aus auf den Kurven zunächst die Zweige a oder b durchlaufen.

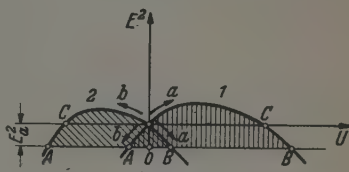


Fig. 4.

Für den Kurventyp 1, Fig. 4, müssen für periodische Verteilung erfüllt sein:

$$1. \frac{a}{b} > \sqrt{\frac{U_a}{V_a}}, \quad 2. \text{ nach Fig. 4 und Gl. (12)} \\ 0 < b \sqrt{V_a} - a (\sqrt{U_a + V_a} - \sqrt{U_a}), \quad (13)$$

damit ein Schnittpunkt C zustande kommt, oder

$$\frac{a}{b} < \frac{\sqrt{V_a}}{\sqrt{U_a + V_a} - \sqrt{U_a}}.$$

Beide Bedingungen gleichzeitig sind mit $V_a \neq 0$ immer erfüllbar. Es gibt also abhängig von U_a und V_a nur beschränkte Strombereiche, in denen periodische Verteilungen möglich sind, Fig. 5.

Für den Kurventyp 2, Fig. 4, gilt entsprechend:

$$1. \frac{a}{b} < \sqrt{\frac{U_a}{V_a}}, \quad 2. 0 < a \sqrt{U_a} - b (\sqrt{V_a + U_a} - \sqrt{V_a})$$

bzw.

$$\frac{b}{a} > \sqrt{\frac{V_a}{U_a}} \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} < \frac{\sqrt{V_a}}{\sqrt{V_a + U_a} - \sqrt{V_a}}. \quad (14)$$

Es gelten dieselben Kurven wie oben, wenn man statt a/b den Wert b/a setzt und U_a mit V_a vertauscht.

Kennt man den Verlauf von E^2 , so ist auch der von E und von $1/E$ bekannt (Fig. 6), und man kann dann den Ort x abhängig vom Spannungsverlauf, $x = \int_0^U \frac{dU}{E}$ durch Integration der $1/E$ -Kurve bestimmen.

Man sieht in Fig. 6, wie abhängig von x die Spannung und die Feldstärke verlaufen. Zu $x = OA$ gehört z. B. die Spannung AB und die Feldstärke CD . Ein Maximum von U wird bei $x = OE$ durchlaufen,

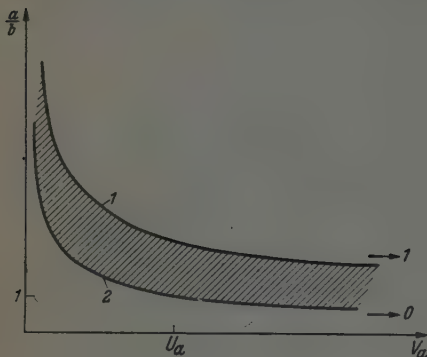


Fig. 5. Kurve 1: $\frac{\sqrt{U_a}}{\sqrt{U_a + V_a} - \sqrt{U_a}}$

Kurve 2: $\sqrt{\frac{U_a}{V_a}}$, $\frac{a}{b}$ muß innerhalb

der schraffierten Fläche liegen.

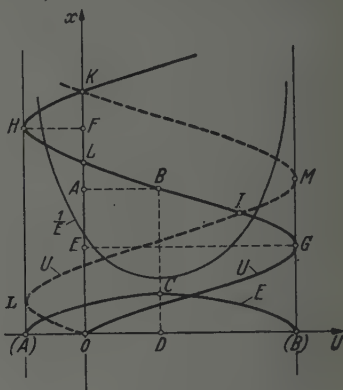


Fig. 6. Kurve E und Punkte (A) und (B) s. Fig. 2.

das folgende Minimum bei $x = OF$. Ist der Abstand d kleiner als OE , so existiert kein Spannungsmaximum innerhalb der Strecke d . Die angelegte Spannung E muß kleiner sein als die Extremwerte EG bzw. FH .

Da nach Gl. (3) bei gegebenem a, b, U_a, V_a nur E^2 gegeben ist, kann die positive oder negative Wurzel für die Integration benutzt

werden. Für die negative Wurzel ist entsprechend Gl. (4) $x = - \int_0^U \frac{dU}{E}$,

d. h. U geht von $U = 0$ ab, zunächst ins Negative, d. h. die Feldstärke an der Anode E_a ist negativ. Diese zweite Integralkurve ist in Fig. 6 gestrichelt eingezeichnet. Bei K treffen sich beide Kurven für $U = 0$, bei J schneiden sie sich. In beiden Fällen hat man für gleiches x (bzw. d) und U (bzw. E) zwei ganz verschiedene Verteilungen von U, E , Geschwindigkeiten und Dichten. Dieser scheinbare Widerspruch erklärt sich aus der ganz verschiedenen Genesis der Vorgänge. Bei der aus-

gezogenen U -Kurve hätte man z. B. bei $d = 0$, mit $E = 0$, $V_a = V_k$, und den Strömen a und b den Versuch begonnen. Mit wachsendem x (d) ist dann die beschleunigende Spannung $U(E)$ entsprechend der Kurve OG vergrößert worden, und gleichzeitig die Eintrittsgeschwindigkeit der Elektronen $V_k = V_a - E$ entsprechend verringert worden, wobei im Punkt G die Spannung $U(E)$ am größten, die Eintrittsgeschwindigkeit der Elektronen am kleinsten war. Im weiteren Verlauf von G nach H wäre mit wachsendem d die Spannung E wieder verringert, die Eintrittsgeschwindigkeit der Elektronen wieder vergrößert worden. Die Spannung E wird bei L wieder zu Null, $V_k = V_a$, und dann negativ (Gegenspannung), wobei gleichzeitig die Eintrittsgeschwindigkeit der Elektronen weiter erhöht wird, bei H am größten wird und dann mit abnehmender Gegenspannung wieder kleiner wird und bei K wieder $V_a = V_k$ ist usw. Man hätte mit anderen Worten immer so reguliert, daß E_a bei konstantem a , b , U_a , V_a mit wachsendem d konstant bleibt, und mit wachsendem d wären immer mehr Maxima und Minima abwechselnd in der Strecke erschienen. Hat z. B. die Strecke die Länge OK und $E = 0$, d. h. angelegte Spannung gleich Null, so würden die mit $V_a = V_k$ eintretenden Elektronen bis H beschleunigt werden, dann von H bis G gebremst und von G bis O wieder beschleunigt werden. Analog ginge es den Ionen. Von O bis G beschleunigt, dann von G bis H verzögert und dann wieder beschleunigt, bis bei K die Geschwindigkeit $U_k = U_a$ ist. Bei H sind schnelle Elektronen und langsame Ionen und eine positive Raumladung vorhanden, bei G sind schnelle Ionen und langsame Elektronen, d. h. negative Raumladung vorhanden.

Die gestrichelte Kurve ist analog zu deuten, nur mit negativer konstanter Feldstärke ($-E_a$) von der Anode. Hier entsteht zunächst vor der Anode bei L eine Stelle schneller Elektronen und langsamer Ionen und bei M eine Stelle langsamer Elektronen und schneller Ionen.

Ist $a = b$ und $U_a = V_a$, so liegen die beiden Kurven I und II wie in Fig. 7, und die E^2 -Kurve ist symmetrisch zu $U = 0$, E_{max} liegt bei $U = 0$, Gl. (2) und die Spannungsextrema (A und B) liegen symmetrisch zu $U = 0$.

Ist auch gleichzeitig $E_a^2 = 0$, so fallen die Extrempunkte A und B in den Nullpunkt, es wird $E = 0$ und ebenfalls U für alle x . Es ist dies der Fall des Einstromens von Ionen und Elektronen mit gleicher Dichte, $a = b$, $U_a = V_a = V_k$, in einen feldfreien Raum mit der Spannung Null, den beide unabhängig voneinander mit konstanter Geschwindigkeit durchfliegen, ohne daß resultierende Raumladung entsteht.

Ähnliches tritt auf für den Fall, daß $\frac{a}{\sqrt{U_a}} = \frac{b}{\sqrt{V_a}}$ ist, weil dann die Kurve S nach Gl. (1) den Punkt $U = 0$ mit horizontaler Tangente passiert, Fig. 8.

Ist E_a endlich, so liegen Maximum und Minimum unsymmetrisch zu $U = 0$ [s. a. Gl. (6)]. Wird $E_a = 0$, so ergibt das wieder für alle x

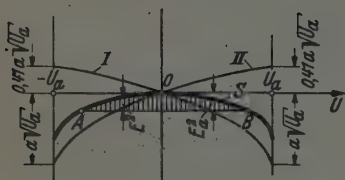


Fig. 7.

$$E_a^2 < 0,59 a \sqrt{U_a}, a = b, \\ U_a = V_a.$$

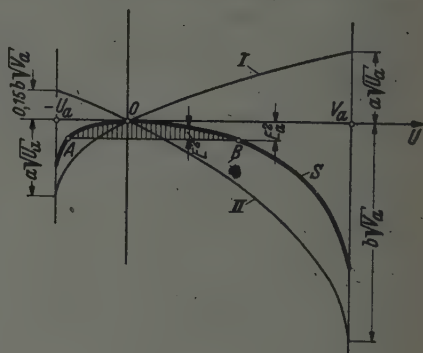


Fig. 8.

$$V_a = 3 U_a, \frac{a}{\sqrt{U_a}} = \frac{b}{\sqrt{V_a}}, \\ a \sqrt{U_a} = b \sqrt{V_a} \frac{U_a}{V_a} = b \sqrt{V_a} \cdot \frac{1}{3}, \\ \frac{a}{b} = 1,73.$$

die Werte $U = 0$ und $E = 0$, d. h. $V_a = V_k$. Es ist dies der allgemeine Fall des Einschusses von Ionen und Elektronen mit gleicher Dichte in einen Raum ohne Feld.

Eine Abbremsung der Teilchen auf die Geschwindigkeit Null (d. h. $U_m = V_a$ oder $U_m = -U_a$) ist nicht möglich, bzw. es bildet sich bei Erreichen dieses Zustandes eine virtuelle Kathode (oder Anode), d. h. eine Teilchenschicht unendlicher Dichte mit der Geschwindigkeit Null und es beginnt sofort ein neuer Zustand, in dem ein Teil der gestoppten Teilchen eine Rückwärtsbewegung beginnt, wodurch sich die ganze Stromverteilung plötzlich ändert und die Ausgangsgleichungen, die nur mit durchlaufenden Teilchen rechnen, ungültig werden.

Aber auch schon vorher, d. h. solange U_m noch $< V_a$ oder $-U_m$ noch $< U_a$ ist, kann der Zustand schon labil werden, in dem durch das dauernde Wachsen von U_m mit dem Strom, und die steigende Teilchenbremsung die Ladung zwischen den Elektroden immer stärker anwächst und damit auch die Feldstärken an den Elektroden, bis schließlich das

Anwachsen der Feldstärke (und der Ladung) z. B. mit steigendem Strom unendlich rasch erfolgt. Es treten z. B. bei unendlich kleiner Stromänderung endliche Feldstärken- und Ladungsänderungen (Verschiebungsströme) auf, die zum Kippen der Anordnung in einen anderen Zustand führen.

Am einfachsten ergibt sich dies zunächst bei Durchtritt nur einer Teilchensorte durch die Strecke. Für diesen Fall ¹⁾, z. B. eingeschossene Elektronen in eine Strecke mit der Spannung $E = 0$, ergibt sich mit unseren Bezeichnungen ($a = 0$) ($V_a = V_k$) nach Gl. (3)

$$E^2 = E_a^2 - b(\sqrt{V_k} - \sqrt{V_k - U}), \quad (15)$$

und da bei $E = 0$, wie auf S. 632 erwähnt, U_m genau in der Mitte der Strecke d liegen muß,

$$\frac{d}{2} = \int_0^{U_m} \frac{dU}{E} = \int_0^{U_m} \frac{dU}{\sqrt{E_a^2 - b(\sqrt{V_k} - \sqrt{V_k - U})}}, \quad (16)$$

wobei nach Gl. (7)

$$U_m = \frac{E_a^2}{b^2} (2b\sqrt{V_k} - E_a^2), \quad (17)$$

woraus folgt

$$\frac{3}{8} \sqrt{b} d = \frac{E_a}{\sqrt{b}} \left(3\sqrt{V_k} - 2\frac{E_a^2}{b} \right). \quad (18)$$

Der Ausdruck rechts hat ein Maximum für $\frac{E_a^2}{b} = \frac{1}{2} \sqrt{V_k}$. Es ergibt sich also ein Strommaximum, das nicht überschritten werden kann, von

$$b_m = \frac{128}{9} \frac{V_k^{3/2}}{d^2} \quad (19)$$

bzw. nach Gl. (1)

$$i_{n_m} = \frac{32}{9} \Delta \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{V_k^{3/2}}{d^2}, \quad (20)$$

d. h. dem achtfachen Betrag des Stromes, der bei raumladungsbegrenztem Strom bei einer angelegten Spannung V_k durch die Strecke d geht.

Der Höchstwert von U_m ist

$$U_{m_{max}} = \frac{3}{4} V_k$$

und der Höchstwert von E_a

$$E_{a_m} = \frac{8}{3} \frac{V_k}{d}.$$

¹⁾ Der an sich schon bei Rothe-Kleen, l. c. behandelt ist.

Für diesen Grenzpunkt ist $\frac{db}{dE_a} = 0$ und $\frac{\partial d}{\partial E_a} = 0$, d. h. einer unendlich kleinen Stromsteigerung db entspricht eine endliche Feldänderung E_a , und ein entsprechender Verschiebungs- und Ladestrom der Strecke und einer Abstandsschwankung d bei Konstanz aller sonstigen Größen ebenfalls¹⁾.

Ähnliches gilt für das Vorhandensein positiver und negativer Ladungen, nur läßt es sich, wegen der Schwierigkeit des Integrals Gl. (4), nicht explizit darstellen²⁾.

Allgemein gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} \text{und} \quad E &= f(a, b, V_k, U_a, d, E_a) \\ U_m &= f(a, b, V_k, U_a, E_a). \end{aligned}$$

Ändert sich z. B. nur b (der Elektronenstrom), so gilt

$$dE = 0 = \frac{\partial E}{\partial b} db + \frac{\partial E}{\partial E_a} dE_a \quad \text{bzw.} \quad \frac{db}{dE_a} = - \frac{\frac{\partial E}{\partial E_a}}{\frac{\partial E}{\partial b}}.$$

Die Labilität ist wieder durch $\frac{db}{dE_a} = 0$ gegeben, und es muß auch $\frac{\partial E}{\partial E_a} = 0$ sein, da $\frac{\partial E}{\partial b}$ nicht unendlich wird. Im Labilitätspunkt ergibt

¹⁾ Diese große Zunahme von E_a muß auf eine entsprechende Ladungszunahme zurückgeführt werden, denn es ist allgemein

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{A} (p - n),$$

woraus folgt

$$E - E_a = \frac{1}{A} \left[\int_0^x p \, dx - \int_0^x n \, dx \right] = \frac{1}{A} (P_x - N_x), \quad (21)$$

$$E_k - E_a = \frac{1}{A} (P_t - N_t),$$

wo P_x bzw. N_x die positive bzw. negative Ladung zwischen 0 und x ist. Gl. (21) nochmals nach x integriert, ergibt

$$E = \int_0^d E \, dx = E_a d + \frac{1}{A} \int_0^d P_x \, dx - \frac{1}{A} \int_0^d N_x \, dx,$$

woraus bei gegebenem E eine plötzliche starke Zunahme von E_a eine entsprechende Zunahme von P_x bzw. N_x verlangt. Ferner ist

$$\int_0^d P_x \, dx = \int_0^d \int_0^x p \, dx \cdot dx = \int_0^d p \, dx \cdot d - \int_0^d x p \, dx = d P_t (1 - k), \quad \text{wo } 0 < k < 1.$$

Die Ladungen in der Nähe der Anode tragen am meisten zum Anodenfeld bei.

²⁾ Siehe F. Wenzl, l. c.

jede Schwankung von E ceteris paribus eine sehr große Änderung von E_a , d. h. des Verschiebungsstromes bzw. der Ladung. Weiterhin folgt

$$\frac{dU_m}{db} = \frac{\partial U_m}{\partial b} + \frac{\partial U_m}{\partial E_a} \cdot \frac{dE_a}{db},$$

d. h. für $\frac{db}{dE_a} = 0$ wird $\frac{dU_m}{dU_m} = 0$, d. h. abhängig von U_m durchläuft b ein Maximum (wie z. B. für Elektronen allein von Rothe-Kleen, l. c., S. 33 gezeigt).

Da ferner

$$E = f(a, b, V_k, V_a, U_a, d, U_m),$$

ist für

$$dE = 0 = \frac{\partial E}{\partial b} db + \frac{\partial E}{\partial U_m} dU_m, \text{ also } \frac{db}{dU_m} = - \frac{\frac{\partial E}{\partial U_m}}{\frac{\partial E}{\partial b}},$$

d. h. $\frac{\partial E}{\partial U_m} = 0$, d. h. eine Schwankung von E ceteris paribus ergibt eine sehr große Schwankung von U_m . Da weiterhin

$$d = f(a, b, V_k, U_k, E, E_a),$$

ist für $dd = 0 = \frac{\partial d}{\partial b} db + \frac{\partial d}{\partial E_a} dE_a$ und $\frac{db}{dE_a} = - \frac{\frac{\partial d}{\partial E_a}}{\frac{\partial d}{\partial b}}$, d. h. für

$\frac{db}{dE_a} = 0$ wird auch $\frac{\partial d}{\partial E_a} = 0$; jede Schwankung von d gibt ceteris paribus sehr große Schwankungen von E_a . Der eigentliche Grund der Labilität ist also darin zu sehen, daß mit der Steigerung des Stromes immer mehr Ladung in die Strecke hineinkommt, daß dadurch das Spannungsmaximum und damit die Bremsung der Teilchen anwächst, wodurch die Ladung in der Strecke wiederum wächst, so daß die Ladung und damit E_a immer rascher mit dem Strom ansteigen, bis schließlich dieser Anstieg über alle Grenzen wächst.

Zur Vermeidung der Labilität ist es also nötig, dieses Mehr an Ladung, was zur Erzeugung genügend großer Spannungsextrema und genügend kurzer Wellen nötig ist, so hereinzubringen, daß der Ladungsanstieg (bzw. der Anstieg von E_a) mit dem Strom nie über gewisse Grenzen wächst, was auf sehr verschiedene Weisen möglich ist, wenn außer den Elektronen auch noch Ionen in die Strecke einströmen.

Eine Möglichkeit ist zunächst, $\frac{a}{\sqrt{U_a}} = \frac{b}{\sqrt{V_a}}$ und E gleich Null zu machen, und so beliebig große Ströme und Ladungen in die Strecke zu bringen, und dann an a , U_a , E so zu ändern, daß allmählich die

Maxima und Minima von Null aus größer werden. Ein anderer Weg ist z. B., bei wachsendem Strom so zu steuern, daß E_a irgendeinen vorgeschriebenen Verlauf nimmt, etwa indem $E_a = 0$ festgehalten wird, wodurch natürlich ein bestimmter Verlauf von E abhängig von den Strömen vorgeschrieben wird.

Für kleine Schwankungen von U mit x kann man die Gl. (4) näherungsweise integrieren. Solange $\frac{U}{U_a} < 1$ und $\frac{U}{V_a} < 1$ ist, läßt sich E^2 nach Gl. (3) nach U entwickeln, und wenn man bis zur 2. Potenz geht, entsteht

$$E = \sqrt{E_a^2 + \frac{U}{2} \left(\frac{a}{\sqrt{U_a}} - \frac{b}{\sqrt{V_a}} \right) - \frac{1}{8} U^2 \left(\frac{a}{U_a^{3/2}} + \frac{b}{V_a^{3/2}} \right)}. \quad (22)$$

Das Integral

$$x = \int_0^U \frac{dU}{E} = \int_0^U \frac{dU}{\sqrt{A + BU - CU^2}}$$

mit

$$A = E_a^2, B = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\sqrt{U_a}} - \frac{b}{\sqrt{V_a}} \right), C = \frac{1}{8} \left(\frac{a}{U_a^{3/2}} + \frac{b}{V_a^{3/2}} \right) \quad (23)$$

ergibt dann

$$U = \frac{B}{2C} + \frac{\sqrt{4AC + B^2}}{2C} \sin(\sqrt{C} \cdot x - \varphi),$$

$$\sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{B^2 + 4AC}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{2\sqrt{AC}}. \quad (24)$$

U verläuft nach einer Sinuswelle von der räumlichen Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{C}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{8} \left(\frac{a}{U_a^{3/2}} + \frac{b}{V_a^{3/2}} \right)}}, \quad (25)$$

$$a = 4 \frac{i_p}{\lambda} \sqrt{\frac{M}{2e}}, \quad b = 4 \frac{i_n}{\lambda} \sqrt{\frac{m}{2e}}, \quad \text{s. Gl. (1)}$$

und die Extremwerte der Spannung sind

$$U_{m1,2} = \frac{B}{2C} \pm \frac{\sqrt{4AC + B^2}}{2C}, \quad U_{m1} + U_{m2} = \frac{B}{C}, \quad (26)$$

was nach der Voraussetzung klein gegen U_a bzw. V_a sein muß, d. h. $B < C$ und $A < C$. Daraus folgt $\frac{E_a^2}{U_a} < CU_a + B$ bzw. $\frac{E_a^2}{V_a} < CV_a - B$, was, aber ziemlich große Werte von E_a zuläßt.

Da $b = \frac{2}{3} \cdot 10^8 i_n$ und a für ein Hg^+ -Ion $\approx 4 \cdot 10^8 i_p$ ist, liegt A in der Größenordnung $\approx 0,02 \frac{V_a^{3/4}}{\sqrt{i_n}}$ cm, d. h. z. B. bei $i_n = 0,1 \frac{A}{\text{cm}^2}$ bei $A \approx 0,06 V_a^{3/4}$ cm, wenn die Ionengeschwindigkeit U_a als klein gegen die Elektronengeschwindigkeit V_a angenommen wird. Sind beide gleich, so wird A um den Faktor $\sqrt{2}$ kleiner. Für $x = d$ geht U in E über.

$$E = \frac{B}{2C} + \frac{\sqrt{4AC + B^2}}{2C} \sin(\sqrt{C} \cdot d - \varphi) \quad (24a)$$

bzw. durch U_{m_1} ausgedrückt

$$E = \frac{B}{2C} + \left(U_{m_1} - \frac{B}{2C} \right) \sin(\sqrt{C} \cdot d - \varphi), \quad \sin \varphi = \frac{B}{2U_{m_1}C - B}. \quad (27)$$

Für $E_a = 0$, d. h. $A = 0$, wird $\varphi = \pi/2$ und

$$E = \frac{B}{2C} (1 - \cos \sqrt{C} \cdot d). \quad (28)$$

Aus Gl. (24a) ergibt sich die Feldstärke E_a bzw. A zu

$$A = E_a^2 = -\frac{B^2}{4C} + \frac{(2EC - B)^2}{4C \sin^2(\sqrt{C} \cdot d - \varphi)}. \quad (29)$$

Da $E_a^2 > 0$ sein muß, folgt

$$(2EC - B)^2 > B^2 \sin^2(\sqrt{C} \cdot d - \varphi).$$

Wenn $\sqrt{C} \cdot d - \varphi$ gegen $k\pi$ geht, muß E gegen $\frac{B}{2C}$ gehen, damit E_a nicht unendlich wird. Wenn das der Fall ist, umfaßt die Strecke d : $\frac{d}{A} = \frac{k}{2} + \frac{\varphi}{2\pi}$ Wellen. Wird $E_a^2 = A$ groß gegen B , so geht φ gegen Null, und die Strecke umfaßt dann nahezu $k/2$ Wellenlängen.

Die Verteilung des elektrischen Feldes in der Strecke ist

$$E = \frac{\partial U}{\partial x} = \sqrt{4A + \frac{B^2}{C}} \cos(\sqrt{C} x - \varphi).$$

Den Verlauf von U und E zeigt Fig. 9 mit $B > 0$, $\frac{a}{b} > \sqrt{\frac{U_a}{V_a}}$. Liegt z. B. bei A die Abszisse $\sqrt{C} \cdot d$, so ist $AB = E$ die an die Strecke anzulegende Spannung. $\frac{dE}{dx}$ gibt die Raumladung an und die Eintrittsgeschwindigkeit der Elektronen ist $V_k = V_a - E$.

Macht man in diesem Fall zunächst $B = 0$, indem $\frac{a}{\sqrt{U_a}} = \frac{b}{\sqrt{V_a}}$ eingehalten wird, so ist für $A = E_a^2 = 0$ auch $E = 0$. Wird durch richtige Wahl von C dafür gesorgt, daß $\sqrt{C} \cdot d - \varphi \neq k\pi$ wird, so bleibt

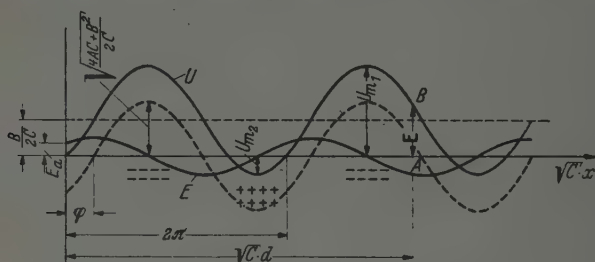


Fig. 9. $U_{m1} < V_a$, $U_{m2} < U_a$.

Ionengeschwindigkeit $U_a + U$. Elektronengeschwindigkeit $V_a - U$.

bei a , b , V_a und $U_a = \text{const}$ auch C konstant¹⁾. Läßt man nun E von Null an allmählich wachsen, so wächst $\sqrt{A} = E_a$ proportional mit E an und allmählich werden die Spannungsextrema U_{m1} und U_{m2} von Null ausgehend immer größer. Da $V_k = V_a - E$ ist, muß mit wachsendem E die Eintrittsgeschwindigkeit der Elektronen entsprechend geändert werden, damit C konstant bleibt. Fig. 10 zeigt den Verlauf von U ausgehend von Null, über 1 nach 2 mit wachsendem E .

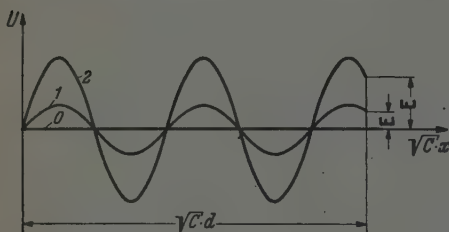


Fig. 10.

Ein anderer Weg z. B. ist der, bei dem man mit wachsendem Strom die Anodenfeldstärke E_a dauernd auf

einem konstanten Wert, z. B. Null, hält [Gl. (28)]. Hält man etwa $a/b = \text{const}$, so ist B/C unabhängig von den Strömen konstant, während C dauernd wächst, wodurch die Wellenlänge immer kürzer wird.

E muß dann abhängig vom Strom die Kurve Gl. (28), Fig. 11 durchlaufen.

¹⁾ Da bei raumladungsbegrenzten Hilfsanoden bzw. -kathoden zur Erzeugung der Ionen bzw. Elektronen $\frac{a}{U_a^{3/2}}$ und $\frac{b}{V_a^{3/2}}$ konstant sind, wenn U_a und V_a die angelegten Spannungen und a und b die herausgezogenen Ströme sind, so ist es leicht möglich, mit solchen Elektroden C bzw. A konstant zu halten.

Für die Spannungsverteilung in der Strecke gilt für $E_a = \sqrt{A} = 0$
 $U_{m1} = B/C$, $U_{m2} = 0$, ein Extremum liegt an der Anode. Es ist dann

$$U = \frac{B}{2C} (1 - \cos \sqrt{C} \cdot x), \quad \text{tg } \varphi = \infty, \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$E = \frac{B}{2\sqrt{C}} \sin \sqrt{C} \cdot x.$$

Fig. 12 zeigt, wie mit wachsendem Strom (wachsendes C) immer mehr Extrema in die Strecke d hineingepreßt werden. Die Zahlen an den Kurven entsprechen den E -Werten der Fig. 11. Mit sich änderndem E muß wieder $V_k = V_a - E$ entsprechend geändert werden.

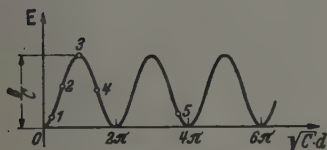


Fig. 11.

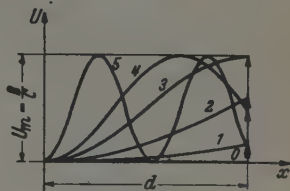


Fig. 12.

Gefährlich ist immer der Betriebspunkt $\sqrt{C} \cdot d - \varphi = k\pi$, denn nach Gl. (29) wächst dort E_a über alle Grenzen, wenn nicht gleichzeitig $E = \frac{1}{2} B/C$ ist.

Mit beiden Verfahren kann man theoretisch beliebig nahe an die vollständige Bremsung von Elektronen bzw. Ionen herankommen, wobei allerdings die bisherige Darstellung nur für kleine Werte von U_m gilt. Für größere U_m muß man entsprechend Fig. 6 die U -Kurven angenähert graphisch integrieren¹⁾.

Das erste Verfahren ergibt z. B. nach Fig. 7 mit $a = b$, $V_a = U_a$ nach Gl. (3)

$$E^2 = E_a^2 + a [\sqrt{U_a + U} - \sqrt{U_a} - (\sqrt{U_a} - \sqrt{U_a - U})]$$

mit wachsendem E ein wachsendes E_a^2 . Die Spannungsextrema A und B wachsen mit E_a erst rasch, dann langsamer an und können beliebig nahe bis $\pm U_a$ herankommen.

Der höchste Wert von E_a , bei dem das der Fall ist, ist $E_a^2 = 0,59 a \sqrt{U_a}$. In Fig. 13 ist der Verlauf von U abhängig von x für 3 Feldstärkenwerte $E_a = 0, 1$ und 2 dargestellt. Die Wellenlängen der verschiedenen U -Kurven sind nicht gleich groß.

¹⁾ Genaueres s. F. Wenzl, l. c.

Der zweite Fall des Stromanwachsens bei $E_a = 0$ ergibt z. B. mit $a = b$ und $V_a = 4 U_a$

$$E^2 = a [\sqrt{U_a + U} - \sqrt{U_a} - (2\sqrt{U_a} - \sqrt{4U_a - U})],$$

also E proportional mit \sqrt{a} , wenn U_a und V_a konstant sind. Die E^2 -Kurve der Fig. 14 ist also in ihrer Höhe dem Strom a proportional

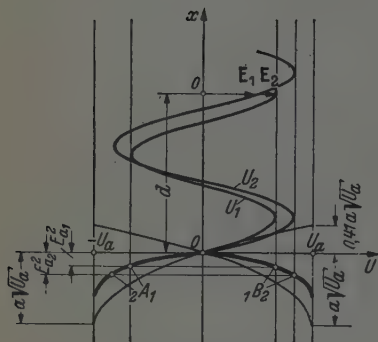


Fig. 13. $a = b$, $V_a = U_a$.

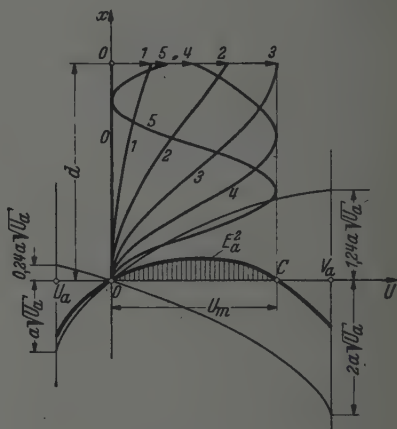


Fig. 14. $a = b$, $E_a = 0$,
 $V_a = 4 U_a$, $U_m = V_a - U_a = 3 U_a$.

und die zu integrierende $1/E$ -Kurve proportional $\frac{1}{\sqrt{a}}$, ohne bei verschiedenem a ihre Form zu ändern.

Die Fig. 14 zeigt eine Reihe von $U = \int_0^d \frac{dU}{E}$ -Kurven für verschiedene a und zeigt, wie mit wachsendem Strom die Wellen in die Strecke d hineinwandern. Für $x = d$ geben die Strecken 0–1, 0–2, 0–3 usf. die zugehörigen E -Werte der anzulegenden Spannungen¹⁾.

Natürlich gibt es noch sehr viele andere Möglichkeiten, den labilen Zustand zu vermeiden, und durch geeignete Schaltmaßnahmen kann man die erforderlichen Verläufe von E , V_k usf. erzwingen.

Über die Vorgänge, die in einer solchen Strecke bei Wechselspannung auftreten, wird später berichtet.

¹⁾ Eine genauere Untersuchung wird Herr Wenzl geben.

(Aus dem Institut für Theoretische Physik der Deutschen Karls-Universität und Technischen Hochschule in Prag und dem Laboratorium für Elektronenoptik der Siemens & Halske A.-G. in Berlin.)

Bildentstehung und Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops vom Standpunkt der Wellenmechanik.

Von Walter Glaser in Prag.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 15. März 1943.)

Die Elektronenintensität in der Bildebene wird wellenmechanisch berechnet und auf Grund der gefundenen Formel für die Intensität des Elektronenstromes das Auflösungsvermögen des Übermikroskops erstmalig korrekt abgeschätzt.

Über das Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops, wie es durch das gleichzeitige Zusammenwirken von Elektronenbeugung und Öffnungsfehler bedingt ist, sind bereits mehrere Arbeiten erschienen¹⁻⁶⁾. In den einen ^{1) 2) 3) 5)} wird das resultierende Zerstreuungsscheibchen dadurch bestimmt, daß Beugungs- und Öffnungsfehlerscheibchen entweder linear oder quadratisch addiert werden. In den anderen^{4) 6)} wird angenommen, daß die Auflösungsgrenze dann erreicht ist, wenn das Beugungsscheibchen gleich dem Öffnungsfehlerscheibchen ist. Die besondere Art der Bildentstehung und die Intensitätsverhältnisse werden für diese Abschätzung nirgends in Betracht gezogen. Wenn man nun auch erwarten wird, daß die angeführten Verfahren wenigstens größenordnungsmäßig das Richtige treffen, so muß doch festgehalten werden, daß eine theoretische Begründung für ein derartig einfaches Überlagerungsgesetz nicht gegeben werden kann. Denn daraus, daß bei verschwindender Apertur allein die Beugung, bei größerer Apertur dagegen vor allem der Öffnungsfehler merklich ist, kann natürlich nicht geschlossen werden, daß im Zwischengebiet die Summe (oder die Wurzel aus der Summe der Quadrate) aus den

¹⁾ M. v. Ardenne, ZS. f. Phys. 108, 338, 1938; 117, 657, Gl. (5), 1941. —

²⁾ R. Rebsch, Ann. d. Phys. 31, 551, 1938. — ³⁾ B. v. Borries u. E. Ruska, ZS. f. techn. Phys. 20, 225, 1939. — ⁴⁾ O. Scherzer, ZS. f. Phys. 114, 427, 1939. — ⁵⁾ H. Boersch, Jahrb. d. AEG-Forschung 7, 27, 1940; ZS. f. techn. Phys. 23, 129, 1942. — ⁶⁾ A. Recknagel, Jahrb. d. AEG-Forschung 7, 15, 1940.

beiden Einflüssen für die Gesamtwirkung maßgebend ist¹⁾. Im Gebiet mittlerer Aperturen kann man überhaupt nicht von Beugung und Öffnungsfehler als getrennten Erscheinungen sprechen²⁾. Man hat es hier mit einer Beugungserscheinung eigener Art zu tun, nämlich der Beugungswirkung einer begrenzten, von der Kugelform abweichenden Welle¹⁾.

Wir wollen den hier vorliegenden Sachverhalt noch etwas näher erläutern. Eine strenge Kugelwelle, also eine von „sphärischer Aberration“ freie Welle liefert in ihrem Mittelpunkt eine Beugungserscheinung, deren Intensitätsverlauf in einer Mittelpunktsebene durch

$$J = \left(\frac{2 I_1(x)}{x} \right)^2$$

dargestellt werden kann. Hierbei ist $I_1(x)$ die erste Bessel-Funktion. x bedeutet die allgemeine für Ding- und Bildraum invariante Koordinate :

$$x = \frac{2\pi}{\lambda_1} r_1 \sin \vartheta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} r_0 \sin \vartheta_0,$$

wobei λ_1 die de Broglie-Wellenlänge, ϑ_1 der Öffnungswinkel der Welle, r_1 die Entfernung des Aufpunktes in der achsensenkrechten Mittel-

¹⁾ Ebenso müßte man für eine Funktion, deren Verhalten man für sehr großes und sehr kleines Argument kennt, schließen, daß sie im Zwischengebiet durch die Summe oder die Wurzel aus der Summe der Quadrate dieser asymptotischen Grenzfunktionen dargestellt werden kann. Trotzdem hat man sogar auch in der Lichtoptik vereinzelt versucht, auf Grund dieser Schlußweise das Auflösungsvermögen z. B. des Fernrohrs abzuschätzen (E. Kramer, Allgemeine Theorie der zwei- und dreiteiligen Fernrohr objective, S. 82. Berlin 1885). Man vergleiche hierzu die Kritik, welche S. Czapski bei Gelegenheit der Besprechung einer Arbeit von E. v. Hoegh (ZS. f. Instrkde. 8, 203, 1888) an diesem Vorgehen geübt hat. Hier heißt es im Schlußabsatz: „Von Beugungsaberration zu reden, wie es z. B. Kramer thut und die Größe der Gesamt-aberration so zu bestimmen, daß der Durchmesser des ‚Sphärischen Aberrationskreises‘ zu dem der ‚Beugungsaberration‘ einfach hinzuaddiert wird, erscheint doch sehr gewagt“. Weiter heißt es: Man hat es in jedem Falle mit einer Beugungserscheinung eigener Art zu tun. Wenn keine (sphärische) Aberration vorhanden ist, so ist das Bild eines leuchtenden Punktes im Fernrohr die Interferenzwirkung einer begrenzten sphärischen Welle auf ihre Mittelpunktsebene, eben die Beugungswirkung jener Kugelwelle. Wenn aber solche Aberrationen vorliegen, so heißt dies nichts anderes, als daß dann die Welle von der Kugelform entsprechend abweicht und um die Lichtverteilung in der Einstellebene zu finden, bleibt nach meiner Meinung kein anderer Weg, als die Beugungswirkung dieser nicht sphärischen Welle auf jene Ebene zu bestimmen (vgl. hierzu auch R. Straubel, Abh. d. kgl. bayr. Akad. d. Wiss., II. Cl., XVIII. Bd., 1. Abt., München 1893). — ²⁾ In den auf S. 647 angeführten Arbeiten [Anm. ²⁾, ³⁾ und ⁵⁾] wird daher auch darauf hingewiesen, daß das obige Überlagerungsverfahren eigentlich unzulässig ist und nur zu einer größenordnungsmäßigen Abschätzung verwendet wird.

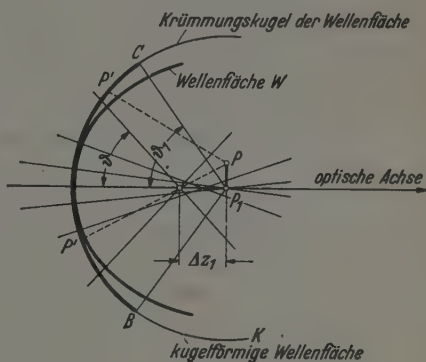
punktebene ist und die Größen λ_0 , ϑ_0 und r_0 die gleiche Bedeutung für die Dingebene haben. Da die erste Nullstelle von $I_1(x)$ bei $x = 3,8317$ liegt, hat der Durchmesser d'_1 des ersten dunklen Beugungsringes den Wert

$$d'_1 = \frac{3,83}{\pi} \frac{\lambda_1}{\sin \vartheta_1}.$$

Wenn man annimmt, daß zwei „Intensitätsgebirge“ noch als getrennt festgestellt werden können, wenn ihre „Gipfel“ die Entfernung $d_1 = \sigma d'_1$ haben (σ ist ein physiologischer Faktor, der gewöhnlich 0,5 gesetzt wird),

Fig. 1.

1. Im Aufpunkt P überlagern sich die von den Punkten P' herrührenden Elementarwellen des der Öffnung \mathcal{S}_1 entsprechenden Stückes BC der Kugelwelle.
2. In der Nähe der optischen Achse, d. h. für kleine ϑ -Werte, kann die asphärische Wellenfläche W durch eine kugelförmige Wellenfläche (Krümmungskugel K) ersetzt werden.



so findet man für die entsprechende Entfernung der zugehörigen Dingpunkte, d. h. für die Auflösungsgrenze bei der Abbildung durch eine ideale Kugelwelle:

$$d_0 = 0,6 \frac{\lambda_0}{\sin \vartheta_0}. \quad (1)$$

Die besprochene Beugungserscheinung kommt dadurch zustande, daß im Kugelmittelpunkt nicht die ganze Welle zur Wirkung kommt, sondern nur das der Apertur ϑ_1 entsprechende Stück der kugelförmigen Wellenfläche¹⁾. Nach dem Huygenschen Prinzip faßt man alle

¹⁾ Wir behandeln also im folgenden die elektronenoptische Abbildung durchstrahlter Objekte unter der Annahme, daß die von verschiedenen Objektpunkten ausgehende Strahlung als inkohärent zu betrachten ist. Da bei den Durchstrahlungsmikroskopen stets Objektdicken von vielen Atomdurchmessern von den Elektronenwellen durchquert werden müssen, werden im allgemeinen die Phasenbeziehungen der Wellen, welche an den verschiedenen Objektpunkten gestreut werden, zerstört, so daß also auch die in der Elektronenmikroskopie durchstrahlter Objekte vorliegenden Verhältnisse in der Regel der Abbildung durch „Selbstleuchter“ entsprechen, wie dies von vornherein für die Emissionsmikroskopie der Fall ist. Wollte man etwaige Kohärenzeigenschaften zwischen den von den verschiedenen Objektpunkten ausgehenden Elektronenwellen

Punkte P' (s. Fig. 1) dieses Stückes BC der Kugelfläche als Erregungszentren auf und das Überlagerungsergebnis dieser Elementarwellen bestimmt in jedem Aufpunkt P die Intensität. Je größer die Apertur ist, desto besser kann die volle Kugelwelle durch das betrachtete Stück ersetzt werden und desto „punktförmiger“ ist die Intensitätsverteilung um den Kugelmittelpunkt, d. h. desto geringer die Beugung, so daß man für entsprechend große ϑ_1 überhaupt sehr oft von dieser Beugungserscheinung absieht und als Bildpunkt den „Schnittpunkt der Lichtstrahlen“, d. h. den Schnittpunkt der Wellennormalen (hier Kugelradien) im Kugelmittelpunkt als geometrisch-optisches Bild betrachtet¹⁾. Deformiert man nun die kugelförmige Wellenfläche, so werden sich die Wellennormalen, also die geometrisch-optischen Lichtstrahlen, nicht mehr alle im Kugelmittelpunkt schneiden. Man hat ein mit geometrisch-optischen Bildfehlern behaftetes Strahlenbündel vor sich. Erfolgt z. B. die Deformation rotationssymmetrisch um einen Kugeldurchmesser, erhält man ein Strahlenbündel mit Öffnungsfehler. Weil die Öffnung groß ist, kann angenähert von der Beugungserscheinung abgesehen werden. Wenn aber nun die Apertur merklich kleiner gewählt wird, so muß man, um die Intensität in einem zum alten Kugelmittelpunkt (Gaußschen Bildpunkt) benachbarten Punkte zu berechnen, die Beugungserscheinung dieser begrenzten nicht kugelförmigen Wellenfläche in diesem Aufpunkt betrachten und zur Bestimmung des Auflösungsvermögens den Radius des ersten dunklen Beugungsringes in dieser Einstellebene berechnen. In diesem Zwischengebiet ist es physikalisch sinnlos, zwischen „Beugungsfehler“ und „Öffnungsfehler“ zu unterscheiden, sondern beide sind eine einzige Gesamterscheinung, nämlich die Beugung einer nicht sphärischen Wellenfläche. Blendet man weiter ab, so kann man wieder die nicht sphärische Wellenfläche

berücksichtigen, so würde dies nach Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* **42**, 167, 1896, eine weitere Integration über das Objekt erfordern. Über den Unterschied zwischen Selbst- und Nicht-Selbstleuchter vgl. man außer der bekannten Darstellung von E. Abbe: *Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop* (bearbeitet und herausgegeben von O. Lummer und F. Reiche, Braunschweig 1910) auch M. v. Laue, *Ann. d. Phys.* **43**, 165–168, 1914; M. Berek, *Marburger Sitzungsberichte* **67**, 1926; F. Jentzsch, *ZS. f. techn. Phys.* **11**, 338, 1938, sowie G. Joos und A. Köhler, *Naturwissensch.* **30**, 553, 1942.

¹⁾ Formel (1) bringt nicht zum Ausdruck, daß mit wachsender Apertur d_0 unbegrenzt abnimmt. Dies liegt daran, daß bei Formel (1) eine bestimmte, dingsseitige Strahlungscharakteristik (Lambertsches Gesetz) vorausgesetzt ist, bei welcher die Intensität nur für kleine ϑ_1 praktisch gleichmäßig über den Öffnungswinkel der Welle verteilt ist.

durch ihre Krümmungskugel ersetzen. Die Lichtverteilung in der Umgebung des Gaußschen Bildpunktes (Kugelmittelpunktes) ist dann die zuerst besprochene Beugungserscheinung mit dem Auflösungsvermögen (1).

Wenn man also im Zwischengebiet gleichzeitig mit dieser Beugungsformel und der für den geometrischen Öffnungsfehler rechnet, so macht man folgendes: 1. Man ersetzt die wirkliche nicht sphärische Wellenfläche zur Bestimmung der Beugung durch eine Kugel (nämlich die Krümmungskugel mit der gleichen Winkelöffnung) und das Beugungs-scheibchen dieser idealen Kugelwelle wird daher zu (1) bestimmt. 2. Werden andererseits die tatsächliche Gestalt der Wellenfläche und deren geometrisch-optischen Strahlaberrationen im Gaußschen Bildpunkt in Betracht gezogen, jedoch ohne Rücksicht auf die Wellennatur und daher auf die dieser Öffnung entsprechenden Beugungserscheinung. Ist das Öffnungsfehlerscheibchen $C\vartheta_0^3$, so wird gefolgert, daß die Auflösungsgrenze für $\lambda/\vartheta_0 = C\vartheta_0^3$ erreicht ist. Da linke und rechte Seite dieser Gleichung zwei einander ausschließenden Grenzfällen, nämlich dem von kleiner und großer Apertur entsprechen, ist es nicht von vornherein klar, ob diese Gleichsetzung berechtigt ist. Sie würde nach allem eher dazu geeignet erscheinen, den Bereich jener Apertur ϑ_0 zu bestimmen, wo weder die eine noch die andere Formel zuständig ist (Zwischengebiet).

Eine korrekte Abschätzung für das Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops kann man nur erhalten, wenn man die Anzahl der pro Zeiteinheit auf die Bildebene in der Umgebung des Gaußschen Bildpunktes auffallenden Elektronen bestimmt. Diese ergibt sich als der „Elektronenstrom“, welcher zu den entsprechenden nicht sphärischen de Broglie-Wellen gehört. Der Radius für das erste Intensitätsminimum bestimmt dann das Auflösungsvermögen. Bei den stark vergrößernden elektronenoptischen Anordnungen liegt der Bildschirm bereits weit im feldfreien Gebiet. Die Schrödinger-Gleichung hat also hier die Gestalt

$$\Delta u + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E u = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta u + \kappa^2 u = 0$$

$$\text{mit} \quad \kappa^2 = \frac{4\pi^2 m}{h^2} E = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}, \quad (2)$$

wobei E die Energie, m die Masse, h das Plancksche Wirkungsquantum und λ die de Brogliesche Wellenlänge bedeuten. Wenn man E durch

die Beschleunigung U ausdrückt und für e , m und h die empirischen Werte einsetzt, erhält man in bekannter Weise:

$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{U(\text{Volt})}} \cdot 10^{-8} \text{ cm.} \quad (3)$$

Aus den Lösungen $u(x, y, z)$ von (1) bestimmt sich die räumliche Elektronendichte $J(x, y, z)$ gemäß

$$J = |u|^2, \quad (4)$$

während der Elektronenstrom \mathfrak{S} durch

$$\mathfrak{S} = \frac{h}{4\pi i m} (u \text{ grad } \bar{u} - \bar{u} \text{ grad } u) \quad (5)$$

gegeben ist¹⁾. Wir haben nun insbesondere eine derartige Lösung der Wellengleichung (2) zu suchen, welche die Eigenschaften unserer abbildenden Strahlenbündel zum Ausdruck bringt.

Von dem auf der Achse liegenden Dingpunkt P_0 denke man sich unter dem Winkel ϑ_0 gegen die Achse ein Elektronenbündel der räum-

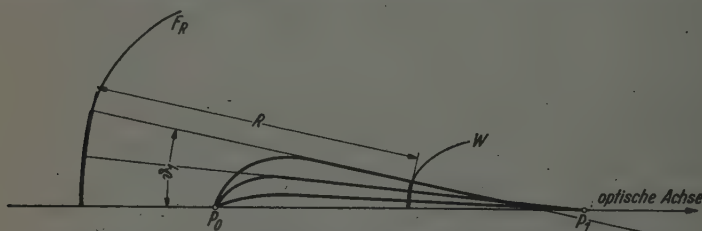


Fig. 2. Die im Bildraum konvergierenden geradlinigen Elektronenbahnen können als Wellennormalen der Wellenfläche W bzw. der im Unendlichen liegenden Wellenfläche F_R angesehen werden.

lichen Öffnung $d\Omega_0$ ausgehen derart, daß die Zahl der pro Zeiteinheit in den Raumwinkel $d\Omega_0$ gestrahlten Elektronen durch

$$\bar{K}(\vartheta_0) d\Omega_0 = K(\sin \vartheta_0) d\Omega_0 \quad (6)$$

gegeben ist. Die Strahlungscharakteristik \bar{K} möge nur von ϑ_0 abhängen, sie sei also rotationssymmetrisch um die optische Achse. Die vom gleichen Dingpunkt P_0 herkommenden Elektronenbahnen bilden ein monozentrisches Strahlenbündel, die Wellenflächen in der unmittelbaren Umgebung des Dingpunktes sind daher kugelförmig. Indem das Bündel die abbildenden elektrischen und magnetischen Felder durch-

¹⁾ Vgl. hierzu A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, II. Bd., S. 49, Braunschweig 1939, oder Cl. Schaefer, Einführung in die theoretische Physik, III., S. 413, Berlin 1937.

setzt, werden die Wellenflächen im allgemeinen irgendwie deformiert werden, so daß sie, wenn sich das Bündel wieder zu vereinigen beginnt, nicht wieder ihre vollkommene Kugelgestalt erhalten. Das Bündel wird also geometrisch-optische Bildfehler aufweisen. Abgesehen von den Vereinigungsstellen der Strahlen und den geometrisch-optischen Schattengrenzen wird nun aber nach Debye¹⁾ durch diese geometrischen Wellenflächen auch der Wellenvorgang mit guter Annäherung dargestellt. Die Elektronenbahnen sind die orthogonalen Trajektorien dieser geometrischen Wellenflächen. Wir denken uns also (s. Fig. 2) in entsprechender Entfernung vom Gaußschen Bildpunkt P_1 , aber doch noch im feldfreien Gebiet eine derartige Wellenfläche W gegeben. Ihre Normalen stellen die gegen den Bildpunkt konvergierenden Elektronenbahnen dar. Die Richtungskosinusse der Normalen seien α, β, γ und die Koordinaten ξ, η, ζ der Wellenfläche denken wir uns in der Gestalt

$$\xi = \xi(\alpha, \beta), \quad \eta = \eta(\alpha, \beta), \quad \zeta = \zeta(\alpha, \beta) \quad (7)$$

gegeben. Wenn man sich die Normalen in der Richtung, wo sie divergieren, d. h. nach rückwärts verlängert denkt, und durch dieses Geradenbündel, welches die Tangenten an die Elektronenbahnen im Bildraum darstellt, an einer beliebigen Stelle eine Orthogonalfläche gelegt denkt, so kann man sich auch vorstellen, daß die geradlinigen Elektronenbahnen von dieser Wellenfläche F_R herkommen. R sei die Entfernung der beiden Parallelflächen F_R und W . Von dieser Wellenfläche F_R wird natürlich im Aufpunkt allein der der Öffnung des Strahlenbündels entsprechende Teil zur Wirkung kommen. Indem wir entsprechend dem Huygenschen Prinzip dieses Stück der Wellenfläche als Erregungsfläche für Elementarwellen auffassen und diese phasenrichtig in einem beliebigen Punkt P überlagern, erhalten wir die in P herrschende Erregung u . Dies geschieht in mathematisch korrekter Weise auf Grund des Greenschen Satzes in der Gestalt des Kirchhoffschen Beugungsintegrals. Es gibt bekanntlich die Erregung u , also die Lösung der Schrödinger-Gleichung (2) in einem beliebigen Punkt aus der Lösung u_F auf einer beliebigen den Aufpunkt P umschließenden Fläche F gemäß

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_F \left(\frac{e^{-i\kappa r}}{r} \text{grad } u_F - u_F \text{grad } \frac{e^{-i\kappa r}}{r} df. \right) \quad (8)$$

¹⁾ Vgl. A. Sommerfeld u. I. Runge, Ann. d. Phys. 35, 290, 1911; E. Schrödinger, Abhandlungen zur Wellenmechanik. Leipzig 1927.

Hierbei ist r der Abstand des Aufpunktes P vom Integrationspunkt auf der Integrationsfläche F und df deren Flächenelement mit der nach außen weisenden Normalenrichtung. Als Integrationsfläche soll nun gerade die Wellenfläche F_R gewählt werden, und damit für u_F ein Näherungswert bekannt ist, denken wir uns mit Debye und Picht¹⁾ R über alle Grenzen wachsend, also die Wellenfläche F_R ins Unendliche geschoben. Für u_F kann in diesem Falle eine Kugelwelle

$$u_F = -\psi \frac{e^{-i\kappa R}}{R} \quad (9)$$

angesetzt werden, wobei $\psi^2 = |u_F|^2$ die Intensitätsverteilung auf dieser unendlich fernen Kugelfläche darstellt und im allgemeinen vom Orte auf der Kugel, also von der Strahlrichtung, abhängen wird. Wenn man (9) in (8) einsetzt und die Entfernung r vom Aufpunkt und Integrationspunkt durch R und ξ , η , ζ ausdrückt, erhält man

$$U = \frac{i\kappa}{2\pi} \int_{\Omega} \psi e^{-i\kappa[(x-\xi)\alpha + (y-\eta)\beta + (z-\zeta)\gamma]} d\Omega, \quad (10)$$

wobei $d\Omega = \frac{d\alpha d\beta}{\gamma}$ das Element des räumlichen Winkels Ω bedeutet, welchen die Öffnung des Strahlenbündels bildet. Gl. (10) stellt die Lösung der Wellengleichung (2) für ein beliebiges Strahlenbündel dar, das durch eine beliebige seiner geometrisch-optischen Wellenflächen (7) gegeben ist.

In (10) steht noch die unbekannte Funktion ψ . Diese wollen wir nun durch die dingseitige Strahlungscharakteristik $K(\sin \vartheta_0)$ ausdrücken. Wir bezeichnen dazu den räumlichen Winkel, den im Bildpunkt P_1 das vom Punkte P_0 unter dem räumlichen Winkel $d\Omega_0$ ausgehende Strahlenbündel bildet, mit $d\Omega$. Die Fläche dF , welche auf der unendlich fernen Wellenfläche zu $d\Omega$ gehört, ist dann durch $dF = R^2 d\Omega$ gegeben. Für den Elektronenstrom S_R , welcher in diesen Raumwinkel einströmt, folgt mit (9), da man nur die Glieder niedrigster Ordnung in $1/R$ zu berücksichtigen braucht und nach $-R$ zu differenzieren hat, nach Gl. (5)

$$S_R = -\frac{\hbar}{4\pi i m} \left(u_F \frac{\partial \bar{u}_F}{\partial R} - \bar{u}_F \frac{\partial u_F}{\partial R} \right) = \frac{\hbar \kappa}{4\pi m} \psi^2 \frac{1}{R^2}. \quad (11)$$

¹⁾ Vgl. für die folgenden Gl. (9) und (10): P. Debye, Ann. d. Phys. 30, 755, 1909; J. Fischer, ebenda 72, 353, 1923; J. Picht, ebenda 77, 685, 1925; M. Berek, ebenda 4, 285, 1930, und insbesondere die zusammenfassende Darstellung von J. Picht, Optische Abbildung, S. 119ff. Braunschweig 1931.

Die Gesamtzahl der pro Zeiteinheit in den Raumwinkel $d\Omega$ fallenden Elektronen ist daher

$$S_R dF = S_R R^2 d\Omega = \frac{\hbar \kappa}{4\pi m} \psi^2 d\Omega. \quad (12)$$

Diese Zahl muß aber gleich derjenigen $K d\Omega_0$ sein, welche vom Dingpunkt P_0 in den Raumwinkel $d\Omega_0$ pro Zeiteinheit eingestrahlt wird. Es ist daher

$$K d\Omega_0 = \frac{\hbar \kappa}{4\pi m} \psi^2 d\Omega \quad (13)$$

oder

$$\psi d\Omega = \sqrt{\frac{4\pi m}{\hbar \kappa} K d\Omega_0 d\Omega}. \quad (14)$$

Da der Bildschirm senkrecht auf der optischen Achse des Systems steht, welche mit der z -Achse zusammenfallen soll, haben wir allein die z -Komponente S_z des Elektronenstromes aus (10) zu bestimmen:

$$S_z = \frac{\hbar}{4\pi i m} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (15)$$

Man erhält hierfür

$$S_z = \frac{\hbar \kappa^3}{16\pi^3 m} \left[\int \psi e^{-i\kappa z} d\Omega \int \psi e^{+i\kappa z} \gamma d\Omega + \int \psi e^{+i\kappa z} d\Omega \int \psi e^{-i\kappa z} \gamma d\Omega \right]. \quad (16)$$

Für die übermikroskopische Abbildung mit ihrer extrem hohen Vergrößerung ist jedoch $\gamma = -\cos \vartheta$ praktisch gleich 1, da die bildseitige Apertur die Größenordnung 10^{-5} hat. Wir können daher schreiben:

$$S_z = \frac{\hbar \kappa^3}{8\pi^3 m} \left| \int \psi e^{-i\kappa z} d\Omega \right|^2 = \frac{\hbar \kappa}{2\pi m} |u|^2 \quad (17)$$

Man sieht, daß in diesem Falle statt mit S_z auch mit der Elektronendichte $J = |u|^2$ gerechnet werden kann [$\hbar \kappa / 2\pi m$ bedeutet übrigens nach (2) die Elektronengeschwindigkeit].

Wir wollen den Koordinatenanfangspunkt in den Gaußschen Bildpunkt (Kaustikspitze) legen und die Strahlrichtung durch die Polarkoordinaten ϑ und φ festlegen, wobei ϑ den Winkel des Strahles mit der negativen optischen Achse und φ den Winkel der durch den Strahl gehenden Meridianebene mit der x -Achse bedeutet. Es gilt also

$$\alpha = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \beta = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \gamma = -\cos \vartheta \quad (18)$$

und für $d\Omega$ folgt

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (19)$$

so daß (10) mit Gl. (14) die Gestalt erhält

$u(x, y, z)$

$$= i \sqrt{\frac{m\kappa}{\hbar\pi}} \int_0^{\vartheta_1} \int_0^{2\pi} \sqrt{K} e^{-i\kappa[-z \cos \vartheta + x \sin \vartheta \cos \varphi + y \sin \vartheta \sin \varphi - f(\vartheta, \varphi)]} \sqrt{d\Omega_0 d\Omega}, \quad (20)$$

wobei $f(\vartheta, \varphi)$ durch die Wellenfläche (7) nach (18) folgendermaßen gegeben ist:

$$f(\vartheta, \varphi) = \xi(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \cos \varphi + \eta(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \sin \varphi - \zeta(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta. \quad (21)$$

Um die Intensität in der Gaußschen Bildebenen zu berechnen, haben wir $z = 0$ zu setzen. Ferner wird vorausgesetzt, daß das Bündel allein mit sphärischer Aberration behaftet ist, so daß die Wellenflächen rotationssymmetrisch, also von φ unabhängig sind. Führt man daher Zylinderkoordinaten um die optische Achse ein

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \Theta, & \xi &= \varrho \cos \varphi, \\ y &= r \sin \Theta, & \eta &= \varrho \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

so erhält man

$$u(x, y, z) = i \sqrt{\frac{m\kappa}{\hbar\pi}} \int_0^{\vartheta_1} \int_0^{2\pi} \sqrt{K(\sin \vartheta_0)} e^{-i\kappa r \sin \vartheta \cos(\Theta - \varphi)} \cdot e^{-i\kappa f(\vartheta)} d\varphi \sqrt{\sin \vartheta_0 \sin \vartheta d\vartheta_0 d\vartheta} \quad (23)$$

mit

$$f(\vartheta) = \varrho(\vartheta) \sin \vartheta - \zeta(\vartheta) \cos \vartheta. \quad (24)$$

Auf Grund der Definition der nullten Bessel-Funktion

$$I_0(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-is \cos(\Theta - \varphi)} d\varphi \quad (25)$$

kann man hierfür schreiben:

$$u(r) = 2i \sqrt{\frac{\pi m \kappa}{\hbar}} \int_0^{\vartheta_1} \sqrt{K(\sin \vartheta_0)} I_0(\kappa r \sin \vartheta) \cdot e^{-i\kappa f(\vartheta)} \sqrt{\sin \vartheta_0 \sin \vartheta d\vartheta_0 d\vartheta}, \quad (26)$$

wobei $f(\vartheta)$ durch (24) gegeben ist.

Nun werde ein Strahlenbündel betrachtet, dessen auf die Dingebene bezogener Öffnungsfehler durch

$$\delta\vartheta = C_\vartheta \vartheta_0^3 = C_\vartheta \operatorname{tg} \vartheta_0^3 \quad (27)$$

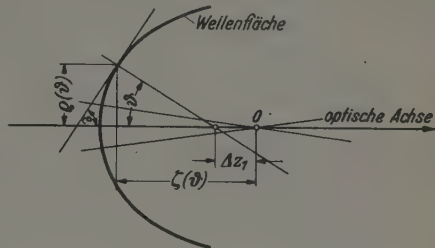
dargestellt ist. Da Gl. (27) nur Glieder dritter Ordnung enthält, kann zur Umrechnung auf die Bildebene die Beziehung

$$\sqrt{\Phi_0} \operatorname{tg} \vartheta_0 = V \sqrt{\Phi_1} \operatorname{tg} \vartheta \quad (28)$$

verwendet werden und für die sphärische Aberration Δr_1 in der Bildebene erhält man den Ausdruck

$$\Delta r_1 = V \delta \bar{o} = \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right)^{3/2} V^4 \operatorname{tg}^3 \vartheta. \quad (29)$$

Fig. 3.
Zur Bestimmung der Wellenfläche $\varrho = \varrho(\vartheta)$ und $\zeta = \zeta(\vartheta)$, deren sphärische Längsabweichung Δz_1 durch $\Delta z_1 = c \cdot \operatorname{tg}^2 \vartheta$ gegeben ist.



Die sphärische Längsabweichung $\Delta z_1 = -\Delta r_1 / \operatorname{tg} \vartheta$ wird durch

$$\Delta z_1 = -\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right)^{3/2} V^4 C_{\bar{o}} \operatorname{tg}^2 \vartheta = -c \operatorname{tg}^2 \vartheta \quad \text{mit } c = \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right)^{3/2} V^4 C_{\bar{o}} \quad (30)$$

dargestellt. Nun soll die Gleichung der Wellenfläche $\varrho = \varrho(\vartheta)$ und $\zeta = \zeta(\vartheta)$ bestimmt werden, deren Längsabweichung durch (30) gegeben ist¹⁾. Aus Fig. 3 folgt:

$$(\Delta z_1 - \zeta) \operatorname{tg} \vartheta = \varrho, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{d\varrho}{d\zeta} = \frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta}, \quad (31)$$

also, wenn man für Δz_1 aus (30) einsetzt,

$$-c \operatorname{tg}^3 \vartheta - \zeta \operatorname{tg} \vartheta = \varrho. \quad (32)$$

Indem man (32) nach ϱ differenziert, erhält man mit (31)

$$-(3c \operatorname{tg}^2 \vartheta + \zeta) \frac{d\vartheta}{d\varrho} = 1, \quad (33)$$

wenn man hierin für ζ aus (32) einsetzt, folgt für ϱ die Differentialgleichung

$$\operatorname{tg} \vartheta \frac{d\varrho}{d\vartheta} - \varrho = -2c \operatorname{tg}^3 \vartheta. \quad (34)$$

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist

$$\varrho = C_1 \sin \vartheta - 2c \operatorname{tg} \vartheta, \quad (35)$$

womit für ζ nach (32) folgt

$$\zeta = -C_1 \cos \vartheta - c \operatorname{tg}^2 \vartheta + 2c. \quad (36)$$

¹⁾ Vgl. hierzu auch F. Jentzsch, Handb. d. Phys. XVIII, S. 295, und W. Merté, ZS. f. Phys. 33, 533, 1925.

Aus (35) und (36) ergibt sich so die Funktion $f(\vartheta)$ zu

$$f(\vartheta) = C_1 - c \left(\frac{1}{\cos \vartheta} + \cos \vartheta \right), \quad (37)$$

wenn man diesen Ausdruck nach $\sin \vartheta$ entwickelt, erhält man

$$f(\vartheta) = \text{konst} - \frac{c}{4} \sin^4 \vartheta + \dots, \quad (38)$$

wobei die Punkte Glieder sechster und höherer Ordnung andeuten. Um zur vollständigen Bestimmung von (26) den Ausdruck

$$\sqrt{K(\sin \vartheta_0) \sin \vartheta_0 \sin \vartheta d\vartheta_0 d\vartheta} \quad (39)$$

auswerten zu können, brauchen wir den Zusammenhang zwischen dingseitiger Strahlneigung ϑ_0 und bildseitiger Strahlneigung ϑ . Im Gaußschen Bereich wäre er durch den Helmholtz-Lagrangeschen Satz

$$\sqrt{\Phi_0} \vartheta_0 = V \sqrt{\Phi_1} \vartheta \quad (40)$$

gegeben. Für ein aplanatisches System hätte für größere Strahlneigungen an seine Stelle die Sinusbedingung

$$\sqrt{\Phi_0} \sin \vartheta_0 = V \sqrt{\Phi_1} \sin \vartheta \quad (41)$$

zu treten. Unsere elektronenoptischen Abbildungsfelder werden jedoch im allgemeinen nicht die Sinusbedingung erfüllen. Für das „Seidelsche“, die Bildfehler dritter Ordnung umfassende Gebiet kann man allgemein zeigen, daß zwischen ϑ_0 und ϑ der Zusammenhang

$$\sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}} V \sin \vartheta = \sin \vartheta_0 + \frac{1}{h_0^3} \left(B - \frac{1}{V} F \right) \sin^3 \vartheta_0 \quad (42)$$

besteht. Hierbei bedeutet $h(z)$ die Elektronenbahn, welche durch den Dingpunkt geht und in der Blendenebene die Achsenentfernung 1. hat. h'_0 stellt ihre Neigung im Dingpunkt dar. B bestimmt gemäß $\Delta r = B r_B^3$ den Öffnungsfehler (wobei r_B der Blendenradius ist) und F bedeutet die Koma. Man sieht, daß für ein System, bei welchem Öffnungsfehler und Koma behoben sind, die Sinusbedingung im Seidelschen Bereich erfüllt ist, ein Satz, der mit dem der Lichtoptik entsprechenden übereinstimmt¹⁾. Das zweite Glied auf der rechten Seite von (42) stellt also die durch die Bildfehler bedingte Abweichung von der Sinusbedingung dar²⁾. Der Beweis von Gl. (42) soll bei einer späteren Gelegenheit

¹⁾ Vgl. etwa M. Herzberger, Strahlenoptik, Berlin 1931, S. 122. —

²⁾ Es möge darauf hingewiesen werden, daß in manchen wellentheoretischen Darstellungen der Lichtoptik dieser in der Abweichung von der Sinusbedingung enthaltene Einfluß von sphärischer Aberration und Koma übersehen wird.

gebracht werden. In unserem Falle hoher Vergrößerung können wir das Glied $\frac{1}{V}F$ gegenüber B unberücksichtigt lassen. Ersetzt man B noch gemäß der Beziehung

$$B = VC_{\vartheta} h_0'^3 \quad (43)$$

durch die Öffnungsfehlerkonstante C_{ϑ} , so wird aus Gl. (42)

$$\sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}} \sin \vartheta = \frac{1}{V} \sin \vartheta_0 + C_{\vartheta} h_0' \sin^3 \vartheta_0. \quad (44)$$

Bei gegebener dingseitiger Apertur hängt also die bildseitige Apertur nach Gl. (44) außer von dieser auch noch vom Öffnungsfehler ab, was ja anschaulich unmittelbar klar ist. Aus (44) folgt für ϑ_0 als Funktion von ϑ

$$\left. \begin{aligned} \sin \vartheta_0 &= V \sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}} \sin \vartheta - C_{\vartheta} h_0' V^4 \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right)^{3/2} \sin^3 \vartheta, \\ \cos \vartheta_0 d\vartheta_0 &= V \sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}} \cos \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$\cos \vartheta$ kann hier durch 1 ersetzt werden; für $1/\cos \vartheta_0$ schreiben wir dagegen $1 + \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta_0$

$$d\vartheta_0 = V \sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}} \left(1 + \frac{1}{2} V^2 \frac{\Phi_1}{\Phi_0} \sin^2 \vartheta\right) d\vartheta. \quad (46)$$

Damit ergibt sich schließlich mit (45) und (46)

$$\begin{aligned} &\sqrt{K(\sin \vartheta_0) \sin \vartheta_0 \sin \vartheta d\vartheta_0 d\vartheta} \\ &= V \sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi_0}} \sqrt{K(V \sin \vartheta)} \left[1 + \frac{1}{4} V^2 \frac{\Phi_1}{\Phi_0} (1 - V^2 C_{\vartheta} h_0') \sin^2 \vartheta\right] \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \quad (47)$$

Wenn wir dies in Gl. (26) einsetzen, erhalten wir endgültig bis auf eine multiplikative Konstante vom absoluten Betrag 1

$$\begin{aligned} u(r) &= 2V \sqrt{\frac{\pi m \kappa \Phi_1}{\Phi_0}} \int_0^{\vartheta_1} \sqrt{K(V \sin \vartheta)} I_0(\kappa r \sin \vartheta) \cdot \\ &\cdot e^{\frac{i\pi c}{4} \sin^4 \vartheta} \left[1 + \frac{1}{4} V^2 \frac{\Phi_1}{\Phi_0} (1 - V^2 C_{\vartheta} h_0') \sin^2 \vartheta\right] \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \quad (48)$$

Um diese im Seidelschen Gebiet bei hoher Vergrößerung für die Intensität streng gültige Formel auswerten zu können, müssen wir die dingseitige Strahlungscharakteristik kennen. Würde es sich bei der elektronenoptischen Abbildung um derartige Objektdicken handeln, daß die Gesetze der Vielfachstreuung¹⁾ angewendet werden könnten,

¹⁾ Vgl. die zusammenfassende Darstellung von W. Bothe im Handb. d. Phys. XXII/2, S. 6–25, Berlin 1933.

so würde für die Richtungsverteilung der Elektronenstrahlung das Gaußsche Fehlergesetz

$$K = \frac{n_0}{2\pi\vartheta_w^2} e^{-\frac{\vartheta_0^2}{2\vartheta_w^2}} \quad (49)$$

bestehen. n_0 bedeutet hierbei die Zahl der pro Zeiteinheit auf die Objektfolie auftreffenden Elektronen, ϑ_w heißt der wahrscheinlichste Streuwinkel. Es ist $\vartheta_w = 0,85 \vartheta_m$, wobei ϑ_m jenen Streukegel bedeutet, innerhalb dessen sich bei der Streuung ebenso viele Elektronen befinden wie außerhalb desselben. Dieser wahrscheinlichste Streuwinkel wird nach Bothe durch die Formel

$$\vartheta_w = \frac{8,0}{U} \frac{U + 511}{U + 1022} Z \sqrt{\frac{\varrho x}{A}} \quad (50)$$

gegeben. Dabei ist ϑ_w die wahrscheinlichste Ablenkung im Bogenmaß, U die Elektronengeschwindigkeit in Kilovolt, Z die Ordnungszahl, ϱ die Dichte, A das Atomgewicht und x die Dicke der Folie in 10^{-4} cm. Würde man mit den Formeln (49) und (50) rechnen können, so erhielte man in Gl. (48) die Intensität als Funktion der Beschleunigungsspannung U , der Größe $Z \sqrt{\frac{\varrho x}{A}}$ und der Öffnungsfehlerkonstanten C_δ . Durch Photometrieren des Elektronenbildes könnte man so die Größe $Z \sqrt{\frac{\varrho x}{A}}$ für die Objektfolie bestimmen. Die Integration wäre dabei über jene Öffnung ϑ_1 zu erstrecken, welche gemäß Gl. (44) der tatsächlichen geometrischen Apertur des Objektivs, also dem Schwinkel, unter dem die Objektivöffnung vom Dingpunkt erscheint, entspricht. Daß nach den Versuchen von B. v. Borries und E. Ruska¹⁾ tatsächlich nur ein geringer Teil der Objektivöffnung mit Elektronen merklicher Intensität beaufschlagt wird, müßte eben in der Kleinheit von ϑ_m bzw. des wahrscheinlichsten Ablenkwinkels ϑ_w zum Ausdruck kommen. Die Bildentstehung hätte man sich ganz nach den Vorstellungen zu denken, wie sie in den genannten Arbeiten entwickelt und durch Versuche belegt worden sind. Die Streucharakteristik (49), welche über ϑ_w von der Objektdicke abhängt, würde somit die Kontraststeuerung bewirken, indem die Strahlen, welche von größeren Objektdicken herrühren, nach (50) in einen größeren Winkel gestreut werden, so daß sie hier entweder infolge der Wirkung des Öffnungsfehlers nur

¹⁾ B. v. Borries u. E. Ruska, ZS. f. techn. Phys. 19, 402–407, 1938; 20, 225–235, 1939; Naturwissensch. 27, 281, 1939.

einen diffusen Hintergrund bilden oder überhaupt, weil sie nicht mehr in die Objektivöffnung gelangen, zum Bild nicht beitragen. Diese Vorstellung der Bildentstehung wird in allen Einzelheiten durch den Ausdruck (48) beschrieben. Allerdings ist die Kenntnis der Streucharakteristik $K(\sin \vartheta_0)$ wesentlich. Und gerade die Versuche von B. v. Borries und E. Ruska über die Größe der wirksamen Eintrittsapertur zeigen nun, daß die Vorstellungen der Vielfachstreuung in den Objektfolien nur für solche Objektdicken zutreffen können, die nach dem Experiment im übermikroskopischen Bild schon praktisch dunkel sind. Denn berechnen wir die wahrscheinlichste Ablenkung ϑ_w nach (50) für ein übliches organisches Präparat, indem wir z. B. etwa für Kohlenstoff $Z = 6$, $A = 12$, $\varrho = 2$ setzen, so ergibt sich bei einer Strahlspannung von 100 kV für $\vartheta_w = 0,01 \sqrt{x}$. Für eine Objektdicke von 10^{-4} cm wird also ϑ_w bereits 0,01, somit praktisch gleich der geometrischen Objektivapertur, was nach den angeführten Versuchen um den Faktor 10 zu groß ist. ϑ_w müßte ja die Größenordnung der *wirksamen* Apertur haben, also die Größenordnung 10^{-3} . Objekte organischer Substanz von 1 μ Dicke sind bei 100 kV Strahlspannung auch tatsächlich völlig dunkel. Aus der Übereinstimmung zwischen der Streuaperturberechnung und dem Versuch folgt, daß es sich in der Übermikroskopie bei den verwendeten Foliendicken nicht um Vielfachstreuung, sondern um Mehrfachstreuung handeln muß. Die zahlreichen Arbeiten, z. B. über Tiefenauflösungsvermögen, Auflösungsbeschränkung durch räumliche Elektronenstreuung usw., welche mit der Vorstellung der Vielfachstreuung arbeiten, unterliegen somit alle diesen Bedenken.

Die bei Mehrfachstreuung bestehenden Verhältnisse¹⁾²⁾ sind außerordentlich kompliziert und die theoretischen Ergebnisse leider für unsere Zwecke zu unhandlich, als daß wir sie hier verwenden könnten.

Wäre die tatsächliche Streucharakteristik bekannt, so würde diese die wirksame, dingseitige Strahlapertur von selbst ergeben und sie brauchte daher nicht gesondert in Rechnung gesetzt werden. Die Integration hätte über die geometrische Objektivapertur zu erfolgen, so daß selbsttätig die über diese Apertur hinaus abgestreuten Elektronenstrahlen für den Bildaufbau ausfielen und somit die Kontraststeuerung in Übereinstimmung mit den obigen Vorstellungen zustande käme.

¹⁾ W. Bothe, ZS. f. Phys. 5, 63, 1921. — ²⁾ C. Wentzel, Ann. d. Phys. 69, 335, 1922.

Da wir dieses genaue Gesetz für die Elektronenstreuung in der Objektfolie nicht kennen, müssen wir anders vorgehen. Statt die dingsseitige wirksame Apertur aus dem Streugesetz für die entsprechende Beschleunigungsspannung u und die Materialeigenschaften der Objektfolie zu bestimmen, entnehmen wir ihren Wert der Erfahrung, indem wir sie mit 10^{-3} annehmen. Für $K(\sin \vartheta_0)$ wählen wir eine derartige Funktion, welche die wesentliche Eigenschaft dieser Strahlungscharakteristik, nämlich für $\vartheta_0 = 0$ ein Maximum zu besitzen und nach beiden Seiten symmetrisch abzufallen, zum Ausdruck bringt. Da nur kleine Ablenkwinkel ($\leq 10^{-3}$) in Betracht kommen, spielt die besondere Form von $K(\sin \vartheta_0)$ keine ausschlaggebende Rolle, wenn wir den Aperturwinkel vorgeben, außerhalb dessen die Intensität als verschwindend angenommen wird. Wir wollen $K(\sin \vartheta_0) = K_0 \cos^2 \vartheta_0$ setzen¹⁾. Bei unseren kleinen Aperturen können wir auch das Glied innerhalb der eckigen Klammer in (48) gegenüber 1 außer Betracht lassen. Denn mit dem Werte $C_{\delta} h'_0 = 11,14$, wie er der Abbildung durch das Glockenfeld mit dem Parameterwert $k^2 = \frac{e H_0^2 a^3}{8 m U} = 1,5$ entspricht²⁾, wird für eine Vergrößerung von $V = 100, 1 + \frac{1}{4} V^2 (1 - V^2 C_{\delta} h'_0) \sin^2 \vartheta_0 = 1 + \varepsilon'$ mit $\varepsilon' \leq 0,02$. Damit erhalten wir

$$u = 2 V^2 \sqrt{\frac{\pi m \kappa K_0 \Phi_1}{\Phi_0}} \int_0^{\vartheta_1} I_0(\kappa r \sin \vartheta) e^{i \frac{\kappa c}{4} \sin^2 \vartheta} d \sin^2 \vartheta. \quad (51)$$

Wir setzen

$$a = \frac{1}{2} V^2 \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right)^{3/4} \sqrt{C_{\delta} \kappa}, \quad A = 2 V^2 \sqrt{\frac{\pi m \kappa K_0 \Phi_1}{\Phi_0}} \quad (52)$$

und schreiben

$$\sin \vartheta = \sqrt{\frac{t}{a}}. \quad (53)$$

Das ergibt

$$u = A \int_0^{a \sin^2 \vartheta_1} I_0 \left(\frac{\kappa r}{\sqrt{u}} \sqrt{t} \right) e^{i t^2} dt. \quad (54)$$

¹⁾ Dieses Gesetz würde nach den Messungen von J. Gedult v. Jungenfeld (Dissertation, Gießen 1915) und nach A. F. Kovarik u. L. W. Mc Keenan (Phys. Rev. 6, 426, 1915) dem Fall vollständiger Diffusion entsprechen (vgl. W. Bothe, a. a. O.). Hierbei würde allerdings der ganze Öffnungswinkel von 0 bis $\pi/2$ in Betracht kommen. Wir nehmen jedoch dieses Gesetz nur innerhalb von Öffnungswinkeln an, die kleiner als 10^{-3} sind und setzen außerhalb die Intensität Null, da wir ja keineswegs so große Foliendicken, wie sie dem Fall vollständiger Diffusion entsprechen, verwenden. — ²⁾ ZS. f. Phys. 117, 285, 1941.

Weiter setzen wir noch

$$s = \frac{\kappa r}{\sqrt{a}}. \quad (55)$$

Ferner

$$\varepsilon = a \sin^2 \vartheta_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi_0}{\Phi_1} \right)^{1/4} \sqrt{C_0 \kappa} (1 + 2 \sqrt{C_0} h'_0 \sin^2 \vartheta_0) \sin^3 \vartheta_0. \quad (56)$$

So erhält man

$$u = A \int_0^\varepsilon I_0(s \sqrt{t}) e^{it^2} dt. \quad (57)$$

Zerlegt man in Real- und Imaginärteil Ψ und X , so ist

$$\Psi = A \int_0^\varepsilon I_0(s \sqrt{t}) \cos t^2 dt, \quad X = A \int_0^\varepsilon I_0(s \sqrt{t}) \sin t^2 dt. \quad (58)$$

und für die Intensität $J = |u|^2$ in der Einstellebene findet man

$$J = A^2 (\Psi^2 + X^2). \quad (59)$$

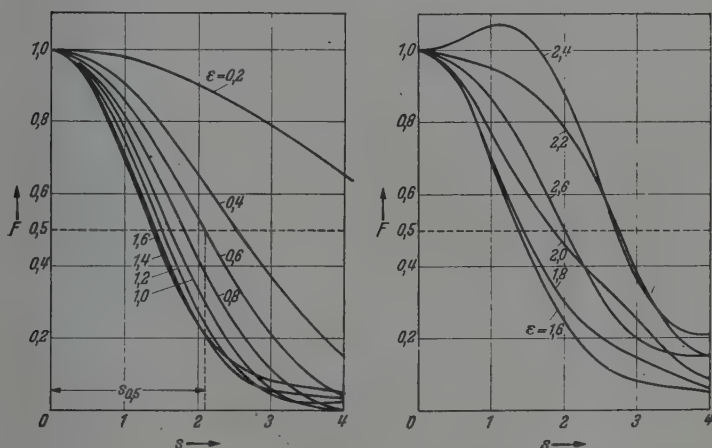


Fig. 4. Darstellung der Elektronenintensität in der Nähe der Kaustikspitze, bezogen auf den hier herrschenden Maximalwert als Funktion von $s = \frac{\kappa}{\sqrt{a}} r$ und des Parameters $\varepsilon = a \sin^2 \vartheta_1$.

Die Intensität $J(s)/J(0)$, gemessen durch ihren Maximalwert $J(0)$ in der Kaustikspitze, bezeichnen wir mit

$$F(s) = \frac{J(s)}{J(0)}.$$

Die Integrale (58) wurden für einige ε -Werte numerisch berechnet und die Intensitätsverteilung $F(s)$ in Fig. 4 als Funktion von s dargestellt¹⁾. Da die Intensitätskurven ein sehr flaches Minimum haben, das durch die Figur nicht sehr gut definiert ist, wollen wir das Auflösungsvermögen lieber auf den Durchmesser des Kreises beziehen, wo die Intensität auf die Hälfte herabgesunken ist. Im Falle der idealen Kugelwelle erhält man für den entsprechenden Radius $x_{0,5}$ aus

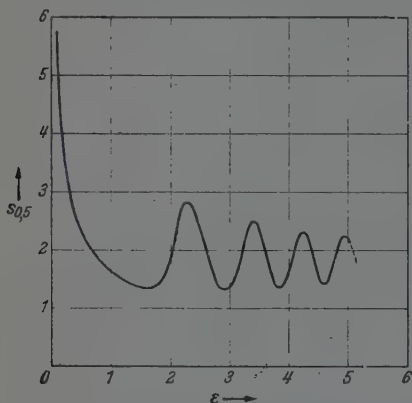


Fig. 5. Abhängigkeit der Halbwertsordinate $s_{0,5} = \frac{\pi}{\sqrt{a}} r_{0,5}$ vom Parameter $\varepsilon = a \sin^2 \vartheta_1$.

$(2 I_1(x_{0,5})/x_{0,5})^2 = \frac{1}{2}$ den Wert $x_{0,5} = 1,6$. Um zum gleichen Wert (1) für das Auflösungsvermögen zu kommen, haben wir in diesem Falle den (physiologischen) Faktor statt $\sigma = 0,5$, $\sigma = 1,18$ zu wählen. Aus Fig. 4 können wir nun zu jedem Wert des Parameters ε den entsprechenden Wert von $s_{0,5}$, für welchen $F(s_{0,5}) = \frac{1}{2}$ ist, entnehmen. In Fig. 5 ist dieser „Halbwertsradius“ $s_{0,5}$ als Funktion von ε dargestellt. Man sieht, daß es einen optimalen Wert $\varepsilon_{opt} = 1,6$ gibt, für welchen $s_{0,5}$

ein Minimum ist. Dieser Kleinstwert von $s_{0,5}$ ist $s_{0,5} = 1,35$. Aus (56) folgt für diesen optimalen ε -Wert also nach Gl. (45) für einen bestimmten Wert der dingseitigen Apertur ϑ_0 das Auflösungsvermögen

$$d = \frac{\sigma}{V} 2 r_{0,5}$$

$$d = \sigma \frac{2 s_{0,5} \sqrt{a}}{\pi V} = \sigma \frac{s_{0,5}}{\pi} \lambda \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right)^{3/8} \sqrt[4]{\frac{C_{\bar{\vartheta}}}{4}}$$

oder wenn man für $s_{0,5}$ seinen Kleinstwert $s_{0,5} = 1,35$ einsetzt,

$$d = \sigma \cdot 0,48 \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right)^{3/8} \lambda \sqrt[4]{\frac{C_{\bar{\vartheta}}}{\lambda}} \quad (57)$$

mit dem Werte $\sigma = 1,18$, und im rein magnetischen Feld ($\Phi_1 = \Phi_0$) ist also

$$d = 0,56 \lambda \sqrt[4]{\frac{C_{\bar{\vartheta}}}{\lambda}} \quad (58)$$

¹⁾ Für die zahlenmäßige Durchrechnung danke ich Herrn F. Steinmetz.

Für die optimale Apertur $\vartheta_{0(opt)}$ finden wir aus (56), wenn ϑ_0 so klein ist, daß wir das Korrekturglied weglassen können, mit $\varepsilon_{opt} = 1,6$

$$\vartheta_{0(opt)} = 1,13 \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0} \right)^{1/8} \sqrt[4]{\frac{\lambda}{C_{\delta}}} \quad (59)$$

bzw. im rein magnetischen Fall

$$\vartheta_{0(opt)} = 1,13 \sqrt[4]{\frac{\lambda}{C_{\delta}}} \quad (60)$$

Der Vergleich von Gleichung (58) und (60) mit den Abschätzungen, wie sie in den auf S. 647 angeführten Arbeiten gegeben werden, zeigt, daß die dort gefundene Auflösungsgrenze, wenigstens was ihre Größenordnung betrifft, durch die wellentheoretische Behandlung nachträglich ihre Rechtfertigung erhält. Für ein typisches abbildendes Magnetfeld, wie es das Glockenfeld¹⁾ $H = H_0/[1 + (z/a)^2]$ ist, folgt mit dem Parameterwert $k^2 = 1,6$ aus dortiger Tabelle 1, für $C_{\delta}/a = 0,442$; die Brennweite ist $a/f = 0,929$, somit $C_{\delta}/f = 0,410$. Mit einer Beschleunigungsspannung von 100 kV wird nach (3) $\lambda = 3,87 \cdot 10^{-9}$ mm. Setzt man $f = 1$ mm, so wird $d = 2,18 \cdot 10^{-7}$ mm. Daß die tatsächlich erreichten Auflösungen noch fast um eine Größenordnung schlechter sind, muß also seinen Grund in anderen Ursachen als Beugung und Öffnungsfehler haben²⁾. Man könnte versucht sein, auf Grund von Fig. 5 und Gleichung (56) den Verlauf des Auflösungsvermögens, insbesondere die Art seiner Verschlechterung, bei größeren Aperturen weitergehend zu diskutieren. Hierzu ist jedoch zu bemerken, daß unsere Resultate unter Zugrundelegung einer bestimmten dingseitigen Strahlungscharakteristik, nämlich $K = K_0 \cos^2 \vartheta_0$, gewonnen worden sind und daher nur für so große Aperturen Geltung haben, innerhalb derer die Strahlintensität durch die angegebene Strahlungscharakteristik mit genügender Annäherung dargestellt wird. Inwieweit das erreichbare Auflösungsvermögen bei Zugrundelegung anderer Strahlungscharakteristiken abgeändert wird, soll später untersucht werden.

Die Intensitätsverteilung und damit das Auflösungsvermögen in Einstellebenen, welche nicht mit der Gaußschen Bildebene zusammenfallen, kann in ähnlicher Weise berechnet werden, wenn in der Ausgangsformel die Koordinate z nicht gleich Null angenommen wird.

¹⁾ Vgl. ZS. f. Phys. 117, 285, 1941. — ²⁾ Vgl. ebenda 120, 1, 1942.

Weiter interessiert die Frage, in welcher Weise die anderen Bildfehler, welche bei der Abbildung eines außerhalb der Achse liegenden Dingpunktes wirksam werden, die wellentheoretische Intensität beeinflussen. Wir haben daher die Intensität des Elektronenstromes, welche zu einem beliebigen „Seidelschen“ Strahlenbündel gehört, berechnet und den Einfluß der Bildfehler dritter Ordnung, insbesondere der anisotropen Bildfehler, auf die Intensität diskutiert. Die Ergebnisse sollen in einer späteren Arbeit veröffentlicht werden, in welcher die Theorie der elektronenoptischen Abbildung vom Standpunkt der Wellenmechanik auf breiterer Grundlage, als es hier geschehen ist, entwickelt werden soll.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft dankt der Verfasser für die Überlassung einer vollautomatischen Rechenmaschine.

Die Struktur des Th II-Spektrums. I.

Von T. L. de Bruin, Ph. Schuurmans und P. F. A. Klinkenberg in Amsterdam.

Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 23. Februar 1943.)

Mit Hilfe neuer Messungen der Wellenlängen und des Zeeman-Effektes im Spektrum des einmal ionisierten Th-Atoms werden über 1900 Linien gedeutet als Übergänge innerhalb zwei Termsystemen, von denen das eine bis jetzt 36 ungerade und 94 gerade, das andere 25 gerade und 77 ungerade Niveaus enthält. Die Terme des ersten Systems werden jetzt bekanntgegeben. Auf Grund der g -Werte und der relativen Lagen mit Bezug auf das Spektrum des Th III werden die ungeraden Terme den $5f7s^2$, $5f6d7s$ - und $5f6d^2$ -Konfigurationen des Th II zugefügt. Die Kopplung des $7s$ -Elektrons entspricht ungefähr dem J - J -Typus. — Einige gerade Terme werden versuchsweise gedeutet; infolge starker Störung verschiedener Konfigurationen und weit fortgeschrittener J - J -Kopplung ist die weitere Identifizierung der geraden Terme noch nicht möglich.

Einleitung.

Nachdem das Th III-Spektrum nahezu vollständig analysiert worden war¹⁾, lag es auf der Hand, einen Versuch zu unternehmen, die Tausende von Th II-Linien in Terme einzuordnen und diese durch Vergleich mit den Termen des Th III zu interpretieren. Durch die Arbeit von Fred²⁾ war schon eine Trennung der stärkeren Linien des Th II von denen des neutralen Atoms vorhanden und auch eine Gruppierung der stärkeren Th II-Linien in Klassen bezüglich Vorkommen im Unterwasserfunken, Verhalten im Klingschen Widerstandsofen bei verschiedenen Temperaturen, Persistenz in verdünnter Lösung und Selbstumkehr möglich. Die Arbeiten Liers³⁾ erlaubten eine Unterteilung der stärkeren Linien bezüglich ihrer Absorptionsfähigkeit im Spektrum der Explosion und nach dem Zeeman-Effekt. Im Gebiete 2460 bis 3470 Å waren diese Gitterbeobachtungen der magnetischen Aufspaltung durch neue Messungen mit Hilfe unserer leistungsfähigeren Interferenzmethode¹⁾ in glücklicher Weise ergänzt worden.

Das Wellenlängenmaterial, über das wir verfügten, war anfangs nicht einheitlich. Es bestand erstens aus eigenen älteren Messungen des Bogen- und Funkenspektrums unterhalb 2700 Å mit dem Hilger-E-

¹⁾ T. L. de Bruin u. P. F. A. Klinkenberg, Proc. Amsterdam **43**, 581, 1940; T. L. de Bruin, P. F. A. Klinkenberg u. Ph. Schuurmans, ZS. f. Phys. **118**, 58, 1941. — ²⁾ M. Fred, Astrophys. Journ. **87**, 176, 1938. — ³⁾ T. L. de Bruin u. J. N. Lier, Proc. Amsterdam **41**, 956, 1938; J. N. Lier, Dissertation Amsterdam, Juni 1939.

Quarzspektrographen und zwischen 2980 und 5590 Å mit dem Gitter, zweitens Freds Messungen, drittens den alten Wellenlängen nach Exner und Haschek¹⁾ und viertens eigenen Messungen im Spektrum des Backschen Abreißbogens im Gebiete 2460—3470 Å mit dem Quarzspektrographen, normiert auf Exner-Haschek-Wellenlängen. Die ersten Messungen waren auf Eisen bezogen, erforderten aber infolge kleiner unsystematischer Verschiebungen zwischen den Spektren Korrekturen bis 0,15 Å.

Nachdem es nach längerem Suchen gelungen war, einige Hunderte von den stärksten Linien in Terme einzuordnen, so daß auch die magnetischen Aufspaltungen in zwangloser Weise gedeutet wurden, stellte sich heraus, daß insbesondere das beschränkte Wellenlängenmaterial Freds äußerst genaue Frequenzunterschiede ergab, so daß beschlossen wurde, das gesamte Material auf diesen Wellenlängen zu normieren.

1. Experimentelles.

Wellenlängen. Da die Aufnahmen des von dem Backschen Abreißbogen im Vakuum ausgesandten Spektrums von hervorragender Schärfe und nahezu vollkommen ohne Hintergrund sind, kommen die schwachen Linien viel deutlicher heraus als im Bogen- oder Funkenspektrum. Deshalb wurde das gesamte Spektrum so viel wie möglich an solchen Aufnahmen neu durchgemessen. *Zwischen 2932 und 4100 Å* wurde das Spektrum in der dritten Ordnung des großen Rowland-Gitters ($R = 7$ m) gemessen, *zwischen 4100 und 5590 Å* in der zweiten Ordnung und unmittelbar an Freds dreistellige Wellenlängen angeschlossen. Die umgekehrte Dispersion beträgt in der dritten Ordnung 1,6 Å/mm, in der zweiten 2,4 Å/mm, so daß eine Ablesegenauigkeit von 0,0015 bzw. 0,0022 Å gewährleistet ist. Der mittlere Fehler der so ermittelten Wellenlängen der stärkeren und normal scharfen Linien beträgt nicht mehr als 0,005 bzw. 0,008 Å, wie durch Vergleich der gefundenen Frequenzdifferenzen und mit sporadisch anwesenden Verunreinigungslinien hervorgeht. Mit diesen Wellenlängen wurden die Termwerte berechnet unter sorgfältiger Ausschaltung der durch Unschärfe, Schwäche, Koinzidenz oder unsichere Einordnung weniger zuversichtliche Werte. Der mittlere Fehler der relativen Termwerte wird $0,05 \text{ cm}^{-1}$ nicht überschreiten.

¹⁾ F. Exner u. E. Haschek, Die Spektren der Elemente bei normalem Druck, Band II und III, 1911 und 1912.

Zwischen 2270 und 3030 Å wurde das Spektrum des Abreißbogens gegen die aus den Termen berechneten Kombinationen gemessen, von denen eine genügende Anzahl zur Verfügung stand. Zu dem Zwecke wurden einige stark belichtete Aufnahmen mit dem Quarzspektrographen gemacht und die unbekannten Wellenlängen graphisch interpoliert. Der geschätzte mittlere Fehler beträgt bei λ 2300 etwa 0,01 Å und bei λ 2900 etwa 0,03 Å.

Zwischen 5590 und 6120 Å wurde nur das Bogenspektrum in der zweiten Ordnung des großen Gitters gegen Eisen gemessen und später mit Freds Wellenlängen korrigiert. Durch Vorschaltung eines Gelbfilters während der Aufnahme war das Spektrum der dritten Ordnung unterdrückt worden. Der mittlere Fehler beträgt hier infolge größerer Spaltweite und geringerer Schärfe der Bogenlinien 0,015 Å. *Von 6100 bis 7500 Å* wurde eine Reihe Aufnahmen des Bogens gemacht in der ersten Ordnung eines kleineren Gitters ($R = 2\text{ m}$) in der Paschen-Rungeschen Aufstellung unter Verwendung eines Filters zur Ausschaltung höherer Ordnungen. Diese Aufnahmen wurden gegen Freds dreistellige Wellenlängen, hauptsächlich Th I, ausgemessen. Die umgekehrte Dispersion ist 8,8 Å/mm, der mittlere Fehler in diesem Gebiet wird auf 0,03 Å geschätzt.

Endlich wurde in der ersten Ordnung dieser Gitteraufstellung unter Verwendung eines Glasfilters im Gebiete 4690—5460 Å das Spektrum des Abreißbogens, und *zwischen 5460 und 5590 Å* das Spektrum des Bogens aufgenommen. Die Ausmessung lieferte eine große Anzahl von neuen Linien, die mit dem großen Gitter entweder zu schwach auf die Platte gekommen waren oder wegen Koinzidenz mit einer Linie der dritten Ordnung aus den ersten Messungen gestrichen worden waren. Der mittlere Fehler der neuen Wellenlängen beträgt ebenfalls 0,03 Å.

Zeeman-Effekt. Im Anschluß an die Wellenlängenmessungen mit dem großen Gitter wurden die Aufspaltungen im magnetischen Felde so vollständig wie möglich gemessen, auch wenn durch mehrfache Überlappungen nur einseitige oder asymmetrische Zeeman-Aufspaltungen meßbar waren. Zur Entzerrung dieser Gebilde wurden dann die absoluten Wellenlängen ohne Feld herangezogen. Die neugewonnenen Ergebnisse erwiesen sich später als unentbehrlich bei der Feststellung und Bestätigung neuer Terme, insbesondere schwach kombinierender Dubletterme.

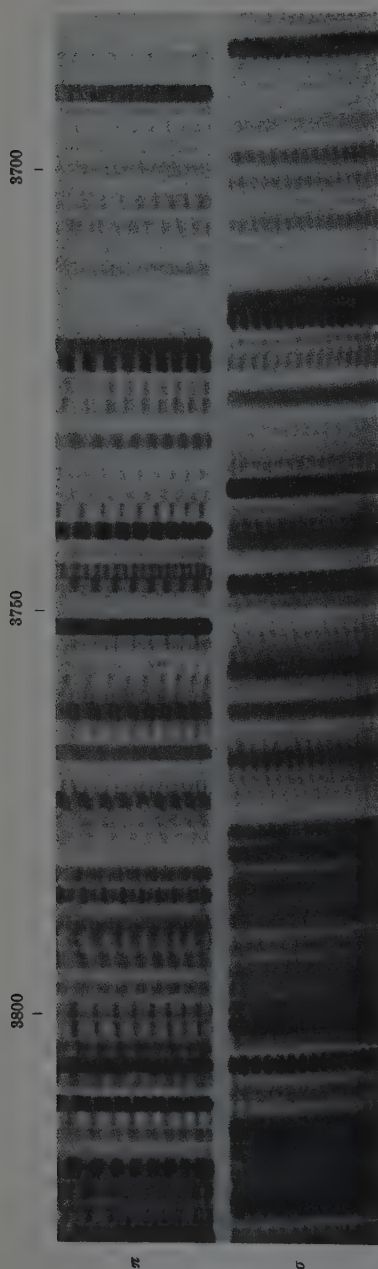


Fig. 2. Ausschnitt aus dem Th-Spektrum, photographiert in einem magnetischen Felde von 33000 Oersted mit Hilfe der Interferenzmethode; π - und σ -Polarisation gleichzeitig aufgenommen mittels Diaphragma gemäß Fig. 1.

Im Gebiete 3700—7500 Å wurden nach der früher beschriebenen Interferenzmethode neue Aufnahmen des Zeeman-Effektes in Feldern bis zu 34000 Oersted gemacht. Dazu wurde die



Fig. 1. Doppelspaltadiaphragma zur gleichzeitigen Aufnahme der π - und σ -Polarisation.

Quarz-Lummerplatte in Verbindung mit einem Steinheilschen Dreiprismenapparat benutzt. Zur Erzeugung des Feldes diente ein Hartmann-Braunscher Elektromagnet mit Wasserkühlung der Eisenkerne, der unter Verwendung von Ferrokobalt-Polspitzen bei 5 mm Luftstrecke und 12 mm Polflächendurchmesser ein konstantes Feld von 34000 Oersted liefern kann. Mit Hilfe eines Diaphragmas gemäß der Fig. 1 konnten die π - und die σ -polarisierten Bilder gleichzeitig photographiert werden. Der Spalt des Spektrographen wurde weit geöffnet und das

Diaphragma vorgeschoben. Der Horizontalabstand der beiden festen rechteckigen Öffnungen ist dem Abstand der Vertikalen π - und σ -Bilder angepaßt; dieser Abstand wird von der Dicke der benutzten Kalkspatplatte und der Vergrößerung der abgebildeten Öffnung bestimmt und

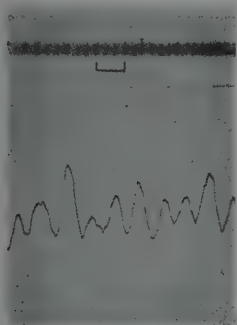


Fig. 3.
 λ 3001,268 π bei $H = 22870$ g.
 Aufnahme mit Lummerplatte.

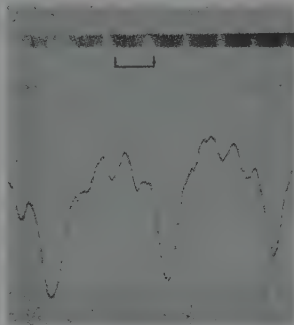


Fig. 4.
 λ 3028,577 π bei $H = 5970$ g.
 Aufnahme mit Lummerplatte.

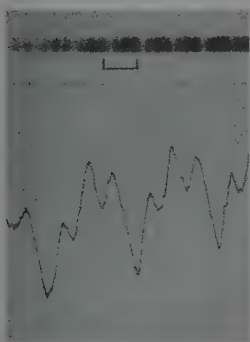


Fig. 5.
 λ 3117,68 σ bei $H = 11960$ g.
 Aufnahme mit Lummerplatte.

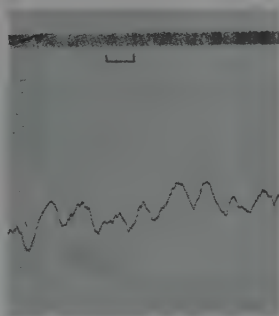


Fig. 6.
 λ 3146,040 π bei $H = 22870$ g.
 Aufnahme mit Lummerplatte.

kann so klein gemacht werden, daß die beiden Spektren praktisch gleichzeitig scharf sind. Die Fig. 2 zeigt eine solche Aufnahme.

Es zeigte sich, daß die Gitteraufnahmen der dritten Ordnung in diesem Gebiet in Auflösung nur wenig hinter den interferometrischen zurückstehen; während sie viel bequemer auszumessen sind und auch die Messung schwächerer Linien ermöglichen, die infolge der kleineren

Dispersion des Prismenspektrographen zwischen den stärkeren nicht sichtbar sind. Im längerwelligen Gebiet aber ist die interferometrische Aufstellung dem Gitter in Intensität und Auflösung bestimmt überlegen. Es wurden die neuen Aufnahmen nur in bestimmten Zweifelfällen und

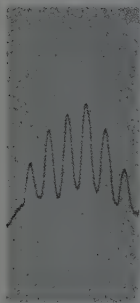
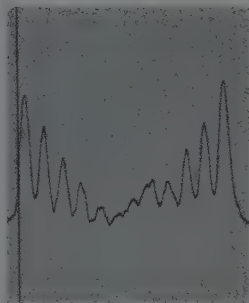
 π  σ

Fig. 7.

 λ 3976,418 bei $H = 37380$ Å.

Photogramm einer Gitteraufnahme.

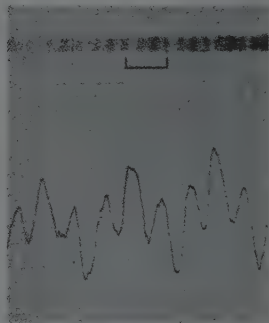


Fig. 8.

 λ 4069,204 π bei $H = 38580$ Å.

Aufnahme mit Lummerplatte.

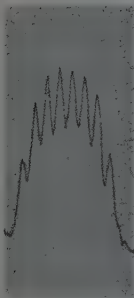
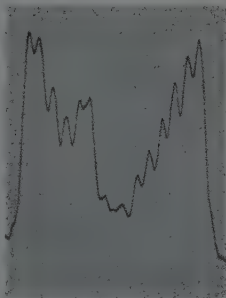
 π  σ

Fig. 9.

 λ 4282,039 bei $H = 38060$ Å.

Photogramm einer Gitteraufnahme.

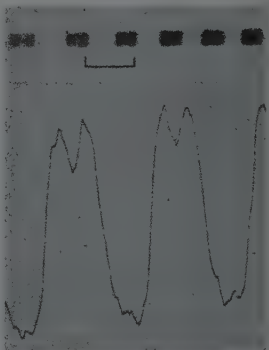


Fig. 10.

 λ 4381,859 π bei $H = 38580$ Å.

Aufnahme mit Lummerplatte.

zur Kontrolle herangezogen, so daß den g -Werten der Terme nicht dieselbe Genauigkeit beigegeben werden kann wie in unserer Th III-Arbeit.

Die älteren interferometrischen Aufnahmen im Gebiete 2460 bis 3470 Å wurden jedoch völlig ausgewertet; die Lummer-Platte läßt hier

das Gitter in Intensität und Auflösung weit hinter sich. Für die Auswertung der Interferenzbilder verweisen wir auf die in der Th III-Arbeit beschriebenen Methoden.

Die Fig. 3 bis 10 zeigen einige charakteristische Zeeman-Aufspaltungen im Th II-Spektrum mit den entsprechenden Photogrammen; sie sind schärfer als die Th III-Linien unter sonst gleichen Bedingungen. Die betreffenden Linien sind alle im System *A* klassifiziert worden¹⁾.

2. Theoretische Überlegungen und Analyse des Spektrums.

Nach der Theorie gewinnen wir die Terme des Th II, indem wir den Konfigurationen des Th III ein Elektron hinzufügen. Aus den Konfigurationen $5f\,7s$, $5f\,6d$, $5f^2$, $5f\,7p$, $6d\,7s$, $6d^2$, $6d\,7p$ und $7p\,7s$ entstehen durch Hinzufügen eines $7s$ -Elektrons die Konfigurationen $5f\,7s^2$, $5f\,6d\,7s$, $5f^2\,7s$, $5f\,7p\,7s$, $6d\,7s^2$, $6d^2\,7s$, $6d\,7p\,7s$ und $7p\,7s^2$, aus $5f\,6d$, $5f^2$, $6d^2$ durch Hinzufügen eines $6d$ -Elektrons $5f\,6d^2$, $5f^2\,6d$, $6d^3$, aus $5f\,6d$, $5f^2$, $6d^2$ durch Hinzufügen eines $7p$ -Elektrons $5f\,6d\,7p$, $5f^2\,7p$, $6d^2\,7p$.

Ähnlich wie im Th III-Spektrum zwei Termsysteme zu unterscheiden sind, nämlich das der $5f$ -Elektronen und das der $6d$ -Elektronen, werden auch die Th II-Terme entsprechend ihrer Entstehungsweise zwei verschiedenen Systemen angehören, deren relative Lage im Spektrum zunächst noch fraglich sein wird und die wir in folgendem mit *A* bzw. *B* bezeichnen wollen. Tatsächlich gelang es zwei solche Systeme aufzubauen, von denen wir das System *A* in dieser Arbeit veröffentlichen, während die Beschreibung des Systems *B* einer zweiten Arbeit vorbehalten bleibt.

In Tabelle I geben wir eine Übersicht über die nach obenstehendem, im System *A* zu erwartenden Terme. Es ist zu beachten, daß es zweierlei Art von Dubletts gibt, denn durch Hinzufügen eines Elektrons zu einem Tripletterm des Th III entstehen Quartett- und Dubletterme des Th II, während aus einem Singulettterm des Th III wieder Dubletterme des Th II hervorgehen, deren Aufspaltungen nur durch den Unterschied in Bindungsenergie des zugefügten Elektrons in seinen zwei möglichen Lagen bestimmt werden und daher im allgemeinen kleiner sein werden als die Aufspaltungen der ersten Dubletts. Wir sprechen daher von „weiten“ und „schmalen“ Dubletts; wo Zweideutigkeiten auftreten

¹⁾ Die Veröffentlichung des ausführlichen Zahlenmaterials erfolgt später. Bis dahin sind die Verfasser bereit, ein Schreibmaschinenexemplar der Tabellen interessierten Fachkollegen leihweise zur Verfügung zu stellen.

Tabelle 1. Theoretische Terme A.

Konfiguration	Abkürzung	Terme	Anzahl	Σl	Parität
$5f7s^2$	fs^2	2F	2	3	ungerade
$5f6d7s$	fds	$^{4,2}(H, G, F, D, P)$ $^2(H, G, F, D, P)^*$	39	5	
$5f6d^2$	fd^2	$^{4,2}(I, H, G, F, D, P, S; G, F, D)$ $^2(K, I, H, G, F, D, P; H, G, F, D, P; F)^*$	81	7	
$5f^27s$	f^2s	$^{4,2}(H, F, P)$ $^2(I, G, D, S)$	24	6	
$5f^26d$	f^2d	$^{4,2}(K, I, H, G, F; H, G, F, D, P; F, D, P)$ $^2(L, K, I, H, G; I, H, G, F, D; G, F, D, P, S; D)^*$	107	8	gerade
$5f7p7s$	fps	$^{4,2}(G, F, D)$ $^2(G, F, D)^*$	24	4	
$5f6d7p$	fdp	$^{4,2}(I, H, G, F, D; H, G, F, D, P; G, F, D, P, S)$ $^2(I, H, G, F, D; H, G, F, D, P; G, F, D, P, S)^*$	113	6	

würden (z. B. in der fds -Konfiguration), sind die Dubletterme zweiter Art in der Tabelle mit einem Stern versehen.

Die Tabelle 2 gibt die bisher im System A gefundenen Terme in cm^{-1} , bezogen auf $fs^2\ ^2F_{5/2} = 0$. Während die Identifizierung der ungeraden Terme auf Grund der g -Werte und der Lagen der entsprechenden Th III-Niveaus meistens eindeutig möglich ist, ist die Natur der geraden Terme außerordentlich schwierig zu bestimmen und meistens nicht eindeutig bekannt.

3. Bemerkungen über den Aufbau des Systems A.

In der fs^2 -Konfiguration ist der Dublettabstand gleich $3888,59\ \text{cm}^{-1}$; er bedeutet eine Stütze für die von uns aus der fp -Konfiguration des Th III berechneten 2F -Aufspaltung des Th IV.

In der fds -Konfiguration ist die ausgeprägte J - J -Kopplung des s -Elektrons charakteristisch. Insbesondere beim $^{2,4}H$, $^{2,4}G$, $^{2,4}F$ ist sie deutlich, wie aus der Fig. 11 hervorgeht, wo die Lagen dieser Niveaus in Beziehung zu den $^{3,1}G$ -, H - und F -Termen des Th III gebracht worden sind. Die Aufklärung dieses Sachverhalts und die Auffindung des $^4H_{13/2}$ und anderer Niveaus wurden sehr gefördert, nachdem in den Spektren des Nd I und Nd II, deren Analyse in unserem Institut teilweise ausgearbeitet wurde, aber noch unveröffentlicht blieb, jene Beziehung zum ersten Male angetroffen worden war. Bemerkenswert ist der weit vom normalen Wert abweichende g -Faktor des $^2F_{5/2}$. Das Quartettssystem ist bis auf die Niveaus $^4P_{3/2}$ und $^4P_{1/2}$ vollständig.

Tabelle 2. Beobachtete Terme A.

Elektronen	Term	Nummer	Wert	J	g	Elektronen	Term	Nummer	Wert	J	g
$f s^2$	2F	1	0,00	$5/2$	0,87	$f d^2$	4H	34	13280,81	$11/2$	1,10
$f d s$	4H	2	1678,08	$7/2$	0,71	$f d^2$	4I	35	14326,64	$13/2$	1,10
$f d s$	4F	3	2201,10	$3/2$	0,51	$f d^2$	4H	36	15422,08	$13/2$	1,16
$f d s$	4H	4	2209,93	$9/2$	1,01						
$f d s$	2F	5	2841,22	$5/2$	1,07						
$f s^2$	2F	6	3888,59	$7/2$	1,14	$f p s$	4G	101	21998,35	$5/2$	0,78
$f d s$	$^2G^*$	7	4712,01	$7/2$	0,94	$f p s$	4G	102	23271,99	$3/2$	0,47
$f d s$	$^2G^*$	8	4747,75	$9/2$	1,08			103	22766,90	$7/2$	1,05
$f d s$	4G	9	5095,15	$5/2$	0,61			104	23103,70	$3/2$	0,96
$f d s$	4F	10	5230,00	$7/2$	1,18			105	23140,93	$3/2$	0,63
$f d s$	4H	11	5698,81	$11/2$	1,12			106	23520,92	$5/2$	0,70
$f d s$	2H	12	6081,80	$9/2$	0,94	$f p s$	4F	107	24333,31	$5/2$	1,00
$f d s$	2F	13	6182,86	$5/2$	1,10	$f p s$		108	24855,64	$5/2$	0,94
$f d s$	4G	14	6626,30	$7/2$	0,97			109	25024,89	$9/2$	1,02
$f d s$	$^2D^*$	15	7086,16	$3/2$	0,83			110	25383,68	$7/2$	1,10
$f d s$	4D	16	7235,20	$1/2$	0,26			111	25962,43	$9/2$	1,04
$f d^2$	4H	17	7995,42	$7/2$	0,84	$f p s$	4F	112	26389,16	$7/2$	1,21
$f d s$	4F	18	7998,02	$9/2$	1,25			113	26769,06	$5/2$	0,80
$f d s$	4D	19	8412,16	$3/2$	1,15			114	27383,93	$5/2$	0,97
$f d s$	4H	20	8916,15	$13/2$	1,20	$f p s$	4F	115	27282,80	$9/2$	1,24
$f d s$	4G	21	8978,69	$9/2$	1,18			116	28086,47	$7/2$	1,03
$f d s$	2F	22	9328,07	$7/2$	1,15			117	28245,95	$7/2$	0,90
$f d^2$	4I	23	9785,29	$9/2$	0,80			118	28469,25	$3/2$	0,85
$f d s$	2H	24	9994,03	$11/2$	1,08			119	28719,11	$7/2$	1,08
$f d s$	4D	25	10055,29	$5/2$	1,34	$f d p$	4H	120	28894,17	$9/2$	1,14
$f d s$	2G	26	10300,80	$7/2$	0,88			121	29146,97	$7/2$	0,82
$f d^2$	4H	27	10752,61	$9/2$	1,00			122	29240,64	$5/2$	1,03
$f d s$	4G	28	10859,62	$11/2$	1,27			123	29529,01	$3/2$	0,83
$f d s$	4D	29	10962,78	$7/2$	1,30			124	29684,25	$5/2$	1,00
		30	11542,89	$5/2$	1,07			125	30053,32	$5/2$	1,00
		31	12074,34	$11/2$	0,98			126	30063,67	$9/2$	1,06
$f d^2$	4I	32	12781,94	$9/2$	1,05			127	30171,46	$11/2$	1,00
$f d s$	2G	33	12970,41	$5/2$	1,51			128	30236,28	$7/2$	0,95

Tabelle 2 (Fortsetzung).

Elektronen	Term	Nummer	Wert	J	g	Elektronen	Term	Nummer	Wert	J	g
$f d p$	$^4 I$	129	30531,10	$3/2$	1,06	$f d p$	$^4 G$	162	35062,01	$9/2$	1,08
		130	30965,91	$9/2$	1,09			163	35210,24	$5/2$	1,10
		131	31034,90	$11/2$	1,01			164	35448,93	$11/2$	1,11
		132	31055,38	$9/2$	0,82			165	35405,12	$9/2$	1,03
		133	31251,07	$5/2$	0,96			166	35877,16	$9/2$	1,20
		134	31388,61	$7/2$	1,00			167	35921,28	$7/2$	1,10
		135	31575,51	$5/2$	0,88			168	36084,49	$11/2$	1,12
		136	31635,06	$9/2$	1,04			169	36154,15	$5/2$	0,87
		137	32319,03	$7/2$	1,02			170	36234,50	$13/2$	1,10
		138	32573,04	$9/2$	1,02			171	36433,36	$5/2$	0,97
$f d p$	$^4 H$	139	32787,12	$7/2$	0,88	$f d p$	$^4 I$	172	36556,96	$5/2$	1,10
		140	32975,20	$5/2$	1,02			173	36608,79	$15/2$	1,17
		141	33297,63	$7/2$	1,05			174	36733,33	$11/2$	1,11
		142	33051,90	$3/2$	1,00			175	36997,91	$7/2$	1,00
		143	33072,02	$11/2$	1,00			176	37198,21	$7/2$	0,93
		144	33331,77	$3/2$	1,15			177	37419,05	$9/2$	1,11
		145	33454,82	$5/2$	0,92			178	37656,26	$11/2$	1,15
		146	33614,88	$5/2$	1,19			179	37709,98	$9/2$	1,08
		147	33675,06	$7/2$	0,98			180	37861,91	$5/2$	1,17
		148	33689,67	$9/2$	0,97			181	38028,67	$7/2$	1,10
$f d p$	$^4 I$	149	33801,55	$7/2$	0,95	$f d p$	$^4 G$	182	38154,65	$13/2$	1,10
		150	33881,74	$3/2$	1,18			183	38465,58	$9/2$	1,14
		151	33899,09	$7/2$	1,10			184	38636,95	$11/2$	1,03
		152	34027,75	$13/2$	1,09			185	38737,73	$5/2$	1,14
		153	34238,47	$5/2$	1,27			186	39317,27	$3/2$	1,21
		154	34266,94	$3/2$	0,94			187	39318,95	$9/2$	1,11
		155	34345,99	$3/2$	1,02			188	39687,04	$11/2$	1,12
		156	34372,50	$11/2$	1,06			189	39898,58	$5/2$	1,19
		157	34373,61	$5/2$	0,98			190	40317,82	$7/2$	1,10
		158	34376,92	$1/2$	0,96			191	40636,00	$9/2$	1,21
$f d p$	$^4 H$	159	34578,45	$7/2$	1,13	$f d p$		192	41244,80	$11/2$	1,13
		160	34660,41	$3/2$	0,75			193	41888,60	$13/2$	1,13
		161	34968,06	$7/2$	1,00			194	42412,46	$5/2$	1,13

wurden zuerst gefunden und nicht sogleich als fd^2 -Terme erkannt. Die Auffindung der 4H -Niveaus in der Anordnung, wie es die Theorie verlangt, läßt aber keinen Zweifel darüber bestehen, daß hier die fd^2 -Konfiguration ihren Anfang nimmt.

fps-Konfiguration. Die Verwandtschaft zwischen einigen geraden Termen und der fp -Konfiguration des Th III ermöglicht es uns, die Terme A 101, 103, 106, 107, 112 und 115 als fps ${}^4G_{5/2}$, ${}^4G_{7/2}$, ${}^4F_{3/2}$, ${}^4F_{5/2}$, ${}^4F_{7/2}$ und ${}^4F_{9/2}$ zu deuten. Der Abstand der Schwerpunkte der beiden tiefsten G - und F -Niveaus ist 1571 cm^{-1} , während der entsprechende Abstand ${}^3G_3 - {}^3F_2$ im Th III-Spektrum gleich 1434 cm^{-1} ist; die Multipletts, welche die genannten Terme mit den Grundniveaus bilden, zeigen normale Intensitäten. Infolge der Störung durch die f^2d - und fdp -Termgruppen wird es nicht leicht sein, weitere Multiplettstrukturen zu erkennen. Die f^2d -Konfiguration wird sich wahrscheinlich über die ganze Länge der fps -Termgruppe erstrecken. Das Ende der fps -Konfiguration werden vielleicht die Niveaus A 160 und A 163 bilden, die stark mit der fs^2 2F kombinieren und deshalb als fps ${}^2D_{3/2, 5/2}^*$ aufgefaßt werden können.

fdp-Konfiguration. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß ebenso wie in der fd^2 -Termgruppe, nicht das 4I , sondern ein Quartettsystem mit kleinerem L -Wert am tiefsten liegt. Jedenfalls liegt ein Niveau mit dem Charakter eines ${}^4H_{7/2}$ unterhalb dem 4I , nämlich A 121; es gelingt nun unschwer, die zugehörigen 4H -Niveaus zu identifizieren.

Amsterdam, Zeeman-Laboratorium der Universität, Januar 1943.

Negative Ionen in Braunschen Röhren und ihr Zusammenhang mit dem Oxydkathoden-Mechanismus.*)

Von H. Schaefer und W. Walcher in Göttingen.

Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 9. April 1943.)

Der von Oxydkathoden ausgehende negative Ionenstrahl wurde massenspektroskopisch analysiert und ein Vergleich der Ionenkomponenten verschiedenartiger Kathoden vorgenommen. Bei der Oxydkathode treten am intensivsten die H^- , CH^- , OH^- , O_2^- und die Cl^- -Ionen auf; daneben wurden noch 11 schwächere Ionenarten beobachtet. Aus der Schärfe der mit den negativen Ionen erzeugbaren Abbildungen wurde gefolgert, daß die Ionen einen einheitlichen Entstehungsort haben. Als solcher wurde für die meisten Ionen die Kathodensubstanz ermittelt, einzig für die OH^- -Ionen kommt als Herkunftsort nicht nur die Kathodensubstanz, sondern auch der Gasraum in Frage, indem OH_2 -Moleküle aus dem Gasraum auf die Kathodenoberfläche geraten und von dort als negative OH^- -Ionen wieder emittiert werden. — Der Zusammenhang zwischen der O_2^- -Emission und der Elektronenemission der Kathode wurde während der Aktivierung untersucht und durch eine Vorstellung vom Formierprozeß gedeutet: Danach besteht die Aktivierung der Kathode darin, daß Ba^+ -Ionen auf Grund der thermischen Dissoziation im BaO ihren regulären Platz im BaO -Gitter verlassen und an bevorzugten Stellen adsorbiert werden, wodurch sie den Charakter einer elektronenliefernden „Störstelle“ annehmen. — Es wurden ferner Annahmen über den Transport der negativen Ionen vom Herkunftsort in der Kathodensubstanz bis zur Kathodenoberfläche gemacht: Während die O^- , OH^- , Cl^- -Ionen durch die BaO -Kristallite hindurch zur Kathodenoberfläche wandern, muß für die CH^- - und die C_2^- -Ionen auf Grund ihres Verhaltens eine Oberflächenwanderung längs der Kristallit-Grenzflächen zur Kathodenoberfläche angenommen werden.

1. Einleitung.

In Braunschen Röhren mit Oxydkathoden tritt neben dem bildschreibenden Elektronenstrahl auch ein schwacher negativer Ionenstrahl auf, welcher durch eine *elektrische* Elektronenoptik genau so fokussiert wird wie der Elektronenstrahl. Die heute bei Braunschen Röhren oft verwendeten magnetischen Ablenkspulen lassen den Ionenstrahl infolge seiner höheren Teilchenmasse praktisch unbeeinflusst, so daß die Ionen stets auf die Mitte des Leuchtschirms treffen und dort eine vorzeitige Zerstörung der Leuchtsubstanz hervorrufen.

Eine qualitative Massenanalyse des Ionenstrahls liegt bereits in einer Arbeit von Bachmann und Carnahan¹⁾ vor; diese verwendeten

*) D 7.

¹⁾ C. H. Bachmann u. C. W. Carnahan, Proc. Inst. Rad. Eng. 25, 5, 1938; siehe auch M. v. Ardenne, Arch. f. Elektrot. 29, 731, 1935; M. Bartels u. K. Diels, Vortrag Deutscher Physiker und Mathematikertag 1936.

eine von der Pumpe abgeschmolzene Bildschreibröhre und brachten an Stelle der Ablenkelemente ein konstantes Magnetfeld an, von solcher Größe, daß der im Leuchtschirm fokussierte Ionenstrahl in seine Komponenten zerlegt wurde. Die negativen H-Ionen kamen dabei ungefähr auf den Rand des Leuchtschirmes. An den Auftreffstellen der einzelnen Ionenkomponenten wurde der Leuchtschirm zerstört, sodaß die zerstörten Stellen bei nachfolgender homogener Ausleuchtung des Schirmes mit Elektronen sichtbar gemacht und photographiert werden konnten.

Dieses Verfahren hatte den Nachteil, daß weder die Intensitäten der einzelnen Komponenten gemessen, noch deren zeitliches Verhalten laufend verfolgt werden konnten.

Um die Herkunft und den Entstehungsmechanismus der Ionen — und damit ihre eventuelle Vermeidbarkeit — erschließen zu können, ist es notwendig, die Intensität der einzelnen Ionenstrahlkomponenten, deren zeitliches Verhalten, sowie ihre Abhängigkeit von äußeren Einflüssen zu untersuchen. Zur Klärung dieser Fragen wurde die vorliegende Arbeit unternommen.

2. Versuchsanordnung.

Die in Fig. 1 schematisch dargestellte Apparatur besteht aus drei Teilen:

1. Der Elektronenoptik, welche außer den Elektronen den zu untersuchenden schwachen Ionenstrahl liefert;
2. der magnetischen Zylinderlinse, in welcher die Ionen abgelenkt und zugleich fokussiert werden (aus dem Magnetstrom der Linse, welcher zur Ablenkung der jeweiligen Komponente um den vorgegebenen Winkel von 48° erforderlich ist, wird deren Teilchenmasse ermittelt);
3. der Meßanordnung, in welcher die im Faraday-Käfig aufgefangenen Ionen einer bestimmten Masse registriert und ihre Intensitäten gemessen werden.

Die Untersuchung wurde an einer Elektronenoptik vorgenommen, wie sie für Bildschreibröhren gebräuchlich ist. Eine derartige Optik besteht aus einer Elektronenquelle und mehreren Elektroden, welche die Elektronen beschleunigen und zu einem Strahl vereinigen. Durch geeignete geometrische Anordnung der Elektroden und durch geeignete Wahl der Potentiale läßt sich der Elektronenstrahl derart bündeln, daß er nach Verlassen der Optik in einem vorgegebenen Abstände, z. B. auf

dem Leuchtschirm einer Bildröhre, einen kleinsten Querschnitt einnimmt. In diesem kleinsten Querschnitt vereinigen sich außer den Elektronen auch die eventuell von der Elektronenquelle ausgehenden

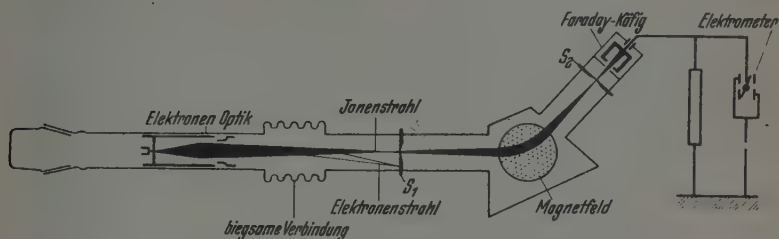


Fig. 1. Schema der Versuchsanordnung.

negativen Ionen, da sie beim Durchlaufen des elektrischen Beschleunigungsfeldes die gleiche kinetische Energie wie die Elektronen bekommen haben und daher — trotz anderer Masse — die gleichen Bahnen durchlaufen.

Fig. 2 zeigt das Schema der Optik, welche für die Mehrzahl unserer Versuche mit einer technisch üblichen Kathode aus BaO- und SrO-Gemischen als Elektronenquelle ausgestattet war. Die gesamte Beschleunigungsspannung zwischen der Kathode und der geerdeten

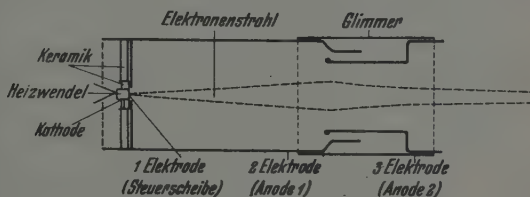


Fig. 2. Schema der Elektronenoptik.

Elektrode 3 beträgt 7400 Volt. Die Elektrode 1 liegt auf dem Potential der Kathode; die Elektrode 2 liegt gegen Kathode auf etwa + 900 Volt. Die Brennweite der Optik ist verstellbar durch Veränderung der Spannung an Elektrode 2.

Die Optik ist auf ein Schliffrohr montiert, ihre Achse kann mit Hilfe eines biegsamen Tombak-Schlauches auf den Eintrittsspalt S_1 des magnetischen Massenspektrometers gerichtet werden¹⁾.

¹⁾ Wie später mitgeteilt wird, haben die Ionen alle die gleiche kinetische Energie, deshalb genügt zur Analyse ein Magnetfeld allein.

Am Ort des Eintrittsspaltess konzentrieren wir den Ionenstrahl mit Hilfe der Elektrode 2 auf einen Querschnitt von etwa 2 mm Durchmesser, während der Elektronenstrahl durch einen in der Nähe aufgestellten schwachen Permanentmagneten so weit abgelenkt wird, daß er nicht mit auf den 1 mm breiten Eintrittsspalt trifft.

Ionen gleicher Masse und gleicher Geschwindigkeit, die unter verschiedenen Winkeln den Eintrittsspalt passieren, werden nach Durchlaufen des magnetischen Ablenkfeldes wieder in einem kleinsten Querschnitt vereinigt, und zwar infolge der richtungsfokussierenden Eigenschaft des Magnetfeldes. Voraussetzung allerdings ist, daß die Strahlen nur wenig gegen die optische Achse geneigt sind. Diese Voraussetzung ist für unsere Strahlen auch ohne vorherige Richtungsablenkung erfüllt wegen der relativ großen Entfernung der Elektronenoptik vom Eintrittsspalt. Legen wir in der Optik einen weitesten Strahlquerschnitt von 5 mm zugrunde, so beträgt die Apertur des Bündels $\alpha \approx 1^\circ$.

Der Wiedervereinigungsort (Bildort) der Ionen hängt¹⁾ von der Größe des im Felde durchlaufenen Ablenk winkels und von der Lage ihres Ausgangspunktes ab. Der Ausgangsort (Gegenstandsort) ist in unserem Fall der Eintrittsspalt.

Die Wahl des zu verwendenden Ablenk winkels richtete sich bei der Konstruktion des Massenspektrometers nach der Größe und Ausdehnung des maximal erzeugbaren Magnetfeldes sowie nach der Masse der schwersten zu untersuchenden Teilchen²⁾. Für eine Gegenstands- und Bildweite von je 8 cm (Abbildungsmaßstab 1 : 1) wurde ein Ablenk winkel von 48° und 40 Minuten errechnet, entsprechend einem Krümmungsradius von 8,85 cm. Dieser Ablenk winkel konnte mit dem benutzten Elektromagneten und einer Beschleunigungsspannung von 8 kV nur für Ionen bis zur Masse 85 (Rb) erreicht werden. Schwerere Teilchen konnten nur dann erfaßt werden, wenn die Beschleunigungsspannung der Elektronenoptik erniedrigt wurde.

Der Magnetstrom, welcher notwendig ist, um ein Ion vom Eintrittsspalt S_1 auf den Austrittsspalt S_2 abzulenken, bildet ein Maß für dessen Masse. Die Beziehung zwischen der Teilchenmasse und dem zugehörigen Magnetstrom wurde durch Eichung mit bekannten Massen aus einer

¹⁾ R. Herzog, ZS. f. Phys. 89, 447, 1934. — ²⁾ Es stand ein Elektromagnet zur Verfügung, welcher bei einem Polschuhabstand von 1 cm und einem Polschuhdurchmesser von 8 cm ein Magnetfeld von 1500 Gauß zu erzeugen gestattete.

Alkali-Ionenquelle¹⁾ gefunden und ergab die Eichkurve der Anordnung (Fig. 3). Da es nur auf die Identifizierung der Ionen, also auf die Bestimmung ganzzahliger Massen ankam, wurden Ein- und Austrittsspalt aus Intensitätsgründen möglichst weit gemacht (1 mm). Es war dann im Gebiet der Masse 85 immer noch eine Unterscheidung von $\frac{1}{5}$ Masseneinheit möglich.

Nach Verlassen des Austrittsspalt werden die Ionen von einem Faraday-Käfig aufgefangen, welcher durch Potentialblenden gegen

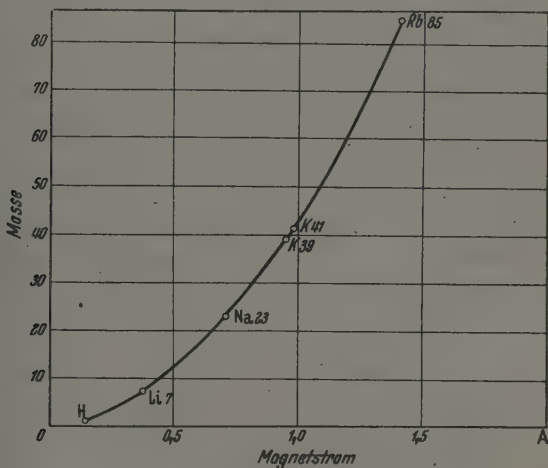


Fig. 3. Eichkurve des Massenspektrometers.

Sekundär-Elektronenverluste geschützt ist. Die Messung der Ionenströme erfolgte elektrometrisch mit einem Lindemann-Elektrometer mit Hilfe von Ableitwiderständen von 10^{10} bis 10^{12} Ohm. Die Meßgrenze der Anordnung lag bei 10^{-13} Amp.

Die im Massenspektrometer gemessenen Ionenströme sind kleiner als die wirkliche Ionenemission der Kathode, weil ein Teil der Ionen in der Optik und auf den Blenden verlorengeht. Durch Versuche mit Elektronen wurde festgestellt, daß die wirkliche Ionenemission an der Kathode etwa viermal so groß war als der im Faraday-Käfig gemessene Ionenstrom.

¹⁾ Verwendet wurde eine nach dem von J. Koch (ZS. f. Phys. 100, 669, 1936) angegebenen Herstellungsverfahren aufgebaute Anode, in welche die Chloride sämtlicher Alkalien eingefügt wurden. Außer den Alkaliionen trat auch das positive H-Ion mit auf.

3. Die Massenanalyse des Ionenstrahls von verschiedenen Kathoden.

Um festzustellen, ob die Ionen charakteristische Begleiterscheinungen einer bestimmten Kathodenart sind, oder ob sie unabhängig von der speziellen Kathodenart auftreten, wurden die Ionenkomponenten einer Paste-Kathode, einer Bariumacid-Kathode und einer Wolfram-Haarnadel-Kathode bestimmt. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 1 mit denen von Bachmann und Carnahan zusammen aufgeschrieben. Neben den auftretenden Ionenarten interessieren insbesondere ihre relativen Intensitäten. Da dieselben je nach Betriebsbedingung und je nach Zustand der Kathode variieren, wurden nicht die gemessenen Zahlen, sondern nur Intensitätsgrade angegeben.

Besonderes Interesse beansprucht wegen ihrer technischen Wichtigkeit die Paste-Kathode; für diese ist daher neben den an Hand der

Tabelle 1. Die Ionenkomponenten verschiedener Kathoden.

Ionen- masse	Paste-Kathode	Acid-Kathode	Wolfram-Kathode	Bachmann und Carnahan
1	H stark	H stark	H stark	H
12				C
13	CH ₁ stark	CH ₁ stark		
14	CH ₂ stark	CH ₂ stark		
16				O oder CH ₄
17	OH stark	OH stark		
18	OH ₂ schwach	OH ₂ schwach		OH ₂
19				F
23	Na schwach			
24	C ₂ stark	C ₂ stark		
25	C ₂ H mittelstark			
26	C ₂ H ₂ mittelstark		C ₂ H ₂ schwach	C ₂ H ₂
30				NO
32	O ₂ stark	O ₂ stark	O ₂ schwach	O ₂
33	?			
34	?			
35	Cl mittelstark			Cl
37	Cl mittelstark			Cl
40	Ca schwach			Ca
42	? schwach			
43	? schwach			
48	? schwach			
56	CaO schwach			CaO
58	Ni schwach			
60	Ni schwach			
62	? schwach			
68	? schwach			
74				
101				Ca(OH) ₂
120				CaCO ₃
169				SrO ₂
261				BaO ₃
				Ba(NO ₃) ₂

Eichkurve ermittelten Ionen auch ein Beispiel ihrer Intensitäten aufgeschrieben (Fig. 4).

Ein Vergleich der eigenen Ergebnisse mit denen von Bachmann und Carnahan zeigt, daß viele Ionen übereinstimmend beobachtet wurden, nämlich die H -, OH_2 -, C_2H_2 -, O_2 -, Ca - und die CaO -Ionen. Die weitaus intensivsten Ionen der Paste-Kathode sind die H -, OH -, OH_2 -, C_2 -, O_2 - und bei einer neuen Kathode die Cl -Ionen; der Cl -Ionenstrom sinkt von anfänglich sehr hohen Werten in einigen Stunden bis

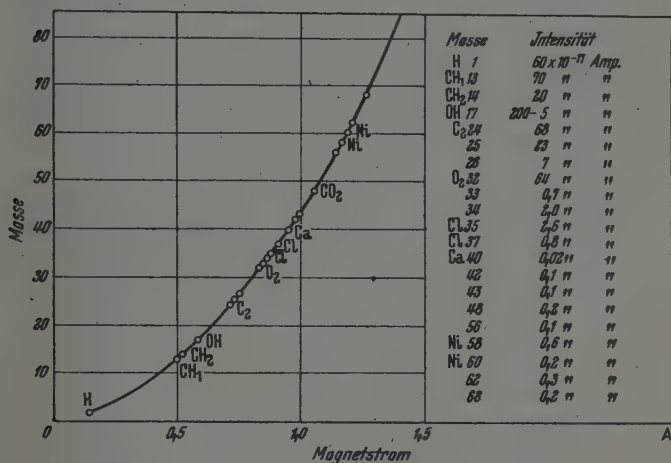


Fig. 4. Eichkurve des Massenspektrometers, eingetragen die Ionen der Oxyd-Paste-Kathode.

unter die Meßgrenze ab. Die anderen vorkommenden Ionen sind von kleinerer Größenordnung. Ni tritt nur dann im Spektrum auf, wenn die Kathode alt ist, so daß der Brennfleck die Kathodenmasse bis auf die Nickelunterlage abgetragen hat. Das Ca -Ion erscheint nur im Anfang des Kathodenbetriebes. Die in der Tabelle mit einem Fragezeichen versehenen Massen wurden beobachtet, aber infolge der reichen Auswahl an Möglichkeiten nicht identifiziert.

Die Intensitäten der von der Wolfram-Kathode ausgehenden Ionenströme sind (abgesehen vom H -Ionenstrom) etwa 100mal schwächer als die Ionenströme der Paste- und der Acid-Kathode bei gleicher Elektronenemission. Diese Beobachtung wird uns später erlauben, Schlüsse auf die Herkunft und Entstehung der Ionen zu ziehen.

4. Die Kathode als Entstehungsort der negativen Ionen.

Nach dem Durchgang durch die magnetische Linse erzeugen die Ionen gleicher Masse ein Bild des Eintrittsspaltcs, eine Masselinie. Diese ist scharf, wenn die Teilchen gleiche Geschwindigkeit haben; bei verschiedener Geschwindigkeit entsteht in der Bildebene statt der scharfen eine verbreiterte Masselinie, aus deren Form wir Rückschlüsse auf die Geschwindigkeitsverteilung ziehen können. Unsere negativen Ionen erzeugten stets scharfe Bilder, woraus zu ersehen war, daß die Teilchen homogene Geschwindigkeit hatten¹⁾. Sie haben demnach in der Optik die gleiche Potentialdifferenz durchlaufen, haben also einen einheitlichen Entstehungsort.

Bei der Frage nach der Herkunft der Ionen müssen wir unterscheiden zwischen ihrem „Entstehungsort“ und ihrem „Herkunftsort“. Unter „Entstehungsort“ verstehen wir dasjenige Gebiet, in welchem entweder durch Elektronenanlagerung an ein Molekül oder durch Dissoziation einer Ionenverbindung ein negatives Ion gebildet wird. Als Entstehungsort kommt in Frage: 1. Das Potentialminimum im Raum vor der Kathode, 2. die Kathodenoberfläche selbst, 3. das Kathodeninnere. Mit der Kenntnis dieses Entstehungsortes ist über den „Herkunftsort“ der Moleküle noch nichts ausgesagt. Als solcher kommt in Frage: a) die Kathodenumgebung bzw. die ganze Apparatur, b) die Kathodenmasse selbst. Dabei können die Moleküle entweder durch Diffusion durch die Kathodenmasse oder durch den Gasraum von ihrem Herkunftsort an ihren Ionisierungsort — den „Entstehungsort“ der negativen Ionen — gelangen.

Wir haben also folgende Möglichkeiten in Betracht zu ziehen:

1. Entstehungsort = Raum vor der Kathode.
 - a) Herkunft aus der Kathode,
 - b) Herkunft aus Kathodenumgebung und Gasraum.
2. Entstehungsort = Kathodenoberfläche.
 - a) Herkunft aus der Kathode,
 - b) Herkunft aus Kathodenumgebung und Gasraum.
3. Entstehungsort = Kathodeninneres.
 - Herkunft aus dem Kathodeninnern.

Die erste Möglichkeit der Ionenentstehung können wir zahlenmäßig abschätzen. Unter Zugrundelegung eines sehr hoch geschätzten Gas-

¹⁾ Bei einer Teilchenmasse 25 würde eine Inhomogenität der Beschleunigungsspannung von ± 10 Volt eine Verbreiterung der Masselinie um etwa $\pm 0,6$ mm, also eine deutlich erkennbare Unschärfe erzeugen.

druckes vor der Kathode von 10^{-4} mm Hg kann dort bei normaler Elektronenemission etwa 1 negatives Ion pro Sekunde durch Anlagerung eines Elektrons an ein Gasmolekül gebildet werden. Die beobachteten Teilchenströme sind aber weit größer, etwa 10^{10} Teilchen pro Sekunde. Sie können daher unmöglich von diesem Prozeß vor der Kathode her stammen, so daß wir für die weiteren Untersuchungen nur noch die Kathodenoberfläche oder die Kathode selbst als Entstehungsort in Betracht zu ziehen haben.

Zum gleichen Ergebnis führt uns der in Fig. 5 dargestellte Versuch über die zeitliche Abnahme des O_2^- -Ionenstromes. Der ausgezogene Teil

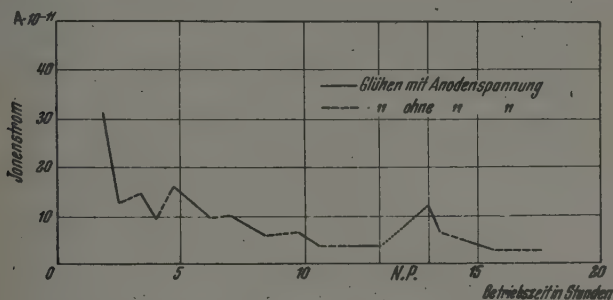


Fig. 5. Zeitliche Abnahme des O_2^- -Ionenstromes. N. P. = Nachpause.

des Linienzuges bedeutet, daß die Kathode mit angelegter Anodenspannung betrieben wurde, während im gestrichelten Teil des Linienzuges die Kathode zwar gleichmäßig weiter geheizt wurde, die Anodenspannung jedoch abgeschaltet war. Eine Abnahme des Ionenstromes findet, wie man sieht, nur bei angelegter Anodenspannung statt. Daraus schließen wir, daß die O_2 -Teilchen ihren Herkunftsort nicht als neutrale Moleküle verlassen und erst im Gasraum vor der Kathode ionisiert werden, sondern, daß sie von Anfang an negativ geladen sind und zur Emission, genau wie die Elektronen, ein elektrisches Feld benötigen, ihr *Entstehungsort* also nur die Kathodenoberfläche oder das Kathodeninnere sein kann. Mit dieser Erkenntnis haben wir noch keine Anhaltspunkte für den *Herkunftsort* der Ionen erhalten; diesen werden wir weiter unten (Ziff. 8) untersuchen.

5. Der Mechanismus der Kathode und sein Zusammenhang mit den negativen Ionenströmen.

Das Ergebnis des vorigen Abschnitts, daß die Kathode selbst der Entstehungsort der negativen Ionen ist, macht es notwendig, auf die

derzeitigen Vorstellungen vom Mechanismus der Oxydkathode einzugehen, um dann zu sehen, wie weit sich das Verhalten unserer negativen Ionen in dies Bild einpassen läßt bzw. welche neuen Annahmen wir zur Deutung unserer im folgenden mitgeteilten Meßergebnisse machen müssen.

Über die Elektronenemission und die Aktivierung von Oxydkathoden sind zahlreiche Untersuchungen angestellt worden. Es hat sich dabei herausgestellt, daß als Ursache der hohen Elektronenemission die Anwesenheit von atomarem Barium im Gitter der Kathode und auf der Oberfläche anzusehen ist. Die im Ionengitter eingebauten Bariumatome (Störstellen) — so nimmt man an — können thermisch ihr „Leuchtelektron“ abspalten. Dieses wird dabei in ein höheres Energieniveau, das sogenannte Leitfähigkeitsband des Gitters, gehoben, so daß dort je nach Zahl der eingebauten Ba-Atome und je nach Temperatur, eine gewisse Elektronendichte herrscht, welche die Leitfähigkeit des BaO-Gitters verursacht. Die oberflächlich adsorbierten Ba-Atome entsenden ihr Leuchtelektron direkt in den Außenraum. Der Ersatz der emittierten Elektronen erfolgt aus dem Innern der Kathode durch das Leitfähigkeitsband.

Das im Gitter und an der Oberfläche vorhandene überschüssige Barium entsteht bei der sog. Aktivierung aus dem BaO-Gitter, und zwar entweder durch chemische Reduktion des BaO oder durch Elektrolyse. Ein Teil des atomaren Bariums verdampft während des Kathodenbetriebes und muß fortlaufend ergänzt werden. Die Ba-Bildung der Kathode hört daher auch nach Beendigung der Aktivierung nie ganz auf und gibt während des ganzen Kathodenbetriebes Anlaß zu einer schwachen elektrolytischen Sauerstoffabscheidung.

Es liegt nun nahe, die von uns beobachteten negativen O_2 -Ionen in Zusammenhang mit dem elektrolytischen Sauerstoffstrom zu bringen; die negativen O_2 -Ionen werden nach dieser Annahme zu einer Folge der lebensnotwendigen Ba-Bildung und sind daher prinzipiell mit dem Mechanismus der Kathode verbunden. Es erhebt sich die Frage, wie weit auch die anderen Ionenströme in den Mechanismus der Kathode einzuordnen sind. Unter diesem Gesichtspunkt wären die von uns beobachteten Ionenströme einzuteilen in:

1. Ionen, die bei der Bildung von atomarem Barium frei werden und die daher notwendige Begleiterscheinungen des Kathodenmechanismus sind;

2. Ionen, die keinen Beitrag zur Ba-Bildung liefern und die daher überflüssige Begleiterscheinungen sind.

Wie die experimentelle Untersuchung ergibt, zeigen die Ionen der ersten Gruppe (dies sind O_2 , OH , Cl) und die der zweiten Gruppe (dies sind die CH - und die C_2 -Reihen) unter sich gleichartiges Verhalten, so daß die Einteilung auch experimentell gerechtfertigt erscheint.

6. Der Sauerstoff-Ionenstrom.

Nach dem soeben Dargelegten scheint der O_2 -Ionenstrom eine besondere Bedeutung unter den Ionenströmen zu besitzen. Er wurde daher vom ersten Einschalten der frisch pastierten Kathode bis zu ihrem

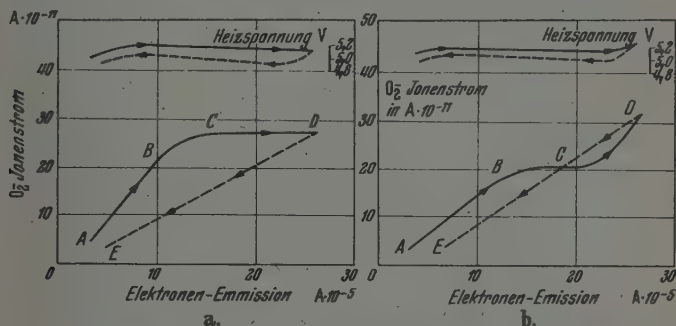


Fig. 6. Der O_2^- -Ionenstrom als Funktion des Elektronenstromes bei der ersten Inbetriebnahme der Kathode.

betriebsmäßigen Verhalten hin in allen Stufen der Aktivierung beobachtet und sein Zusammenhang mit der Elektronenemission einerseits und mit der Kathodentemperatur andererseits untersucht¹⁾.

Das Ergebnis zeigt Fig. 6. Dort ist als Abszisse der Elektronenstrom, als Ordinate der O_2 -Ionenstrom aufgetragen; im oberen Teil der Fig. 6 ist außerdem die zugehörige Heizspannungskurve, die ein Maß für die Kathodentemperatur darstellt, eingezeichnet. Es soll zunächst

¹⁾ Die Entwicklung von Sauerstoff während der Aktivierung wurde von Isensee (Heinz Isensee, ZS. f. phys. Chem. 35, 309, 1937) gemessen. Zur Erzielung einer rein elektrolytischen Aktivierung unter Vermeidung von BaO -Reduktion durch das Trägermetall verwendete Isensee Platin als Unterlage für seine Oxydpaste. Der freiwerdende Sauerstoff wurde in Abhängigkeit von der durch die Kathode gegangenen Elektrizitätsmenge bestimmt und dabei gefunden, daß der elektrolytische Strom zu Beginn der Aktivierung etwa 2% des Elektronenstromes beträgt; er sinkt während der Aktivierung unter die Meßgenauigkeit von 0,01% der von Isensee benutzten chemischen Nachweismethode ab.

Fig. 6a betrachtet werden. Angeregt durch eine anfängliche Temperaturerhöhung, steigt der Elektronenstrom zeitlich an und erreicht ohne weitere Temperaturerhöhung nach etwa 10 Minuten einen Wert von $27 \cdot 10^{-5}$ Amp.; eine darauf vorgenommene Temperaturerniedrigung regt ein zeitliches Absinken des Elektronenstromes an. Während des ersten Teiles dieses Prozesses wächst der O_2 -Ionenstrom zunächst etwa proportional mit dem Elektronenstrom an (*A* bis *B*); im weiteren Verlauf mündet er aber in einen konstanten Wert ein (*C* bis *D*). Mit abnehmendem Elektronenstrom nimmt der O_2 -Ionenstrom linear ab (*D* bis *E*). Bei erneuter Temperaturerhöhung steigt der Ionenstrom — solange die Temperaturerhöhung den vorher erreichten Höchstwert nicht überschreitet — von vornherein längs der gestrichelten Geraden *ED* an, ohne den Umweg über *B* und *C* zu machen. In Fig. 6b ist der gleiche Versuch mit einer frisch pastierten Kathode vorgenommen, jedoch wurde im Bereich *BC* eine abermalige Temperaturerhöhung vorgenommen. Diese bewirkt ein erneutes Ansteigen des O_2 -Ionenstroms, der aber bei der darauffolgenden Temperaturerniedrigung wiederum linear mit dem Elektronenstrom absinkt.

Zur Deutung des geschilderten Verhaltens wollen wir die Annahme machen, daß in dem in Fig. 6 dargestellten Emissionsbereich die Elektronenemission hauptsächlich durch die Elektronennachlieferung, also durch die Zahl der Elektronen im Leitfähigkeitsband und damit bei konstanter Temperatur durch die Störstellendichte [*S*] beherrscht wird. Ferner wollen wir annehmen, daß im BaO der Kathode eine bestimmte temperaturabhängige Konzentration [*O*⁻] an „fehlgeordneten“ und daher frei beweglichen O⁻-Ionen herrscht. Ein bestimmter Bruchteil dieser O⁻-Konzentration gelangt in der Zeiteinheit durch Elektrolyse zur Kathodenoberfläche; dort vereinigen sich die O⁻-Ionen zu O₂-Molekülen und verlassen als O₂-Ionenstrom die Kathode. Dabei ist nach einer Abschätzung die O₂-Menge, welche stündlich die Kathode verläßt, nur etwa $\frac{1}{10}$ von der im Kathodeninnern vorhandenen Konzentration an freien O⁻-Ionen.

Unter diesen Voraussetzungen können wir für die Bereiche konstanter Temperatur (Heizspannung = const. in Fig. 6) den Elektronenstrom proportional zur Störstellendichte setzen:

$$I_e = c_1 \cdot [S]; \quad (1)$$

ebenso setzen wir den O_2 -Ionenstrom proportional zur Dichte der freien Sauerstoffionen (O⁻):

$$I_i = c_2 \cdot [O^-]. \quad (2)$$

Entsprechend gilt für die zeitliche Änderung dieser Ströme:

$$dI_e/dt = c_1 \cdot d[S]/dt \quad (1a)$$

und

$$dI_i/dt = c_2 \cdot d[O^-]/dt. \quad (2a)$$

Machen wir die naheliegende Annahme, daß die Konzentration der freien O⁻-Ionen im Kathodeninnern hervorgerufen ist durch thermische Dissoziation¹⁾ von BaO in Ba⁺- und O⁻-Ionen, so entspricht einer *Zunahme* der O⁻-Ionen die *gleiche Zunahme* der Ba⁺-Ionen. Die Ba⁺-Ionen werden nun vom Augenblick der Dissoziation an durch das im Dielektrikum vorhandene elektrische Feld zur Grenzschicht BaO-Trägermetall geführt, wo sie neutralisiert werden. Sie diffundieren von dort als Atome in das Dielektrikum zurück, werden besonders an bevorzugten Stellen (inneren Rissen) adsorbiert und nehmen dadurch den Charakter einer Störstelle an. Die Zahl der durch diese Umwandlung zeitlich entstehenden Störstellen ist also proportional zur Zahl der freien Ba-Ionen:

$$d[S]/dt = a [Ba^+], \quad (3)$$

so daß, infolge der dauernd stattfindenden Umwandlung von Ba⁺-Ionen in Störstellen, die tatsächliche Zunahme der Ba⁺-Ionen kleiner ist als die Zunahme der O⁻-Ionen:

$$d[O^-]/dt = d[Ba^+]/dt + d[S]/dt. \quad (4)$$

Wir können den durch Gleichung (4) dargestellten Formiervorgang in drei aufeinanderfolgende Phasen einteilen:

In der ersten Phase (*A — B* in Fig. 6a) findet auf Grund einer vorangegangenen Temperaturerhöhung eine Einstellung des Dissoziationsgleichgewichts $BaO = Ba^+ + O^-$ statt; dabei werden sowohl die O⁻-Konzentration als auch die Ba⁺-Konzentration und damit — nach dem oben geschilderten Vorgang — die Störstellenkonzentration erhöht. Nach Gleichung (1) und (2) steigt dann sowohl der O₂⁻-Ionen- als auch der Elektronenstrom an.

¹⁾ Aus den geringen Gleichgewichtsdrucken des Sauerstoffs über dem Bariumoxyd von $p = 10^{-35}$ bis 10^{-40} mm Hg hat man geschlossen, daß eine Ba-Bildung durch thermische Dissoziation des BaO nicht vorhanden sein könne und daher die Ba-Bildung nur durch Elektrolyse stattfinde (de Boer, S. 278). Abgesehen davon, daß es schwer ist, sich eine BaO-Elektrolyse ohne vorherige thermische Dissoziation vorzustellen, kann man auch keineswegs vom geringen Sauerstoffdruck über dem BaO auf eine geringe Sauerstoffkonzentration im Inneren des BaO schließen.

In der zweiten Phase des Formiervorgangs (*C* bis *D* in Fig. 6a) hat sich das Dissoziationsgleichgewicht soweit eingestellt, daß keine Vergrößerung der O^- -Ionenkonzentration (und damit des O_2^- -Ionenstromes) mehr stattfindet, und nur noch — infolge der Langsamkeit dieses Vorgangs — die noch vorhandenen Ba^+ -Ionen in Störstellen verwandelt werden. In dieser Phase steigt also bei konstantem O_2^- -Ionenstrom der Elektronenstrom soweit an, bis im Dielektrikum alle aktiven Stellen mit Ba-Atomen besetzt sind und keine weitere Störstellenbildung mehr möglich ist.

In der dritten Phase vereinigen sich nach vorhergegangener Temperaturerniedrigung die Ba-Störstellen wieder mit den freien O^- -Ionen. Daher nehmen sowohl die Störstellenkonzentration (und damit der Elektronenstrom) als auch die O^- -Ionenkonzentration (und damit der O_2^- -Ionenstrom) proportional miteinander ab, wie die gestrichelte Gerade *D—E* zeigt¹⁾. Es können aber nicht mehr sämtliche Störstellen zurückgebildet werden, da ein kleiner Teil der O^- -Ionen inzwischen als O_2^- -Ionenstrom die Kathode verlassen hat. Dies macht sich darin bemerkbar, daß die Abstiegsgerade *D—E* nicht durch den Anfangspunkt geht, mithin der O^- -Ionenkonzentration Null noch ein bestimmter positiver Wert der Störstellenkonzentration entspricht.

Nach diesem Prozeß betrachten wir die Kathode trotz der geringen Menge an stöchiometrisch überschüssigem Barium als formiert, und zwar wegen der geschilderten Umwandlung, die darin bestand, daß Ba^+ -Ionen ihren regulären Gitterplatz verlassen und dafür an bevorzugten Stellen absorbiert werden. Auch wenn sie dort bei Abkühlung der Kathode wieder durch den anwesenden Sauerstoff zu BaO oxydiert werden, so geben sie doch infolge ihrer starken Bindung an die Unterlage bei der erneuten Inbetriebnahme der Kathode ihr O^- -Ion leicht wieder ab und treten dann — im Gegensatz zur unformierten Kathode — vom

¹⁾ Bei Erniedrigung der Kathodentemperatur wäre zu erwarten, daß zunächst die Störstellen weniger Elektronen ins Leitfähigkeitsband entsenden, so daß zunächst der Elektronenstrom bei konstantem O_2^- -Ionenstrom etwas absinken müßte. Dieser Effekt wurde nicht beobachtet, wie der lineare Verlauf von *D—E* zeigt. Wir schließen daraus, daß die Elektronendichte im Leitfähigkeitsband bei einer Temperaturänderung weniger durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung als durch die Änderung der Störstellendichte beherrscht wird. Dies ist nur dann möglich, wenn der Energiebetrag, um ein Elektron ins Leitfähigkeitsband zu verbringen, groß ist gegen die Bindungsenergie eines O^- -Ions an eine Ba-Störstelle.

ersten Augenblick an als Störstelle in Erscheinung. Bei der formierten Kathode verläuft daher nicht nur beim Abstieg, sondern auch beim Aufstieg der O_2^- -Ionenstrom linear mit dem Elektronenstrom, jedenfalls so lange, als letzterer nicht durch die äußeren Potentialverhältnisse (Raumladung) beeinflusst wird. Diese Bedingung ist in Fig. 6 erfüllt; gehen wir, wie in Fig. 7, zu höheren Elektronenströmen über, so sehen wir, daß der O_2^- -Ionenstrom von einem bestimmten Wert an weit stärker anwächst als der Elektronenstrom. Die zunächst naheliegende Annahme, daß es sich dabei um einen bei einer bestimmten Temperatur oder

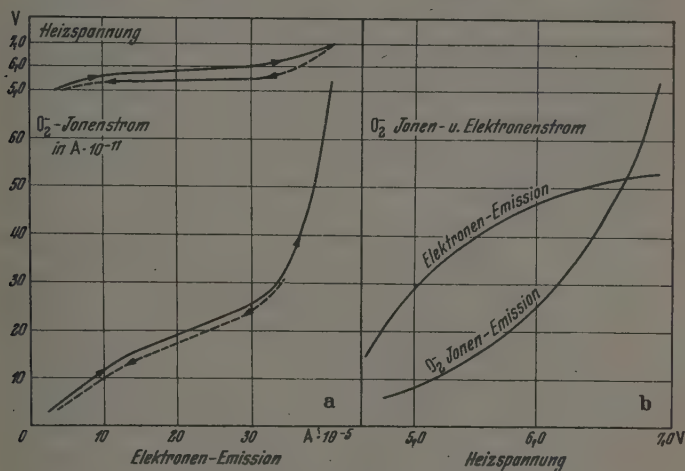


Fig. 7. a) O_2^- -Ionenstrom als Funktion des Elektronenstromes;
b) O_2^- -Ionenstrom als Funktion der Heizspannung.

bei einem bestimmten Elektronenstrom plötzlich einsetzenden Zersetzungsvorgang oder dergleichen handelt, trifft nicht zu. Wir erkennen dies, wenn wir den O_2^- -Ionenstrom sowie den Elektronenstrom über der Temperatur auftragen (Fig. 7b). Beide Ströme zeigen einen stetigen Anstieg über der Temperatur. Während sich der Elektronenstrom jedoch einem raumladungsbegrenzten Höchstwert nähert, scheint für den O_2^- -Ionenstrom eine derartige Raumladungsbegrenzung nicht zu existieren, so daß er ungehindert weiter ansteigen kann. Dies verschiedenartige Verhalten der Ströme gegenüber der Raumladung vor der Kathode kann man durch Annahme verschiedener Austrittsarbeiten für Elektronen und O_2^- -Ionen erklären; es ist die Ursache für den in Fig. 7a beobachteten Knick in der O_2^- -Ionenstromkurve.

7. Vergiftungserscheinungen.

Es ist nicht ohne weiteres einzusehen, was geschieht, wenn das Innere der Kathode im Laufe des Betriebes immer weiter — nach Maßgabe des fortlaufend beobachteten O_2^- -Ionenstroms — mit stöchiometrisch überschüssigem Barium versehen wird. Wir müssen annehmen, daß das Innere des Dielektrikums nur einen bestimmten Sättigungsbetrag an überschüssigem Barium aufnehmen kann. Das über diesen Betrag hinaus entstehende Barium wird sich daher an der Oberfläche der Kathode ansammeln, was sich keineswegs nur günstig auf die Emission der Kathode auswirkt. Nach den bei de Boer¹⁾ entwickelten Vorstellungen besteht eine optimale Ba-Bedeckung der Oberfläche, welche dann erreicht ist, wenn gerade die besonders aktiven Oberflächenstellen ein Ba-Atom adsorbiert haben. Eine weitere Ba-Adsorption, auch an den weniger aktiven Stellen, führt zur Ausbildung von zusammenhängenden Ba-Inseln, durch welche die Zahl der emittierenden Einzelatome herabgesetzt wird.

Bei unserer im Schliffrohr betriebenen Kathode war aus später zu besprechenden Gründen die Betriebstemperatur verhältnismäßig hoch und verursachte eine starke Ba-Bildung. Aus einem durchschnittlich gemessenen O_2^- -Ionenstrom von $0,8 \cdot 10^{-9}$ Amp. errechnet man eine Ba-Zunahme der Kathode von $2 \cdot 10^{-8}$ g/Stunde. Dementsprechend sammeln sich — unter Vernachlässigung der geringen verdampfenden Ba-Menge — etwa 10^{13} Ba-Atome stündlich in der Kathode bzw. an deren Oberfläche an. Dies steht in Übereinstimmung mit den direkten Ba-Bestimmungen, die Berdennikowa²⁾ an Oxyd-Kathoden machte. Die stündlich entstehende Ba-Menge entspricht ungefähr einer monoatomaren Oberflächenbedeckung der Kathode. Es fragt sich daher, ob die bei uns beobachtete Ermüdung der Kathode auf eine Überreicherung der Oberfläche und eine damit verbundene Bildung von zusammenhängenden Ba-Inseln zurückgeführt werden kann.

1) J. H. de Boer, Elektronenemission und Adsorptionerscheinungen, S. 277. — 2) T. P. Berdennikowa, Phys. ZS. UdSSR. 2, 77, 1932. Verf. untersuchte auf chemischem Wege die Ba-Zunahme einer Kathode in Abhängigkeit von der durch die Kathode gegangenen Elektrizitätsmenge und fand, daß die Ba-Zunahme von der Belastung der Kathode abhängig war. — Bei einer Belastung von 100 mA/cm^2 erhielt Berdennikowa $4 \cdot 10^{-8}$ g Ba/Coulomb, bei unserer größenordnungsmäßig gleichen Belastung erhielten wir: $2 \cdot 10^{-8}$ g Ba/Coulomb. Das Verhältnis von Ionen- zu Elektronenstrom war: Bei Berdennikowa $0,5 \cdot 10^{-5}$, bei uns $2,0 \cdot 10^{-5}$. In den Versuchsbedingungen bestand insofern Übereinstimmung, als bei beiden Anordnungen mit Schliffrohr gearbeitet wurde.

Wir werden später einige Beobachtungen diskutieren, die für diese Theorie einer Ba-Überreicherung sprechen. Vorher müssen wir jedoch noch auf den Unterschied eingehen, der zwischen unseren — an einer Apparatur mit Schliffrohr und mit nicht ausheizbaren Massenspektrographen vorgenommenen — Untersuchungen und den Kathodenuntersuchungen anderer Forscher, die mit ausgeheizten und abgezogenen Apparaturen arbeiteten, bestehen.

In nicht ausgeheizten Apparaturen sind Einflüsse der Restgase und Dämpfe denkbar, welche die Elektronenemission der Kathode herabsetzen. Bekannt ist z. B. die vergiftende Wirkung von Sauerstoff und Wasserdampf auf eine Oxyd-Kathode. Man stellt sich die Vergiftung

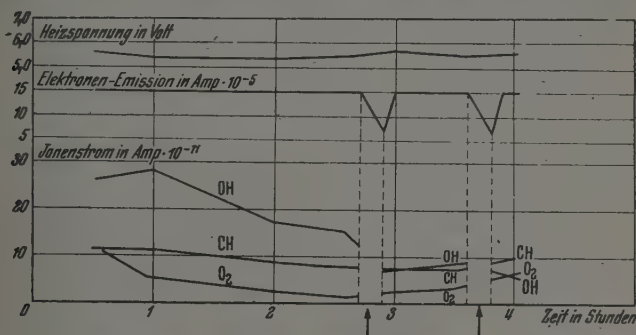


Fig. 8. Elektronen- und Ionenemission unter Einwirkung von Kohlenwasserstoffen. Pfeile: Aufdampfen von Fett auf die Kathode.

so vor, daß eine Bindung der überschüssigen Ba-Atome erfolgt, und zwar sowohl an der Oberfläche als auch im Innern des Dielektrikums. Dadurch wird an der Oberfläche die Emissionsfähigkeit, im Innern die Leitfähigkeit herabgesetzt.

Es wurde aber bei uns noch eine Art von Vergiftung beobachtet, die auf einem andersartigen Effekt zu beruhen scheint. Sie trat z. B. bei der Einwirkung von Kohlenwasserstoffen auf die Kathode auf. Zu ihrer experimentellen Prüfung wurde ein Strahl von positiven (durch Zersetzung von Hahnfett unter Elektronenbeschuß entstandenen) Kohlenwasserstoffionen auf die Kathode gerichtet. Die dadurch verursachte Veränderung der Elektronenemission ist im oberen Teil der Fig. 8 aufgetragen. Als Abszisse ist die Versuchsdauer gewählt.

Sobald das Aufdampfen von Kohlenwasserstoffen auf die Kathode beginnt, sinkt die Elektronenemission ab. Sie erholt sich aber nach Aufhören des Kohlenwasserstoffbombardements in wenigen Minuten

wieder und erreicht bei ungeänderter Heizspannung wieder ihren alten Wert.

Ohne über den Charakter dieser Vergiftung Aussagen zu machen, müssen wir annehmen, daß in Apparaturen mit Schliffrohren stets eine derartige Kohlenwasserstoffvergiftung vorhanden ist. Sie machte sich bei uns darin bemerkbar, daß wir die technisch vorgesehene Heizspannung von 4,0 Volt stets überschreiten mußten, um eine Elektronenemission zu erhalten. Diese Überheizung hat eine verstärkte Ba-Bildung zur Folge.

Für die Erklärung der im folgenden diskutierten Beobachtungen benötigen wir die weiter oben gemachte Annahme, daß das im Betrieb entstehende Barium nicht beliebig im Innern der Kathode untergebracht werden kann, sondern daß eine Sättigung besteht, über welche hinaus das entstehende Barium im Innern keinen Platz mehr hat und sich daher auf der Kathodenoberfläche ansammelt.

Bei normal geheizter Kathode besteht Gleichgewicht zwischen dem von der Oberfläche abdampfenden und dem aus dem Innern nachgelieferten Barium. Bei der überheizten Kathode dagegen ist die Ba-Lieferung aus dem Innern der Kathode so stark, daß im Verlaufe einiger Stunden noch kein Gleichgewicht mit der Ba-Verdampfung erreicht wird und sich daher die Oberfläche der Kathode ständig mit Ba anreichert. Diese Vorstellung erlaubt es uns zu erklären, warum

1. die Emission im Laufe von einigen Stunden nachläßt,
2. die Emission durch einen kurzzeitigen Einlaß von Wasserdampf in die Apparatur wieder auf ihre anfängliche Höhe gebracht werden kann.

Wir betrachten dazu den in Fig. 9a dargestellten Versuch: Im oberen Teil ist die Heizspannung aufgetragen, die notwendig war, um eine konstante Elektronenemission von $5 \cdot 10^{-5}$ Amp. aufrechtzuerhalten. Eine Erhöhung der Heizspannung während des Betriebes bedeutet also eine Verschlechterung der Kathode; eine Erniedrigung dagegen eine Erholung der Kathode. Das Zeichen H_2O kennzeichnet einen kurzzeitigen Wasserdampfeinlaß in die Apparatur; P kennzeichnet die Versuchspause während der Nacht.

Wie wir sehen, steigt die Heizspannung im Verlaufe von Stunden an, das bedeutet eine Verschlechterung der Kathode. Nach einer Nachtpause oder nach einem Wassereinlaß ist die Heizspannung wieder auf ihren alten Wert erniedrigt, die Kathode ist also wieder erholt

Wir schließen daraus, daß sich das dauernd im Innern der Kathode entstehende Barium, welches pro Stunde etwa einer monoatomaren Oberflächenbedeckung entspricht, auf der Oberfläche ansammelt und dort durch Inselbildung die optimale Oberflächenbedeckung zerstört. Dadurch sinkt die Emission ab bzw. muß zur Konstanthaltung der Emission die Heizspannung erhöht werden. Durch den Wasserdampfeinlaß wird die ganze Ba-Bedeckung in BaO oder BaOH verwandelt.

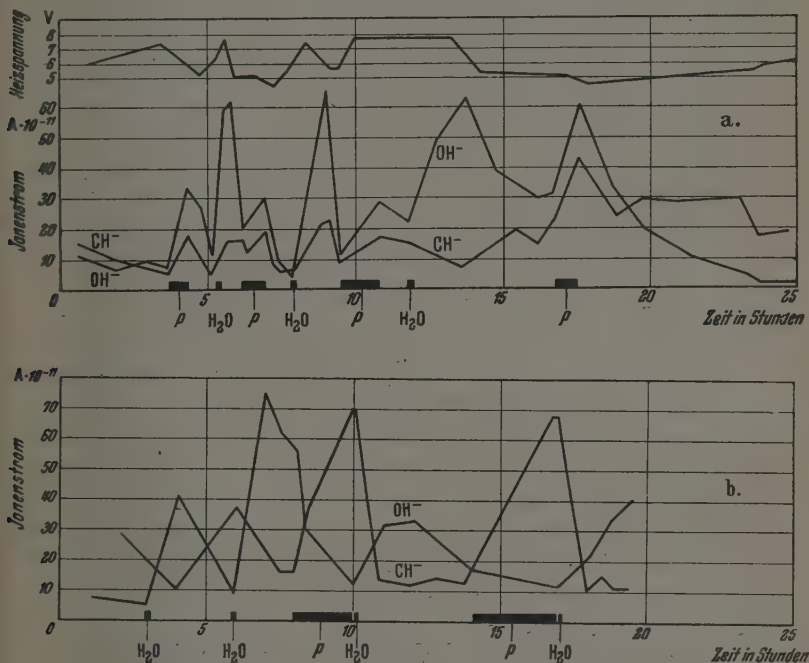


Fig. 9. Wirkung von Wasserdampf und Betriebspausen auf die Ionenströme. (H₂O: Einwirkung von Wasserdampf auf die Kathode; P: Apparatur außer Betrieb, Pumpleitung durch Hahn abgeschaltet.)

Bei der Wiederinbetriebnahme der Kathode werden jedoch die besonders aktiven Oberflächenstellen infolge ihrer Aktivität bald wieder ein Ba-Atom erhalten. Damit ist dann die optimale Oberflächenbedeckung wieder hergestellt und die Emission erfolgt wieder bei der anfänglichen niedrigen Heizspannung. Die Bedeckung auch der weniger aktiven Stellen mit Barium erfolgt wieder durch Überreicherung im Verlaufe von Stunden, was sich in einem erneuten Ansteigen der Heizspannung bemerkbar macht. Dieser Vorgang wiederholt sich in Fig. 9a mehrere

Male. Die Kathodenerholung während der Nachtpause ist ebenfalls auf die Zerstörung der zu starken Oberflächenbedeckung durch in der Apparatur vorhandene Wasserdampfreste zurückzuführen.

In Kathoden, die in abgeschmolzenen Röhren betrieben werden, liegen die Verhältnisse anders. Es entsteht dort keine Herabsetzung der Emission durch Verunreinigungen (Kohlenwasserstoffe). Daher ist keine Überheizung im Betrieb notwendig, und es kommt zu keiner Ba-Überreicherung. Bei einer solchen Kathode hat daher die Ba-Bindung durch Wasserdampf keine verbessernde, sondern eine verschlechternde Wirkung auf die Elektronenemission.

8. Die Herkunft der negativen Ionen.

Bei den im vorigen Abschnitt beschriebenen Vergiftungen der Kathode durch Kohlenwasserstoffe einerseits und durch Wasserdampf andererseits wurde neben der Elektronenemission auch die negative Ionenemission untersucht. Aus diesen Beobachtungen sind Schlüsse auf die Herkunft der negativen Ionen möglich.

Die CH⁻-Ionen. Einer der stärksten von der Kathode ausgehenden Ionenströme ist der CH⁻-Ionenstrom. Nachdem wir im Abschnitt 4 festgestellt haben, daß als Entstehungsort nur die Kathode selbst in Betracht kommt, fragt es sich nun, ob er seine Quelle in den Verunreinigungen hat, die von außen auf die Kathode geraten, oder ob er aus den Bestandteilen der Kathode, herrührend vom Herstellungsprozeß, gebildet wird.

Wir sehen in Fig. 8, daß der CH⁻-Ionenstrom durch das Aufdampfen von Kohlenwasserstoffen auf die Kathode nicht über seinen normalen Wert hinaus vergrößert wird. Auch durch grobe Verunreinigungen der Kathodenumgebung mit Hahnfett konnte die normale CH⁻-Ionenbildung nicht vergrößert werden, obwohl sicherlich beim Auftreffen von Fettdämpfen auf die heiße Kathode reichlich Kohlenwasserstoffe gebildet werden. Wir sehen daraus, daß eine eventuelle Elektronen-anlagerung an CH-Moleküle aus dem Gasraum so klein ist, daß sie den tatsächlich beobachteten CH⁻-Ionenstrom nicht zu decken vermag. Für diesen bleibt als *Herkunftsort* nur das *Innere der Kathode* übrig. Wir werden im nächsten Abschnitt einen Effekt beschreiben, der zum gleichen Schluß führt. Das für die CH⁻-Ionen Gesagte gilt auch für die C₂⁻-Ionenreihe.

Die OH⁻-Ionen. Im Gegensatz zu den CH⁻-Ionen sind die OH⁻-Ionen sehr stark von äußeren Einflüssen auf die Kathode abhängig;

ein andersartiges Verhalten ist auch schon darum zu erwarten, weil die OH^- -Ionen im Gegensatz zu den CH^- -Ionen eine chemische Affinität zum Barium haben. In Fig. 9a und b sehen wir, daß mit einem Wassereinlaß stets ein starker Anstieg des OH^- -Ionenstromes verbunden ist. Es besteht daher für die OH^- -Ionen sehr wohl die Möglichkeit, daß ihr Entstehungsort die Kathodenoberfläche, ihr *Herkunftsort* aber die Kathodenumgebung bzw. der *Gasraum* ist.

Die O_2^- -Ionen. Diese erweisen sich als unabhängig von einem Luft-einlaß in die Apparatur und mithin als unabhängig vom restlichen O_2 -Druck. Damit bestätigt sich erneut die Annahme, daß die O_2^- -Ionen ihren *Herkunftsort in der Kathode* haben und ausschließlich bei der BaO -Dissoziation entstehen. Ähnlich wie die O_2^- -Ionen verhalten sich die Cl^- -Ionen. Auch diese haben ihren Entstehungsort in der Kathode selbst. Die rasch erfolgende Verarmung der Cl^- -Ionen läßt darauf schließen, daß die Cl^- -Verunreinigung der Kathode nur geringfügig ist.

Die H^- -Ionen. Diese sind auch bei der reinen Wolfram-Kathode reichlich vorhanden. Wir schließen daraus, daß sie ihren *Herkunftsort* weniger in der Kathodenmasse als im *Trägermetall* haben. Als Ionen-entstehungsort ist die Kathodenoberfläche anzunehmen, wo aus den adsorbierten H-Atomen durch Elektronenanlagerung negative H^- -Ionen entstehen. Das negative H_2 -Molekülion tritt bekanntlich nicht auf und wurde auch hier nicht beobachtet.

9. Die gegenseitige Beeinflussung der Ionenströme.

Nachdem wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, daß die wichtigsten Ionen, nämlich die O_2^- -, die CH^- - und die C_2^- -Ionen auf jeden Fall aus dem Innern der Kathode stammen, bleibt noch die Frage, ob diese Ionen durch das Dielektrikum hindurch oder ob sie entlang von inneren Rissen von ihrem Herkunftsort zur Kathodenoberfläche gelangen. Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir die Fig. 10. Als Abszisse ist darin der Elektronenstrom, als Ordinate der O_2^- - und der C_2^- -Ionenstrom aufgetragen. (Der CH^- -Ionenstrom zeigt ähnliches Verhalten wie der C_2^- -Ionenstrom.)

Man sieht in Fig. 10, daß an der Stelle, an welcher der starke Anstieg der O_2^- -Ionen einsetzt, der C_2^- -Ionenstrom ein Maximum anläuft, um bei weiterem Anstieg des O_2^- -Ionenstroms wieder abzusinken. Bei anschließender Erniedrigung der Temperatur und damit des O_2^- -Ionenstroms steigt der C_2^- -Ionenstrom weit über sein bisheriges Maximum hinaus kurzzeitig an (gestrichelte Kurve).

Offenbar handelt es sich hierbei um eine gegenseitige Beeinflussung der Ionenströme derart, daß der O_2^- -Ionenstrom bei hoher Intensität den C_2^- -Ionenstrom am Austritt aus der Kathode hindert. Dieses Verhalten können wir durch folgenden Prozeß deuten: Die O-Ionen wandern elektrolytisch durch den BaO-Kristall hindurch zur Oberfläche der Kathode. Dort werden sie adsorbiert, vereinigen sich zu O_2^- -Molekülonen und werden nach einer gewissen Verweilzeit emittiert. Die

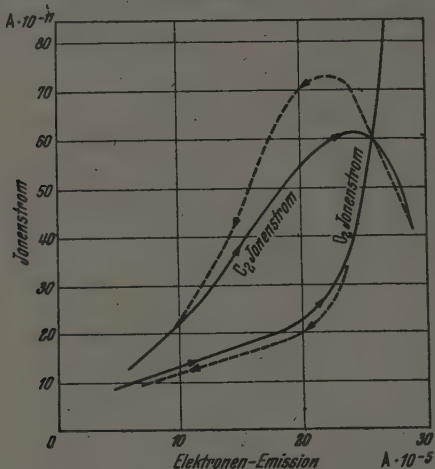


Fig. 10. Sperrung der C_2^- -Ionenemission durch die O_2^- -Ionenemission.

C_2^- -Ionen hingegen wandern längs der inneren Oberflächen der einzelnen Kristallite nach außen; diese Oberflächenwanderung ist nun solange unbehindert, wie die Oberfläche nicht durch adsorbierte O_2^- -Ionen bedeckt ist. Bei wachsendem O_2^- -Ionenstrom wird sich jedoch die Oberfläche zunehmend einem Sauerstoffbedeckungsgrad Eins nähern und es wird dadurch ein Zustand eintreten, bei welchem die Oberflächenwanderung der C_2^- -Ionen unterbunden und damit ihre Emission behindert ist. Sie sammeln sich daher im Innern der Kathode an, um bei Aufhebung dieser „Sperrung“ verstärkt in Erscheinung zu treten (gestricheltes Maximum).

Es fragt sich nun, ob eine derartige Sperrwirkung auch für das zeitliche Schwanken der Ionenströme, und vor allem für die Wirkung des Wasserdampfes auf die Ionenströme, verantwortlich gemacht werden kann. Die Beantwortung dieser Frage ist besonders schwierig dadurch, daß sich die Ionenströme verschiedener Kathoden entgegengesetzt gegenüber dem Wasserdampf verhalten.

Bei der in Fig. 9a untersuchten Kathode sehen wir, daß durch einen Wassereinlaß nicht nur der OH^- -, sondern auch die anderen Ionenströme ansteigen. Die in Fig. 9b dargestellte Kathode dagegen zeigt bei einem Anstieg des OH^- -Ionenstroms stets ein Absinken der anderen Ionenströme. (Als Vertreter ist nur der charakteristische CH^- -Ionenstrom eingezeichnet.) Beim letzten Wassereinlaß zeigt die Fig. 9a das gleiche Bild wie die Fig. 9b, nämlich ein gegenläufiges Verhalten der Ionenströme.

Wir schließen aus Fig. 9b, daß die OH^- -Ionen die anderen Ionen beeinflussen, und zwar, daß sie unter bestimmten Bedingungen bei reichlichem Auftreten eine Oberflächensperrung verursachen, genau wie die O_2^- -Ionen in Fig. 10. Unter anderen Bedingungen jedoch scheinen sie eine vorhandene Oberflächensperrung (etwa infolge einer zu starken Ba-Bedeckung) zu beseitigen und damit die Wanderung der anderen Ionen zur Oberfläche zu erleichtern (Fig. 9a).

Welches die Bedingungen für ein Wirken der OH^- -Ionen in dem einen oder anderen Sinne sind, konnten wir noch nicht feststellen, doch liegen Anzeichen dafür vor, daß die Korngröße der Kathode dabei eine Rolle spielt.

Die Arbeit wurde am Institut für Experimentalphysik der Universität Kiel ausgeführt. Herrn Prof. Kopfermann danken wir für Überlassung von Institutsmitteln, den Herren Dr. Knoll, Dr. Gundert, Dr. Herrmann und Dr. Richter (Telefunken) für anregende Diskussionen und Ratschläge, schließlich der Firma Telefunken (Laboratorium für Elektronenforschung) für Überlassung von Elektronenstrahlssystemen und Kathoden.

Über ebene Diffusionsprobleme.

Von G. C. Wiek in Rom.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 18. März 1943.)

Ein systematisches Approximationsverfahren zur Lösung von ebenen Diffusionsproblemen wird im Hinblick auf spezielle Probleme der Neutronenphysik entwickelt. Die Tragweite des Verfahrens wird an einigen Beispielen erläutert (Richtungsverteilung der aus einer Oberfläche austretenden Strahlung, Albedo). Insbesondere wird eine ganz elementare Ableitung der *exakten* Albedoformel

$\frac{\varrho_{\infty}}{\varrho_0} = (N+1)^{1/2} + 1$ gewonnen. Die Methode erlaubt es, ohne besondere Schwierigkeiten beliebig komplizierte Randbedingungen zu berücksichtigen.

In neuerer Zeit sind gewisse Diffusionsprobleme in Verbindung mit Experimenten über thermische Neutronen wieder öfters erörtert worden^{1, 2, 3, 4}). Ansätze zur Lösung von ähnlichen in der Astrophysik auftretenden Problemen waren schon früher bekannt, wie z. B. die strenge Hopfsche Lösung des Problems von Schwarzschild und Milne⁵) in Form einer Reihenentwicklung. Die amerikanischen Forscher²) haben für das Neutronenproblem eine strenge Lösung in *geschlossener Form* gegeben. Andererseits hatte *Fermi*⁶) eine ganz elementare, aber stark schematisierte „eindimensionale“ Behandlung dieser Fragen gegeben; diese ist natürlich bei den Experimentatoren viel beliebter als die komplizierten analytischen Kunstgriffe der exakten Arbeiten.

Es fragt sich nun: Gibt es nicht eine Methode, die es, ohne den Boden der alltäglichen Analysis zu verlassen, doch erlaubt, die feineren Züge der Richtungsverteilung der diffundierenden Strahlung zu berücksichtigen? Daß es Probleme gibt, bei denen die Fermische Schematisierung etwas grob erscheint, zeigt das Beispiel der von Ramm⁴) benutzten Anordnung, bei der man die Neutronendichte ϱ_{∞} in einem ungestörten Feld thermischer Neutronen mit der Dichte ϱ_{abs} an der

¹) W. Bothe, ZS.f. Phys. 118, 401, 1941; 119, 493, 1942. — ²) O. Halpern, R. Lueneburg u. O. Clark, Phys. Rev. 53, 173, 1938; E. A. Schuchard u. E. A. Uehling, ebenda 58, 611, 1940; E. A. Uehling, ebenda 59, 136, 1941. — ³) A. Bouwers, Physica 7, 193, 1940; W. De Groot, K. F. Niessen, ebenda 7, 199, 1940. — ⁴) W. Ramm, Naturwiss. 30, 755, 1942. — ⁵) E. Hopf, ZS.f. Phys. 46, 374, 1928; 49, 155, 1928; s. auch M. Bronstein, ebenda 58, 696, 1929; 59, 144, 1929. — ⁶) E. Fermi, Ric. Scient. VII—II, 13, 1936; vgl. auch E. Amaldi u. E. Fermi, Phys. Rev. 50, 899, 1936.

Oberfläche einer in dieses Feld gebrachten absorbierenden Platte vergleicht; man müßte hier berücksichtigen, daß die in verschiedener Richtung auf die Platte einfallenden Neutronen verschieden stark absorbiert werden.

Nun habe ich früher zur Lösung der Diffusionsgleichung ein systematisches Approximationsverfahren angegeben¹⁾, das, wie mir scheint, den eben gestellten Forderungen genügt. Dieses Verfahren wird hier weiter entwickelt; durch Einführung von zwei Polynomen P und R gelingt es, die Lösungen in allgemeiner Form auszudrücken. Dies sollte die numerische Anwendung auf spezielle Probleme sehr erleichtern, insbesondere an Hand der Tabelle, die am Ende der Arbeit gegeben wird. Außerdem gestattet die allgemeine Form der Lösung für die n -te Approximation in gewissen einfachen Fällen den Grenzübergang zum exakten Resultat. In dieser Weise erhält man z. B. eine sehr elementare Ableitung der Beziehung zwischen dem gemessenen Wert der „Albedo“ und der mittleren Zahl N von freien Weglängen, die ein Neutron vor dem Einfang durchläuft.

Eine genaue Kenntnis meiner früheren Arbeit wird nicht vorausgesetzt. Um unnötige Wiederholungen zu vermeiden, werde ich aber nicht die vereinfachenden Annahmen, die zur Ableitung der Integro-differentialgleichung der Diffusion nötig sind, diskutieren; ich beziehe mich vielmehr nicht nur auf meine frühere Arbeit, sondern z. B. auch auf die erste Mitteilung von Bothe²⁾.

1. *Die Diffusionsgleichung.* Wir wollen eine Strahlung (thermische Neutronen) betrachten, die in einem homogenen Medium diffundiert. Dabei sollen zwei Elementarprozesse eine wesentliche Rolle spielen: Absorption und Streuung. Die Streuung soll ohne Qualitätsänderung stattfinden, d. h. im Falle der thermischen Neutronen nehmen wir, etwas schematisch, vollkommen elastische Streuung an, so daß wir uns auf Neutronen *einer* bestimmten Geschwindigkeit beschränken dürfen. Der Absorptions- bzw. der Streukoeffizient sollen P_a bzw. P_s heißen.

Wir wählen die Längeneinheit so, daß $P_a + P_s = 1$ ist. Bei ebenen, stationären Problemen hängt die Verteilungsfunktion der Teilchen nur von einer kartesischen Koordinate x und von dem Winkel ϑ zwischen der Geschwindigkeit und der x -Achse ab. Wir werden daher mit

$$f(x, u) du \quad (1)$$

¹⁾ G. C. Wick, Rend. Lincei 23, 774, 1936, im folgenden mit „I“ zitiert.

— ²⁾ W. Bothe, ZS. f. Phys. 118, 401, 1941.

die Raumdichte der Teilchen, für die $u < \cos \vartheta < u + du$ ist, bezeichnen. Unter der Annahme, daß die Streuung isotrop ist, lautet die Stationaritätsbedingung¹⁾

$$\left[u \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right] f(x, u) - \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^{+1} f(x, v) dv = 0, \quad (2)$$

wobei

$$\sigma = \frac{P_s}{P_s + P_a} = \frac{N}{N+1}, \quad \text{wenn} \quad N = \frac{P_s}{P_a}. \quad (3)$$

(Ich schließe mich der üblichen Bezeichnung an; in „I“ hatte ich $N-1$ statt N geschrieben.) Für langsame Neutronen in Paraffin ist bekanntlich $N \sim 150$ bis 200.

Bezeichnen wir die linke Seite von (2) mit $D(f)$, so können wir auch die Gleichung

$$D(f) = q(x) \quad (4)$$

betrachten, wenn also im Raum kontinuierlich verteilte isotrope Quellen vorhanden sind. Aus der Gl. (2) bzw. (4) und aus den Randbedingungen wird die Verteilungsfunktion zu bestimmen sein.

Ich erwähne einige Fälle:

$$\text{A. } \begin{cases} D(f) = 0 & \text{für } 0 < x < \infty, \\ f(0, u) = \text{bekannte Funktion von } u, & \text{wenn } 0 < u < 1, \\ f(x, u) \rightarrow 0, & \text{wenn } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

(d. h. Halbraum, mit einfallender Strahlung auf der Grenzebene $x = 0$);

$$\text{B. } \begin{cases} D(f) = q(\text{konst.}) & \text{für } 0 < x < \infty, \\ f(0, u) = 0 & \text{für } 0 < u < 1, \\ f(x, u) \text{ endlich,} & \text{wenn } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

(d. h. Halbraum mit konstanter Quellendichte, keine von außen einfallende Strahlung);

$$\text{C. } \begin{cases} D(f) = \delta(x); & -\infty < x < +\infty, \\ f(x, u) \rightarrow 0, & \text{wenn } x \rightarrow \pm\infty \end{cases}$$

¹⁾ Man vergleiche mit Gl. (2) in der ersten Mitteilung von Bothe¹⁾, siehe S. 702, die sich von unserer Gl. (2) nur in der Benennung der Variablen unterscheidet.

(d. h. konzentrierte Quelle bei $x = 0$, δ ist die Diracsche δ -Funktion);

$$D. \begin{cases} D(f) = q \text{ (konst.)}; & -\infty < x < +\infty, \\ f(0+, u) = E(u) f(0-, u), & -1 < u < +1, \\ f(x, u) \text{ endlich,} & \text{wenn } x \rightarrow \pm \infty \end{cases}$$

[mit $E(u) = e^{-u/u}$: absorbierende Schicht bei $x = 0$].

Fall D besitzt für viele Messungen mit Neutronen ein besonderes Interesse^{1, 2, 3}); er soll aber hier nicht eingehend behandelt werden. Aus den vier betrachteten Fällen lassen sich noch andere leicht durch Superposition gewinnen.

2. Die Approximationsmethode. Sie beruht auf dem bekannten Gedanken, eine Integralgleichung durch ein System von linearen Gleichungen zu ersetzen. Wir wollen das Integral in Gl. (2), d. h. die Neutronendichte, mit einer Summe approximieren:

$$\varrho(x) \approx \int_{-1}^{+1} f(x, u) du = \sum_i p_i f(x, u_i) \quad (5)$$

mit geeignet gewählten Gewichten p_i . Um mit einer möglichst geringen Anzahl von Punkten u_i auszukommen, setzen wir die u_i nach der Gaußschen Vorschrift fest: $P_{2n}(u)$ sei ein Legendresches Polynom gerader Ordnung⁴), die Gleichung: $P_{2n}(u) = 0$ besitzt im Intervall $(0, 1)$ n Wurzeln, die wir folgendermaßen numerieren:

$$0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < 1,$$

außerdem n negative Wurzeln u_{-1}, u_{-2}, \dots , wobei $u_{-i} = -u_i$ ist. Die $2n$ Wurzeln von P_{2n}' wählen wir als Interpolationspunkte und erstrecken also die Summe in (5) von $-n$ bis $+n$ (die Null fehlt!). Wie Gauß zeigt⁵), kann man die Gewichte p dann so wählen, daß die Integrationsformel für jedes Polynom in u : $Q(u)$ bis zur Ordnung $4n - 1$ exakt ist. Insbesondere gilt

$$\sum_{i=1}^n p_i u_i^r = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} u^r du = \frac{1}{r+1} \quad (6)$$

¹) E. Fermi, Ric. Scient. VII-II, 13, 1936; vgl. auch E. Amaldi u. E. Fermi, Phys. Rev. 50, 899, 1936. — ²) W. Ramm, Naturwiss. 30, 755, 1942. — ³) A. Bouwers, Physica 7, 193, 1940; W. De Groot, K. F. Niessen, ebenda 7, 199, 1940. — ⁴) Man könnte ebensogut ein ungerades Polynom benutzen; durch die Anwesenheit der Wurzel $u = 0$ ergäbe sich aber dann die Notwendigkeit einer etwas verschiedenen Behandlung. — ⁵) C. F. Gauß, Werke, Bd. 3, S. 163; s. auch Riemann-Weber, Differentialgleichungen der Physik, I. Bd., Kap. 8.

für $r = 0, 2, 4, \dots, 4n - 2$. Aus Symmetriegründen ist offenbar

$$p_{-i} = p_i.$$

Setzen wir (5) in Gl. (2) ein, setzen wir ferner die laufende Variable u sukzessive gleich $u_{-n}, u_{-n+1}, \dots, u_n$, so erhalten wir ein System von $2n$ Differentialgleichungen:

$$\left\{1 + u_i \frac{\partial}{\partial x}\right\} f(x, u_i) - \frac{\sigma}{2} \sum_j p_j f(x, u_j) = 0 \quad (7)$$

in den $2n$ unbekannten Funktionen von x : $f(x, u_i)$.

Wir suchen partikuläre Lösungen von der Form

$$f(x, u_i) = e^{-kx} g(u_i) \quad (8)$$

und erhalten sofort aus Gl. (7): $f(u_i) = \text{Konst}/(1 - k u_i)$. Setzen wir das wieder in (7) ein, so erhalten wir für den Exponentialkoeffizienten k die Bedingung

$$1 = \frac{\sigma}{2} \sum_i \frac{p_i}{1 - k u_i} = \sigma \sum_{i>0} \frac{p_i}{1 - k^2 u_i^2}. \quad (9)$$

Wie man leicht sieht, besitzt diese Gleichung $2n$ Wurzeln, die wir mit k_α bezeichnen ($\alpha = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$), wobei $k_{-\alpha} = -k_\alpha$ und

$$u_1 < \frac{1}{k_1} < u_2 < \dots < \frac{1}{k_{n-1}} < u_n < 1 < \frac{1}{k_n}. \quad (9a)$$

Wenn $\sigma = 1$ wird, so wird $k_n = 0$. Die letzte Ungleichung gilt nicht allgemein, aber doch praktisch immer.

Nun lautet die allgemeine Lösung von (7)

$$f(x, u_i) = \sum_\alpha \frac{L_\alpha}{1 - k_\alpha u_i} e^{-k_\alpha x} \quad (10)$$

mit $2n$ Integrationskonstanten $L_{\pm 1}, L_{\pm 2}, \dots$, worüber wir verfügen können, um den Randbedingungen gerecht zu werden. Aus (10) und (9) folgt

$$\varrho(x) = \sum_i p_i f(x, u_i) = \frac{2}{\sigma} \sum_\alpha L_\alpha e^{-k_\alpha x}. \quad (11)$$

Es ist einleuchtend, daß die Wurzeln k_n, k_{-n} eine Sonderstellung besitzen, da sie innerhalb des Intervalls $(-1, +1)$ liegen. Für sie behält also die Gleichung (9) ohne weiteres einen Sinn, wenn man den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durchführt:

$$1 = \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{1 - ku} = \frac{\sigma}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} = \sigma \left(1 + \frac{k^2}{3} + \frac{k^4}{5} + \dots\right). \quad (9b)$$

Man erhält somit eine Lösung der exakten Gl. (2), die ich schon in „I“ angegeben und zur Diskussion der Albedo verwendet habe¹⁾. Es ist

¹⁾ Einen verwandten Beweis gibt Bothe (W. Bothe, ZS. f. Phys. 118, 401, 1941).

bemerkenswert, daß im praktisch wichtigen Fall $N \gg 1$ die Wurzel k_n auch ohne Grenzübergang die Gl. (9b) fast exakt befriedigt [wie man aus Gl. (9) durch Entwicklung nach Potenzen von k unter Berücksichtigung der Gln. (6) ersieht]. Aus Gl. (9b) erhalten wir

$$k_n = \sqrt{\frac{3}{N}} \left\{ 1 - \frac{9}{10} \frac{1}{N} + \frac{1269}{1400} \frac{1}{N^2} - \dots \right\} \quad (9c)$$

und die angeschriebenen Glieder sind schon richtig, wenn $n > 2$ ist. Im Falle $N \gg 1$ sind k_n und k_{-n} von anderer Größenordnung als die anderen Wurzeln; die entsprechenden Exponentialfaktoren in Gln. (10) und (11) fallen langsam ab und spielen in großer Entfernung vom Rande die Hauptrolle. Dagegen sind die „großen“ Wurzeln k_1, \dots, k_{n-1} für die Randeffekte entscheidend.

Betrachten wir noch kurz die einfachste Näherung des Verfahrens ($n = 1$). Das zweite Legendresche Polynom ist

$P_2(u) = \frac{1}{2}(3u^2 - 1)$ mit den Wurzeln $u_{\pm 1} = \pm 1/\sqrt{3}$. Die Gln. (7) lauten jetzt:

$$\left. \begin{aligned} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x} \right] f\left(x, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{\sigma}{2} \left[f\left(x, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(x, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right], \\ \left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial}{\partial x} \right] f\left(x, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{\sigma}{2} \left[f\left(x, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(x, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

Das sind die Gleichungen eines eindimensionalen Diffusionsproblems, wenn man $f\left(x, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ und $f\left(x, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ als die Anzahl der sich „nach rechts“ bzw. „nach links“ bewegenden Teilchen betrachtet. Gegen das dreidimensionale Ausgangsproblem besteht der Unterschied, daß hier die freie Weglänge um einen Faktor $\sqrt{3}$ kleiner ist. *Das ist genau die Fermische Vorschrift*, womit unsere erste Näherung völlig äquivalent ist¹⁾.

3. *Die Berechnung der Funktion $f(x, u)$.* Haben wir mit Hilfe der Randbedingungen die Integrationskonstanten L_α bestimmt, so können wir $f(x, u)$ für beliebigen u aus den $f(x, u_i)$ durch Interpolation gewinnen. Diese Interpolation ist aber von niedrigerer Ordnung als die in Gl. (5) verwendete, so daß in dieser Weise die Genauigkeit des Verfahrens nicht völlig zur Geltung kommt; wir dürfen nämlich erwarten, daß die Gesamtdichte ϱ , nach Gl. (11) berechnet, einen höheren Grad von Genauigkeit als die interpolierten $f(x, u)$ -Werte besitzt. Das gibt uns aber den Fingerzeig zu einer wesentlichen Verfeinerung dieser

¹⁾ Darauf hat mich Professor Heisenberg freundlich aufmerksam gemacht.

Werte; wir setzen nämlich den Ausdruck (11) in Gl. (2) ein und erhalten eine einfache Differentialgleichung für f^1). Sodann finden wir

$$f(x, u) = \sum_{\alpha} \frac{L_{\alpha} e^{-k_{\alpha} x}}{1 - k_{\alpha} u} + a(u) e^{-\frac{x}{u}}, \quad (12)$$

wobei die Werte der Integrationskonstanten $a(u)$ nochmals aus den Randbedingungen zu erhalten sind.

Betrachten wir z. B. Problem A; wir müssen zwei Fälle unterscheiden, ob nämlich $u \geq 0$ ist. Ich werde nur die Formel für $u < 0$ anschreiben, die nützlicher ist. Aus der Bedingung im Unendlichen ergibt sich: $a(u) = 0$, außerdem folgt, daß in Gl. (12) nur positive α -Werte vorkommen. Insbesondere gewinnen wir daraus einen Ausdruck für den aus der Grenzfläche $x = 0$ austretenden Strom

$$u < 0 \quad f(0, u) = \sum_{\alpha > 0} \frac{L_{\alpha}}{1 - k_{\alpha} u}, \quad (12a)$$

d. h. es gilt die Formel (10) auch für $u \neq u_i$. (Es sei bemerkt, daß für positive u -Werte dies nicht mehr der Fall ist; das ergäbe auch ganz sinnlose Singularitäten in der Nähe von $k_1^{-1}, k_2^{-1}, \dots$!)

Daß diese Verfeinerung große Vorteile bietet, erhellt schon daraus, daß in der ersten „Fermischen“ Näherung zunächst nur *ein* Wert von $f(0, u)$ bekannt ist, nämlich $f(0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. Daraus ließe sich keine Winkelverteilung gewinnen. Doch konnte Fermi aus der Dichteverteilung im Inneren die Winkelverteilung am Rande in guter Übereinstimmung mit der exakten Theorie berechnen, und zwar durch ein Verfahren, das mit dem hier vorgeschlagenen im Falle $n = 1$ vollkommen übereinstimmt.

4. *Die inhomogene Gleichung.* Nach dem bis jetzt Gesagten brauchen wir keine weitere Erläuterung über die Methode. Besonders einfach ist der Fall einer exponentiell verteilten Quellendichte, den ich jedoch nicht behandeln werde. Ich will hier nur den einfachsten Fall betrachten: $q = \text{Konst.}$ Man erhält dann, anstatt (10), die Gleichung

$$f(x, u_i) = \frac{q}{1 - \sigma} + \sum_{\alpha} \frac{L_{\alpha}}{1 - k_{\alpha} u_i} e^{-k_{\alpha} x} \quad (13)$$

und

$$q(x) = \frac{2q}{1 - \sigma} + \frac{2}{\sigma} \sum_{\alpha} L_{\alpha} e^{-k_{\alpha} x}. \quad (14)$$

¹⁾ Dabei betrachten wir die Konstanten L_{α} als bekannt, d. h. sie sollen schon mittels der Randbedingungen bestimmt worden sein.

Daraus kann man wieder, nach der schon dargelegten Methode, $f(x, u)$ für u beliebig gewinnen. Insbesondere will ich Problem B betrachten. Die Bedingung im Unendlichen ergibt, daß α nur positive Werte annehmen darf; bei der Berechnung von $f(0, u)$ ergibt sich

$$(u < 0) \quad f(0, u) = \frac{q}{1-\sigma} + \sum_{\alpha > 0} \frac{L_{\alpha}}{1 - k_{\alpha} u}. \quad (15)$$

5. Die Bestimmung der Integrationskonstanten. Die Konstanten L_{α} sind aus einem linearen Gleichungssystem (den Randbedingungen) zu bestimmen. Darüber läßt sich noch etwas allgemein sagen.

Betrachten wir Problem A, so haben wir in (10) nur positive Werte von α . Die Randbedingung bei $x = 0$ ergibt n Gleichungen:

$$i > 0 \quad f(0, u_i) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{L_{\alpha}}{1 - k_{\alpha} u_i}. \quad (16)$$

Daraus sind die n Konstanten L_{α} zu bestimmen. Betrachten wir das Polynom n -ten Grades in u :

$$R(u) = (1 - k_1 u)(1 - k_2 u) \cdots (1 - k_n u) \quad (17)$$

und multiplizieren wir (16) mit $R(u)$, so erhalten wir auf der rechten Seite ein Polynom Q vom Grad $n - 1$ in u . Unsere Aufgabe ist also mit einem Interpolationsproblem äquivalent: das Polynom $Q(u)$ vom Grad $n - 1$ zu finden, das den n Bedingungen

$$Q(u_i) = R(u_i) f(0, u_i) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

genügt. Führen wir noch ein Polynom

$$P(u) = (u - u_1)(u - u_2) \cdots (u - u_n) \quad (18)$$

ein, das die Hälfte der Elementarfaktoren von P_{2n} enthält, so kann man die Lösung

$$Q(u) = \sum_{i=1}^n \frac{R(u_i) f(0, u_i)}{P'(u_i)} \frac{P(u)}{u - u_i} \quad (19)$$

explizite hinschreiben. Die Konstanten L_{α} können jetzt aus Q abgeleitet werden:

$$\alpha > 0 \quad L_{\alpha} = \lim_{u = k_{\alpha}^{-1}} \left[(1 - k_{\alpha} u) \frac{Q(u)}{R(u)} \right] = -k_{\alpha} \frac{Q(1/k_{\alpha})}{R'(1/k_{\alpha})}. \quad (20)$$

Wollen wir nur die austretende Strahlung berechnen, so brauchen wir aber diese Konstanten gar nicht abzuschätzen, denn es ist, wie man aus Gl. (12a) sieht,

$$u < 0 \quad f(0, u) = Q(u)/R(u). \quad (21)$$

Ist mit dieser „Polynommethode“ gegenüber einer Auflösung mit Determinanten viel gewonnen? Ich glaube, daß die Berechnung dieser Ausdrücke weniger langwierig als die von Determinanten ist. Außerdem erhält man in dieser Weise übersichtlichere Formeln. Wenn z. B. die einfallende Strahlung aus nur einer Richtung kommt (das ist ein kurzer Ausdruck dafür, daß nur ein Wert von $f(0, u_i)$ von Null verschieden ist), dann ist die Richtungsverteilung der austretenden Strahlung durch:

$$(u > 0) \quad f(0, -u) = P(-u)/(u + u_i) R(-u) \quad (22)$$

gegeben, was im Hinblick auf die einfache Bedeutung der Polynome $P(u)$, $R(u)$ ein außerordentlich einfaches Resultat ist.

Für das Problem B können wir ähnlich vorgehen; wir schreiben jetzt

$$i > 0 \quad 0 = f(0, u_i) = \frac{q}{1-\sigma} + \sum_{\alpha > 0} \frac{L_\alpha}{1-k_\alpha u_i}; \quad (23)$$

die rechte Seite dieser Gleichung kann aber geschrieben werden

$$\dots = Q(u_i)/R(u_i), \quad (23a)$$

wobei R dasselbe Polynom (17) wie früher ist, Q aber jetzt vom Grad n ist! Tatsächlich hat jetzt Q den Bedingungen

$$Q(u_1) = Q(u_2) = \dots = Q(u_n) = 0$$

zu genügen; daher muß Q bis auf einen konstanten Faktor mit dem Polynom $P(u)$, Gl. (18), übereinstimmen. Den Faktor kann man durch Vergleich des Koeffizienten von u^n bestimmen und man erhält

$$Q(u) = (-1)^n k_1 k_2 k_3 \dots k_n \frac{q}{1-\sigma} P(u). \quad (24)$$

Die austretende Strahlung nach Gl. (15) ist also

$$(u > 0) \quad f(0, -u) = (-1)^n k_1 k_2 \dots k_n \frac{q}{1-\sigma} \frac{P(-u)}{R(-u)}. \quad (25)$$

Offenbar besteht ein ganz einfacher Zusammenhang zwischen den Winkelverteilungen (22) und (25), eine Beziehung, die auch im Limes $n = \infty$ bestehen muß!

Ich glaube, daß auch andere ähnliche Fälle am besten nach dieser Polynommethode zu behandeln sind, was aber hier nicht geschehen soll¹⁾. Dagegen will ich, um die Konvergenz des Verfahrens zu prüfen, in der Figur die Winkelverteilung der aus Paraffin austretenden Neutronen (im Grenzfall $N = \infty$) nach der exakten Theorie von Schuchard-Uehling mit der Winkelverteilung nach Formel (25) vergleichen. Wie

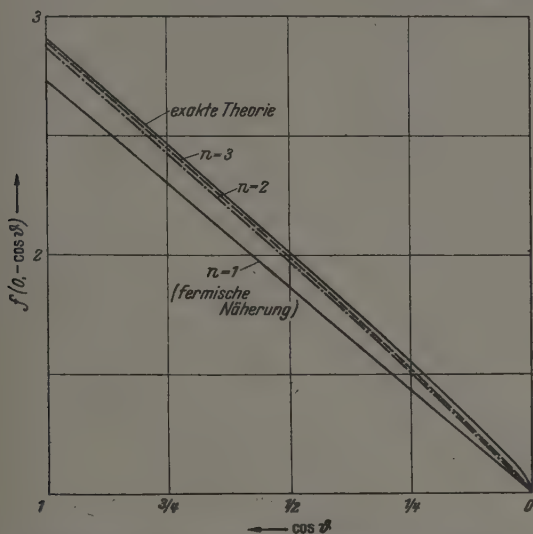


Fig. 1. Winkelverteilung der aus Paraffin austretenden Neutronen. Neutronenstrom pro Raumwinkeleinheit = Ordinate $\times \cos \vartheta$, wobei ϑ = Winkel zwischen Austrittsrichtung und Normale.

man sieht, ist die Näherung $n = 3$ schon recht genau: bei diesem Problem ist übrigens die Fermische Näherung ($n = 1$) schon praktisch hinreichend genau.

6. Die Albedo. Es sei mir erlaubt, nochmals auf dieses etwas erschöpfte Thema zurückzukommen. Es scheinen nämlich darüber noch teilweise unklare Ideen zu herrschen, obschon die Sachlage ganz einfach liegt. Man kann die Albedo als das Verhältnis der Zahl der reflektierten Neutronen zur Anzahl der einfallenden Neutronen definieren, also

$$\beta = - \int_{-1}^0 f(0, u) u \, du / \int_0^1 f(0, u) u \, du \quad (26)$$

¹⁾ Es ist mir nicht gelungen, im Fall D durch Anwendung der Polynommethode eine wesentliche Vereinfachung hervorzubringen.

(wobei f die Lösung von Problem A ist). Dabei hängt β noch von der Winkelverteilung der einfallenden Strahlung ab. Für eine isotrope einfallende Strahlung habe ich in „I“ elementar, aber streng bewiesen, daß $\beta = 1 - \frac{4}{\sqrt{3N}}$ bis auf höhere Potenzen von $N^{-1/2}$ ist. Diese Albedodefinition steht jedoch in keinem *exakten* Zusammenhang mit irgendeiner experimentell bestimmbaren Konstante; dies wurde besonders von Fermi u. a. betont¹⁾. Dagegen gibt es eine andere Albedo, die einen unmittelbaren experimentellen Sinn hat²⁾. Es ist mir daher unverständlich, daß man immer wieder auf die Definition (26) zurückkommt, z. B. um höhere Glieder der Reihenentwicklung mit recht gelehrten Methoden auszuwerten. Die zweite Definition der Albedo (vgl. „I“) lautet:

$$\beta_m = \frac{\int_{-1}^0 f(0, u) du}{\int_0^1 f(0, u) du}. \quad (27)$$

Man vergleicht also die *Strahlungsdichten*, nicht die *Teilchenzahlen*. Diese Albedo möchte ich „meßbare Albedo“ nennen, weil die Neutronendichte eben die Größe ist, die mit einem dünnen Absorber gemessen wird. Ich will ferner annehmen, daß $f(x, u)$ die Lösung von Problem A für eine *isotrope* einfallende Strahlung ist ($f = \text{Konst}$ für $u > 0$). Nun kann man sofort zeigen (vgl. „I“), daß die Lösung $f_1(x, u)$ von Problem B einfach durch

$$f_1(x, u) = \frac{q}{1 - \sigma} \{1 - f(x, u)\} \quad (28)$$

gegeben ist, wenn die Lösung f von Problem A so normiert wird, daß $f(0, u) = 1$, ($u > 0$) ist. Man findet sofort, daß die Strahlungsdichte ϱ_0 am Rand und die Strahlungsdichte ϱ_∞ im Innern des Paraffins im Verhältnis stehen:

$$\varrho_0/\varrho_\infty = \frac{1}{2} (1 - \beta_m). \quad (29)$$

Das ist die bekannte Fermische Relation, auf der die Messung der Albedo beruht. Unsere Albedo (27) stimmt also mit Fermis „experimenteller Albedo“ überein; ich ziehe jedoch die Bezeichnung „meßbare Albedo“ vor, denn es handelt sich durchweg um einen theoretischen Wert. Die hier (und in „I“) gegebene Ableitung der Gl. (29) ist von

¹⁾ E. Fermi, E. Amaldi u. G. C. Wick, Phys. Rev. **53**, 493, 1938. —

²⁾ Vgl. „I“; außerdem E. Fermi, Ric. Scient. VII—II, 13, 1936; vgl. auch E. Amaldi u. E. Fermi, Phys. Rev. **50**, 899, 1936; E. Fermi, E. Amaldi u. G. C. Wick, ebenda **53**, 493, 1938.

willkürlichen Annahmen über Winkelverteilungen usw. frei, was von den meisten Autoren übersehen worden zu sein scheint. Die Fermische Ableitung besitzt den Vorteil, daß sie den anschaulichen Inhalt der Beziehung klarlegt, ferner, daß sie ohne weiteres auf einen Absorber endlicher Dicke verallgemeinert werden kann¹⁾, was hier nicht möglich wäre, ohne auf das kompliziertere Problem D einzugehen.

Eine exakte Behandlung des Verhältnisses ϱ_0/ϱ_∞ (und zwar direkt, d. h. ohne die Beziehung mit β_m zu benutzen) haben Schuchard und Uehling gegeben²⁾. Die Beziehung

$$\varrho_\infty/\varrho_0 = \sqrt{N+1} + 1, \quad (30)$$

die sie finden, kann, wie ich nun zeigen will, elementar begründet werden.

Unter Vermeidung des Umweges über β_m gehe ich auf die Gln. (14) und (23a) zurück und berechne die Dichte

$$\begin{aligned} \varrho(0) &= \frac{2q}{1-\sigma} + \frac{2}{\sigma} \sum_{\alpha > 0} L_\alpha \\ &= \frac{2q}{1-\sigma} + \frac{2}{\sigma} \left[\frac{Q(0)}{R(0)} - \frac{q}{1-\sigma} \right] = -\frac{2q}{\sigma} + \frac{2}{\sigma} \frac{Q(0)}{R(0)}. \end{aligned}$$

Nach Gln. (23a) und (24) ist aber

$$\frac{Q(0)}{R(0)} = (-1)^n \prod_{i=1}^n k_\alpha \cdot \frac{q}{1-\sigma} \frac{P(0)}{R(0)} = \frac{q}{1-\sigma} \prod_{\alpha=1}^n \prod_{i=1}^n k_\alpha u_i. \quad (31)$$

Das Produkt aus den Wurzeln k_α läßt sich exakt auswerten, denn man kann sehr leicht das höchste und das niedrigste Glied der sich aus (9) ergebenden Gleichung $2n$ -ten Grades auswerten. Man findet:

$$\prod_{\alpha=1}^n \prod_{i=1}^n u_i k_\alpha^2 = 1 - \sigma = \frac{1}{N+1}. \quad (32)$$

Da nun $\varrho_\infty = 2q/(1-\sigma)$ ist, so hat man sogleich

$$\varrho_\infty/\varrho_0 = 1 + (1-\sigma)^{-1/2},$$

d. h. die Beziehung (30). Es ist bemerkenswert, daß die Beziehung schon vor dem Grenzübergang $n = \infty$ exakt herauskommt!

Exakt ist natürlich die Beziehung in dem Maße, wie die Gl. (3) dem reellen Tatbestand entspricht. Man kann z. B. einwenden³⁾, daß die Streuung nicht völlig isotrop ist⁴⁾; man kann jedoch wahrscheinlich

¹⁾ Vgl. die unter Anm. ⁶⁾, S. 702, zitierte Arbeit von Amaldi u. Fermi.

— ²⁾ E. A. Schuchard u. E. A. Uehling, Phys. Rev. 58, 611, 1940. —

³⁾ G. Placzek, ebenda 60, 166, 1941. — ⁴⁾ Vgl. Anm. ⁶⁾, S. 702, und insbesondere N. Arley, Kgl. Dansk. Vid. Selsk. Medd. 16, 1, 1938.

diesen Umstand in der Integralgleichung berücksichtigen, und doch eine Lösung nach der hier dargelegten Methode erhalten¹⁾.

Es sei noch erwähnt, daß es möglich ist, auch die (weniger interessante) Albedo (26) in ähnlicher Weise zu behandeln; man erhält jedoch keine so einfache Formel. Wenn die einfallende Strahlung isotrop ist, erhält man

$$\beta = 1 - \frac{4}{N} \left\{ \sum_{\alpha > 0} \frac{1}{k_{\alpha}} - \sum_{i > 0} u_i \right\} = 1 - \frac{4}{\sqrt{3}N} + \frac{2,816}{N} + \dots \quad (33)$$

Der Koeffizient von $1/N$ konnte nicht exakt bestimmt werden; er wurde daher aus der Näherung $n = 3$ bestimmt. Der exakte Wert²⁾ ist 2,86. Die gute Übereinstimmung scheint mir nochmals die Güte meines Verfahrens zu bestätigen.

7. *Einige Zahlenangaben.* Zum Schluß seien einige Formeln und Zahlen, die beim weiteren Gebrauch der Methode von Nutzen sein können, zusammengestellt.

Im Falle $n = 2$ ist:

$$P_{2n}(u) = \frac{35}{8} \left(u^4 - \frac{6}{7} u^2 + \frac{3}{35} \right) \quad u_{1,2}^2 = \left\{ \begin{array}{l} 0,11559, \\ 0,74155. \end{array} \right.$$

$$P(u) = (u - u_1)(u - u_2) = 0,29277 - u + 1,20112 u^2,$$

$$R(u) = 1 - \frac{\sqrt{35}}{3} u \left(1 - \sqrt{\frac{3}{N}} u \right) - \frac{2\sqrt{35}}{15} \frac{u}{N} + \dots,$$

wenn man höhere Potenzen von $N^{-1/2}$ vernachlässigt.

¹⁾ Darüber wird, wie ich hoffe, Herr Ageno bald berichten. — ²⁾ Nach De Groot u. Niessen, *Physica* 7, 199, 1940. Im Zusammenhang mit dieser Formel möchte ich auf ein Mißverständnis, das sich in vielen Arbeiten befindet, hinweisen. Fermi hat durch seine Annäherungsmethode für die Albedo das Resultat $\beta = 1 - 2/\sqrt{N}$ erhalten; und zwar bezieht er sich ausdrücklich auf die „meßbare“ Albedo β_m . In „I“ wurde dieselbe Beziehung gefunden mit der Einschränkung, daß in der exakten Formel auch weitere Glieder proportional N^{-1} , $N^{-3/2}$, ... auftreten sollen. Diese Behauptung steht mit den Gln. (29) und (30) völlig im Einklang. Dagegen hat man öfters geglaubt [vgl. z. B. Anm. ¹⁾ S. 702, und die erste unter Anm. ²⁾ S. 702, genannte Arbeit], aus Formel (33) folgern zu können, daß der Fermische Koeffizient 2 zu klein sei und daß daher die Fermische Beziehung zu kleine Werte von N liefere. Das tut sie auch, aber aus anderen Gründen, und zwar erstens weil es nicht erlaubt ist, das Glied von der Ordnung $1/N$ zu vernachlässigen (das haben Schuchard und Uehling betont), zweitens weil auch die „exakte“ Formel (30) dem Einwand von Placzek (*Phys. Rev.* 60, 166, 1941) unterliegt, drittens weil der Absorber, womit man q_{∞}/q_0 mißt, nicht unendlich dünn ist.

u_i	=	0,339 98		0,861 14
p_i	=	0,652 15		0,347 85
$P'(u_i)$	=	-0,521 15		+ 0,521 15
$P(-u_i)$	=	0,816 71		2,068 65
$R(u_i)$	=	$0,329\,55 - \sqrt{\frac{3}{N}}\,0,112\,04 -$ $-\frac{0,2682}{N} + \dots$		$-0,698\,18 + \sqrt{\frac{3}{N}}\,0,601\,23 -$ $-\frac{0,6793}{N} + \dots$
$R(-u_i)$	=	$1,670\,45 + \sqrt{\frac{3}{N}}\,0,567\,92 +$ $+\frac{0,2682}{N} + \dots$		$2,698\,18 + \sqrt{\frac{3}{N}}\,2,323\,50 +$ $+\frac{0,6793}{N} + \dots$

Die k -Wurzeln sind:

$$k_1 = \frac{\sqrt{35}}{3} \left(1 + \frac{2}{5N} + \dots \right) = 1,972\,03 \left(1 + \frac{2}{5N} + \dots \right),$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{3}{N}} \left(1 - \frac{9}{10} \frac{1}{N} + \dots \right).$$

Es können noch die folgenden Werte von Nutzen sein:

$$1/k_a = 0,507\,09 \left(1 - \frac{2}{5N} + \dots \right) \quad \sqrt{\frac{N}{3}} \left(1 + \frac{9}{10N} + \dots \right)$$

$$P(1/k_a) = -0,059\,165 + \frac{0,037\,92}{N} + \dots \quad \frac{N}{3} \left(1 - 1,2011 \sqrt{\frac{3}{N}} + \frac{2,678}{N} + \dots \right)$$

$$P(-1/k_a) = 1,1590 - \frac{0,4493}{N} + \dots \quad \frac{N}{3} \left(1 + 1,2011 \sqrt{\frac{3}{N}} + \frac{2,678}{N} + \dots \right)$$

$$R(-1/k_a) = 2 \left\{ 1 + \sqrt{\frac{3}{N}}\,0,507\,09 + \dots \right\} \quad 2 \left\{ \sqrt{\frac{N}{3}}\,1,972\,03 + 1 + \dots \right\}$$

$$R'(1/k_a) = -1,972\,03 + \sqrt{\frac{3}{N}}\,\frac{0,7888}{N} + \dots \quad 1,972\,03 - \sqrt{\frac{3}{N}} + \frac{0,7888}{N} + \dots$$

Wenn man genauer rechnen will, so kann man mit $n = 3$ rechnen. Dann ist

$$P_{2n}(u) = \frac{231}{16} \left\{ u^6 - \frac{15}{11} u^4 + \frac{5}{11} u^2 - \frac{5}{231} \right\}.$$

Die Gleichung für k lautet:

$$\frac{5}{231} k^6 - \frac{14}{55} k^4 + \frac{1}{3} k^2 = \frac{1}{N} \left\{ 1 - \frac{15}{11} k^2 + \frac{5}{11} k^4 - \frac{5}{231} k^6 \right\}.$$

Man hat:

$$P(u) = u^3 - 1,832\,30\,u^2 + 0,996\,84\,u - 0,147\,12,$$

$$R(u) = \left\{ 1 - 4,428\,16\,u + 3,924\,28\,u^2 + \frac{1}{N} (1,569\,71\,u^2 - 1,059\,06\,u) + \dots \right\} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{3}{N}} \left(1 - \frac{9}{10N} + \dots \right) u \right\};$$

u_i	$= 0,238\,62$		
p_i	$= 0,467\,91$		
$P'(u_i)$	$= 0,293\,21$		
$P(-u_i)$	$= -0,502\,90$		
$R(u_i)$	$= 0,166\,80 - \sqrt{\frac{3}{N}} 0,039\,80 - \frac{0,163\,33}{N} + \dots$		
$R(-u_i)$	$= 2,280\,09 + \sqrt{\frac{3}{N}} 0,544\,07 + \frac{0,3421}{N} + \dots$		
	$0,661\,21$		$0,932\,47$
	$0,360\,76$		$0,171\,32$
	$-0,114\,63$		$+ 0,188\,21$
	$-1,896\,39$		$- 3,480\,60$
	$-0,212\,25 + \sqrt{\frac{3}{N}} 0,140\,34 - \frac{0,013\,99}{N} + \dots$		$0,283\,04 - \sqrt{\frac{3}{N}} 0,263\,93 + \frac{0,377\,31}{N} + \dots$
	$5,643\,62 + \sqrt{\frac{3}{N}} 3,731\,61 + \frac{1,3865}{N} + \dots$		$8,541\,28 + \sqrt{\frac{3}{N}} 7,964\,48 + \frac{2,3524}{N} + \dots$

Die k -Wurzeln sind:

$$k_1 = 3,202\,95 \left\{ 1 + \frac{1}{N} 0,287\,69 + \dots \right\},$$

$$k_2 = 1,225\,21 \left\{ 1 + \frac{1}{N} 0,112\,30 + \dots \right\},$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{3}{N}} \left(1 - \frac{9}{10N} + \dots \right).$$

Man findet also:

$$1/k_a = 0,312\,21 \left(1 - \frac{0,287\,69}{N} + \dots \right)$$

$$P(1/k_a) = 0,015\,931 - \frac{0,013\,04}{N} + \dots$$

$$P(-1/k_a) = -0,667\,39 + \frac{0,218\,57}{N} + \dots$$

$$R(-1/k_a) = 2,765\,05 + \sqrt{\frac{3}{N}} \, 0,863\,29 - \frac{0,1342}{N} + \dots$$

$$R'(1/k_a) = -1,977\,73 + \sqrt{\frac{3}{N}} \, 0,617\,47 - \frac{0,7839}{N} + \dots$$

$$0,816\,19 \left(1 - \frac{0,112\,30}{N} + \dots \right)$$

$$-0,010\,408 - \frac{0,000\,397}{N} + \dots$$

$$-2,725\,04 + \frac{0,5487}{N} + \dots$$

$$7,228\,40 + \sqrt{\frac{3}{N}} \, 5,899\,72 + \frac{0,9170}{N} + \dots$$

$$1,977\,73 - \sqrt{\frac{3}{N}} \, 1,614\,20 + \frac{0,7839}{N} + \dots$$

$$\sqrt{\frac{N}{3}} \left(1 + \frac{9}{10N} + \dots \right)$$

$$\left(\frac{N}{3} \right)^{3/2} \left(1 - \sqrt{\frac{3}{N}} \, 1,832\,30 + \frac{5,6905}{N} + \dots \right)$$

$$-\left(\frac{N}{3} \right)^{3/2} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{N}} \, 1,832\,30 + \frac{5,6905}{N} + \dots \right)$$

$$N \, 2,616\,19 \left\{ 1 + \sqrt{\frac{3}{N}} \, 1,128\,40 + \frac{1}{N} \, 2,9645 + \dots \right\}$$

$$-\sqrt{\frac{N}{3}} \, 3,924\,28 + 4,428\,16 - \sqrt{\frac{3}{N}} \, 2,7005 + \dots$$

Nachtrag. Herr Ageno hat mir inzwischen folgendes Resultat freundlich mitgeteilt. Die Arleysche Winkelverteilung für den Zusammenstoß eines Neutrons gegen ein Paraffin-Proton läßt sich ziemlich gut durch eine Formel: $1 + a \cos \vartheta$ darstellen, mit etwa $a = 0,4$. Setzt man diese Verteilung in die Integralgleichung der Diffusion ein, und löst man die Gleichung in der Näherung $n = 3$, so erhält man:

$$\frac{\varrho_{\infty}}{\varrho_0} = \sqrt{N} \cdot 0,931 + 1,029 + \frac{3,73}{\sqrt{N}} + \dots$$

anstatt Gleichung (30). Dadurch wird der aus Albedo-Messungen entnommene Wert von N um etwa 14 % erhöht, in besserer Übereinstimmung mit anderen Methoden. Eine nähere Diskussion soll aber Herrn Ageno überlassen werden.

Der Einfluß der Raumladung auf die Abbildungseigenschaften magnetischer Sektorfelder *).

Von W. Walcher in Göttingen.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 24. März 1943.)

Es wird gezeigt, daß ein Bündel geladener Teilchen, das auf eine Brennnlinie zielt, trotz des abstoßenden Einflusses der Raumladung in einer anderen Brennnlinie fokussiert werden kann. Die Fokussierungsbedingungen werden für den feldfreien Raum und für magnetische Sektorfelder angegeben, die Erweiterung der Theorie auf allgemeine Sektorfelder an einem Beispiel besprochen. Folgerungen für den Bau von Massenspektrographen, insbesondere solchen für Isotopentrennung, werden gezogen.

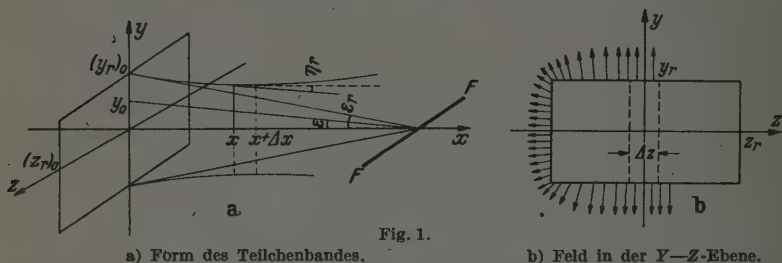
1. Einleitung. Die Theorie der ionenoptischen Zylinderlinsen und Prismen wurde von Herzog¹⁾ in einer sehr übersichtlichen Weise entwickelt; mit Hilfe der in seiner Arbeit abgeleiteten Beziehungen läßt sich jede zum Zwecke der Massenanalyse geeignete Kombination eines elektrischen und magnetischen Feldes auf geometrisch-optischer Grundlage berechnen. Versucht man jedoch, einen Massenspektrographen für Isotopentrennung zu konstruieren, von dem die Bewältigung einer sehr hohen Ionenstromdichte verlangt wird, so sieht man, daß die von Herzog abgeleiteten Beziehungen nicht ausreichen, da sie die gegenseitige Beeinflussung der Strahlteilchen, also die Raumladungseffekte, nicht berücksichtigen. Es soll im folgenden eine Erweiterung der Herzogschen Theorie unter Berücksichtigung dieser Effekte gegeben werden.

2. Die neu hinzukommenden Kräfte und ihr Einfluß auf ein Teilchenband in einem von äußeren Feldern freien Raum. In einem Bündel bewegter geladener Teilchen treten zwei Kräfte auf, die eine zusätzliche Beschleunigung der Strahlteilchen bewirken: 1. Die gegenseitige elektrostatische Abstoßung der Teilchen und 2. die elektrodynamische Anziehung der elementaren Strömfäden. Da es sich in der Massenspektroskopie immer um schwere Teilchen handelt, kann man leicht abschätzen, daß für die in Frage kommenden Beschleunigungsspannungen die Anziehungskraft vernachlässigbar klein gegen die elektrostatische Abstoßung ist; es wird daher weiterhin nur diese berücksichtigt.

* Teil einer Kieler Habilitationsschrift. Die Arbeit wurde am Institut für Experimentalphysik der Universität Kiel ausgeführt, ihre Veröffentlichung hat sich aus äußeren Gründen längere Zeit verzögert.

Die in der Massenspektroskopie verwendeten Kombinationen von Sektorfeldern wirken wie Zylinderlinsen¹⁾, d. h. die Teilchenbündel werden in einer Richtung fokussiert, so daß also in der Nähe ihres engsten Querschnitts ein bandförmiger Strahl vorliegt. Deshalb soll zunächst ein flaches Band von Teilchen, wie es z. B. bei der Abbildung eines Spaltes mit achsennahen Strahlen auftritt, betrachtet werden. Die Abweichungen, die an den Ergebnissen dieser Rechnung dadurch hervorgerufen werden, daß das Teilchenbündel einen beliebigen Querschnitt besitzt, sollen später noch diskutiert werden.

In Fig. 1 ist ein solches Teilchenband dargestellt. An der Stelle $x = 0$ trete in der y - z -Ebene durch den Spalt der Höhe $2 y_{r_0}$ und



der Breite $2 z_{r_0}$ ein Strom von n Teilchen pro Sekunde (Masse m_0 , Geschwindigkeit v_0 , Stromstärke $i = neZ$, wobei e = Elementarladung, Z = Wertigkeit der Ionen) mit der homogenen Stromdichte $n_1 = n/2 y_{r_0} \cdot 2 z_{r_0}$. Im Falle vernachlässigbarer Raumladungswirkung sollen die *geraden* Teilchenbahnen in den Ebenen $z = \text{const}$ verlaufen und sich in der Entfernung $x = f$ vom Spalt zu einer Brennnlinie FF vereinigen. Bei wachsender gegenseitiger Abstoßung der Teilchen infolge wachsender Raumladung werden jedoch die Teilchenbahnen gekrümmt sein, etwa in der in Fig 1a skizzierten Weise. Der Winkel, den die Bahntangente an irgendeiner Stelle x mit der x -Achse bildet, sei η , bzw. η_r , wenn es sich um eine Randbahn handelt. Zur Charakterisierung der Anfangsbedingungen sollen in diesem Fall die Abszisse der Brennnlinie f , der Öffnungswinkel ε und die Eintrittshöhe y_0 (bzw. ε_r und y_{r_0} für eine Randbahn) dienen. Der Vektor des elektrischen Feldes einer so vorgegebenen Raumladungsverteilung liegt, solange $\cos \eta \approx 1$ ist — nur solche Bahnen sollen betrachtet werden — in der y - z -Ebene. Seine ungefähre Größe und Richtung in dieser Ebene ist in Fig. 1b

¹⁾ R. Herzog, ZS. f. Phys. 89, 447, 1934.

skizziert. In der Mitte des Bandes (für kleine z) hat die Feldstärke nur eine y -Komponente, während an den seitlichen Rändern auch z -Komponenten auftreten. Ist nun $z_r \gg y_r$, so wird über einen weiten Bereich der z -Koordinate die Feldstärke $E = E_y$ konstant sein und ebenso groß, wie wenn das Band — bei gleicher Stromdichte — in der z -Richtung unendlich ausgedehnt wäre. Das Problem wird damit zu einem ebenen, und soll weiterhin als solches behandelt werden. Die Feldstärke am oberen bzw. unteren Rande des Bandes ist unter diesen Voraussetzungen leicht anzugeben. Da durch jeden Querschnitt des Bandes der durch den Spalt tretende Strom n fließen muß, ist die Ladung in einem Prisma mit der Grundfläche $\Delta x \cdot \Delta z$ und der Höhe $2 y_r$ (vgl. Fig. 1 b)

$$Q = \frac{n \cdot Z \cdot e}{v_0 \cdot 2 z_{r0}} \Delta x \Delta z = n_1 \frac{Z \cdot e}{v_0} 2 y_{r0} \cdot \Delta x \cdot \Delta z \quad \text{ESE } ^1)$$

und damit der elektrische Fluß aus diesem Prisma (die Feldstärke hat nach Voraussetzung nur eine y -Komponente)

$$2 E_y \cdot \Delta x \Delta z = 4 \pi Q$$

oder

$$E = E_y = 2 \pi \frac{n Z e}{v_0 2 z_{r0}} = 4 \pi \frac{n_1 Z e}{v_0} y_{r0}, \quad (1)$$

demzufolge wirkt auf ein am Rande sich bewegendes Teilchen die Kraft

$$K_{y_r} = 4 \pi \frac{n_1 Z^2 e^2}{v_0} y_{r0}, \quad (2)$$

die, wie man erkennt, unabhängig von der y -Koordinate des Teilchens ist, sofern dieses nur immer am Rande bleibt. Das Randteilchen wird unter dem Einfluß dieser konstanten Kraft statt der geradlinigen Bahn eine Parabel beschreiben, deren Bahngleichung sofort anzugeben ist.

Bezeichnet man mit

$$k = \frac{4 \pi n_1 Z^2 e^2}{m v_0^3} \quad (3)$$

oder, falls die Teilchen Elektronen sind:

$$k_E = 95,5 \frac{j_0}{\sqrt{U^3}},$$

wo j_0 = Stromdichte im Spalt in mA/cm², U = Beschleunigungsspannung in Volt oder, falls die Teilchen Ionen sind:

$$k_I = \frac{j_0}{7800} \sqrt{\frac{M}{U_B}} \frac{1}{\sqrt{Z}},$$

¹⁾ Falls nicht anders vermerkt, sind alle Gleichungen in ESE geschrieben.

wo j_0 = Stromdichte im Spalt in $\mu\text{A}/\text{cm}^2$, U_B = Beschleunigungsspannung in kV, M = Massenzahl, Z = Wertigkeit der Ionen, so lautet die Bahngleichung der Randbahn:

$$y_r = y_{r_0} \left(1 - \frac{x}{f} + \frac{k}{2} x^2 \right). \quad (4)$$

Das Band hat also, je nachdem, ob $2kf^2 \leq 1$, eine Brennnlinie an der Stelle

$$x = \frac{1}{kf} (1 - \sqrt{1 - 2kf^2}) \quad (5)$$

oder an der Stelle

$$x_{\min} = \frac{1}{kf} \quad (5a)$$

einen engsten Querschnitt der relativen Höhe:

$$R_{\min} = \frac{(y_r)_{\min}}{y_{r_0}} = 1 - \frac{1}{2kf^2}, \quad (6)$$

von dem aus die Teilchen wieder auseinanderlaufen¹⁾ (vgl. Fig. 2, Bahn P).

Würde man den Spalt bei konstant gehaltener Stromdichte auf $2y_0$ verengen, so wäre das an der Stelle y_0 eintretende Teilchen Randteilchen, auf das längs der ganzen Bahn die Kraft

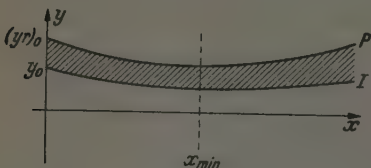


Fig. 2. Gestalt der Teilchenbahnen mit Berücksichtigung der Raumladungswirkung.

$$K_y = 4\pi \frac{n_1 Z^2 e^2}{v_0} y_0 \quad (2a)$$

wirkt, die zu der Eintrittshöhe y_0 proportional ist. Alle Ordinaten einer zugehörigen Bahn sind demnach proportional verkleinert (Fig. 2, Bahn I). Da nun Ladungen, die

außerhalb der Bahn I fließen, d. h. also das in Fig. 2 schraffierte Teilband, zur Feldstärke auf I nichts beitragen, gelten Gl. (4), (5) und (6) auch dann, wenn I eine innere Bahn ist.

Es ist noch zu betrachten, wieweit der in Fig. 1 dargestellte Fall realisierbar ist. Man weiß, daß in der Elektronenoptik wegen der richtenden Wirkung des Beschleunigungsfeldes die innere Apertur eines von einem Quellpunkt ausgehenden Bündels sehr klein gemacht werden kann, und zwar von der Größenordnung²⁾

$$\alpha \sim \sqrt{\frac{u}{U}}$$

¹⁾ Es sei noch einmal vermerkt, daß Gl. (4), (5) und (6) nur für großes f (kleine ϵ) gelten. — ²⁾ Brüche-Scherzer, Geometrische Elektronenoptik, S. 100. Berlin 1934.

(u = seitliche Austrittsgeschwindigkeit der Teilchen aus der Quelle in e-Volt, U = Beschleunigungsspannung). Demgemäß würden z. B. zum Randstrahl des oben betrachteten Bündels noch weitere um $\pm \alpha$ in ihrer Richtung verschiedene Strahlen hinzukommen.

Wegen der Kleinheit von α bleibt jedoch z. B. der Ort des minimalen Querschnitts x_{min} erhalten, während zu dessen Breite y_{min} noch Glieder von der Größe $\pm \alpha \cdot x_{min}$ hinzutreten.

Die Betrachtung dieser Ziffer zeigt, daß die Fokussierung eines im feldfreien Raum verlaufenden Teilchenbandes bei vorhandener Raumladungswirkung nur bei ganz bestimmter Wahl der Brennweite f möglich ist, und gibt deren Zusammenhang mit der Raumladungskonstante k ¹⁾.

3. Die Bewegungsgleichung der Teilchen eines Bandes im magnetischen Sektorfeld unter Berücksichtigung der Raumladungsabstoßung. Das Sektorfeld sei — nach dem Vor-

gang von Herzog — begrenzt (vgl. Fig. 3) durch die Ebenen y' und y'' , die den Winkel Φ miteinander bilden; im Raume zwischen y' und y'' herrsche ein Magnetfeld H senkrecht zur Zeichenebene (in der z -Richtung). Durch die Eintrittsebene y' soll mit den gleichen Anfangsbedingungen wie in Ziffer 2 (Fig. 1) ein Teilchenband das Sektorfeld betreten; die dort eingeführten

Bezeichnungen sollen analoge Bedeutung besitzen. Die magnetische Feldstärke H sei so gewählt, daß das in der x' -Richtung bei $y' = 0$ eintretende Teilchen (Bandmitte) einen Kreis vom Radius a beschreibe, also daß

$$\frac{m_0 v_0^2}{a} = \frac{e v_0 H}{c} \quad (7)$$

ist. Durch diese Bedingung ist bei vorgegebenem m_0 , v_0 , a die Größe von H festgelegt. Die Bahn eines beliebigen Teilchens innerhalb des Sektorfeldes soll durch Polarkoordinaten r , φ beschrieben werden.

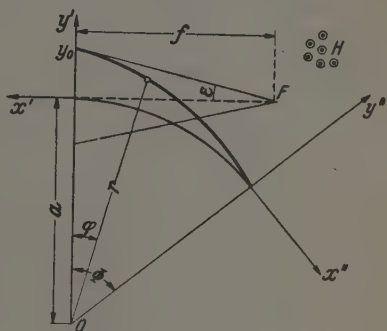


Fig. 3. Darstellung des Sektorfeldes.

¹⁾ Für ein ursprünglich kreiskegelförmiges Teilchenbündel, das aus Symmetriegründen im feldfreien Raum stets seinen Kreisquerschnitt beibehält, ist eine Fokussierung in keinem Fall möglich. Für Elektronenstrahlen haben v. Borries und Dosse, Arch. f. Elektrotechn. 32, 221, 1938, für diesen Fall die Bahnleichung und die Gleichung für den engsten Querschnitt abgeleitet.

Auf das an der Stelle y_0 eintretende Teilchen wirken unter diesen Voraussetzungen in radialer Richtung 1. die Zentrifugalkraft $m_0 r \dot{\varphi}^2$, 2. die Lorentz-Kraft $e r \dot{\varphi} \frac{H}{c}$ und 3. die konstante Raumladungskraft $4 \pi \frac{n_1 Z^2 e^2}{v_0} \cdot y_0$ [Gl. (2)], die in der betrachteten Näherung die Richtung des Radiusvektors hat, wie eine genauere Betrachtung ergibt. Die Bewegungsgleichung eines solchen Teilchens in der r -Koordinate lautet demnach:

$$m \ddot{r} = m r \dot{\varphi}^2 - e r \dot{\varphi} \frac{H}{c} + 4 \pi \frac{n_1 Z^2 e^2}{v_0} y_0. \quad (8)$$

Betrachtet man Bahnen, die in der Nachbarschaft der Kreisbahn $r = a$ verlaufen, so genügt die Entwicklung $r = a(1 + \zeta)$ (9), der Abstand einer solchen Bahn vom Kreis $r = a$ an irgendeiner Stelle φ ist also $y = a\zeta$; die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ eines solchen achsennahen Teilchens läßt sich dann, weil der Winkel η der Teilchenbahn gegen die Kreisbahn $r = a$ immer klein bleibt, schreiben:

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0 \cos \eta}{r} \approx \frac{v_0}{r} = \frac{v_0}{a(1 + \zeta)} \approx \frac{v_0}{a} (1 - \zeta) \quad (10)$$

Führt man (9) und (10) in (8) ein, so erhält man nach einigen Umformungen die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\zeta} = \frac{v_0^2}{a^3} (-\zeta + k a^2 \zeta_0), \quad (11)$$

wo k durch Gleichung (3) bzw. (3a) oder (3b) gegeben ist.

Gl. (11) ist die Differentialgleichung einer Schwingung mit konstanter erzwingender Kraft; mit den Anfangsbedingungen:

$$t = 0; \quad \zeta = \zeta_0; \quad \dot{\zeta} = -\frac{v_0}{a} \cdot \frac{y_0}{f} \quad (12)$$

lautet ihr Integral (wenn man $y = a\zeta$ setzt):

$$y = y_0 \left[k a^2 + (1 - k a^2) \cos \varphi - \frac{a}{f} \sin \varphi \right]. \quad (13)$$

Diese zunächst nur für die Randbahn abgeleitete Beziehung gilt wieder für alle inneren Bahnen, was in analoger Weise wie in Ziffer 2 nachzuweisen ist.

Die durch Gl. (13) dargestellte Sinuslinie kann für $\varphi > 0$ zum Schnitt mit der φ -Achse gebracht werden, und zwar unabhängig von der Eintrittshöhe y_0 , wenn man

$$k a^2 + (1 - k a^2) \cos \varphi - \frac{a}{f} \sin \varphi = 0$$

¹⁾ Herzog kommt durch Integration des Momentensatzes und nachträgliche Einführung der entsprechenden Näherung zu demselben Ausdruck.

macht, d. h. wenn man

$$f = \frac{a \cdot \sin \varphi}{k a^2 + (1 - k a^2) \cos \varphi} \quad (14)$$

wählt. In diesem Schnittpunkt werden sich alle Bahnen des Teilchenbandes treffen, das Band wird an dieser Stelle fokussiert.

Soll der Fokus gerade am Ende des Sektorfeldes ($\varphi = \Phi$) liegen, so ist insbesondere

$$f = \frac{a \sin \Phi}{k a^2 + (1 - k a^2) \cos \Phi} \quad (14a)$$

zu wählen.

In Anwendung auf das 90°-Sektorfeld¹⁾ ergibt sich daraus eine Brennweite für das eintretende Teilchenband von

$$f = \frac{a}{k} \cdot \frac{1}{a^2} \quad (14b)$$

Die Bedingung (14) bzw. (14a) oder (14b) kann immer erfüllt werden. Daraus ergibt sich, daß es im magnetischen Sektorfeld immer möglich ist, einen bandförmigen Strahl zu fokussieren, gleichviel wie groß die Raumladung ist²⁾.

4. Folgerungen. Für die Konstruktion von Massenspektrographen für Isotopentrennung ergibt sich aus dem Bisherigen eine wichtige Erkenntnis. Damit bei hoher Stromdichte eine Fokussierung möglich ist, soll das Teilchenbündel möglichst wenig im feldfreien Raum verlaufen. Die aus der Ionenquelle austretenden Teilchen müssen demnach durch eine „elektrische Immersionslinse“ beschleunigt und gleichzeitig konvergent gemacht werden, und unmittelbar hinter der Linse in das Sektorfeld treten, an dessen Ende der Auffänger steht. Die Befriedigung der Gl. (14a) kann dabei durch geeignete Wahl der Linsenspannung des Immersionssystems geschehen.

Für die Wahl des Radius a ergibt sich ebenfalls eine wichtige Folgerung. Will man — damit die obige Näherung gültig bleibt — über ein gegebenes ε ($\operatorname{tg} \varepsilon = y_0/f$) nicht hinausgehen, so muß man bei Vergrößerung von a auf $a' = p \cdot a$ die Größe f/a konstant halten, also nach (14b) ka^2 konstant machen. Daneben muß noch die Gl. (7) bestehen. Bedenkt man, daß man aus Gründen des Auflösungsvermögens die Beschleunigungsspannung schon an die betriebstechnische Grenze der Ionenquelle gelegt hat, so leitet man bei konstanter Spannung für den Strom $i' = (1/p) \cdot i$ ab: die Trennleistung des Spektrographen geht also in diesem Falle umgekehrt mit dem Radius a .

¹⁾ Vgl. z. B. W. Walcher, ZS. f. Phys. 108, 376, 1938. — ²⁾ Soweit natürlich die Voraussetzungen der Näherungsrechnung noch gelten.

5. *Berücksichtigung der endlichen Breite des Teilchenbandes.* In Fig. 1b ist die ungefähre Verteilung der elektrischen Feldstärke am Rande eines rechteckigen Bandes aufgezeichnet. In den bisherigen Betrachtungen haben wir so gerechnet, als ob das Band unendlich breit sei, die Feldstärke also nur eine y -Komponente habe. Aus Fig. 1b erkennt man jedoch, daß bei endlicher Spaltbreite die z -Komponente der Feldstärke eine wesentliche Rolle spielt. Man kann nun, um diesen Einfluß zu übersehen, zunächst einmal das Band in der y -Richtung unendlich ausgedehnt annehmen; dann wirkt auf die Teilchen eine Kraft in der z -Richtung, die proportional ihrer Eintrittshöhe z_{r_0} ist [Gl. (2)]. Auf Grund dieser Kraft laufen die Teilchen in der z -Richtung auseinander, und zwar, da im Sektorfeld in der z -Richtung keine weitere Kraft wirkt, auf Parabelbahnen gemäß Ziffer 2, wobei die z -Koordinaten dieser Bahnen wieder proportional den Eintrittshöhen z_0 sein werden. Auf diese Weise kommt also eine gleichmäßige Verdünnung der Raumladung durch Auseinanderlaufen in der z -Richtung zustande. Die zunächst noch gemachte Voraussetzung unendlicher Ausdehnung des Bandes in y -Richtung ändert an diesem Tatbestand qualitativ nichts, durch ihre Aufhebung wird nur die Größe der z -Komponente der Kraft verringert¹⁾.

Man kann diesem Tatbestand dadurch Rechnung tragen, daß man in Gl. (1) bzw. (2) z_r zeitlich zunehmen läßt. Da eine quadratische Zunahme zu Integrationsschwierigkeiten führt, soll die Zunahme durch eine e -Funktion angenähert werden:

$$z_r = z_{r_0} \cdot e^{-\mu t} = z_{r_0} e^{-\mu' \varphi}, \quad (15)$$

worin wegen $\varphi \approx \frac{v_0}{a} \cdot t$ $\mu = \frac{v_0}{a} \cdot \mu'$ ist. Führt man dies in die Rechnung ein, so erhält man die Differentialgleichung:

$$\ddot{\zeta} = \frac{v_0^2}{a^2} (-\zeta + k a^2 \zeta_0 \cdot e^{-\mu t}), \quad (16)$$

deren Lösung mit den Anfangsbedingungen (12) lautet:

$$y = y_0 \left[(1 - k') \cos \varphi + k' \mu' \sin \varphi - \frac{a}{f} \sin \varphi + k' e^{-\mu' \varphi} \right]. \quad (17)$$

Mit

$$k' = \frac{k a^2}{1 + \mu'^2}, \quad \mu' = \frac{1}{\varphi} \ln \frac{(z_r)_\varphi}{(z_r)_0};$$

¹⁾ Wegen der an den Ecken auftretenden Störungen s. unten.

aus (17) läßt sich ebenso wie aus (13) für ein gewähltes $\varphi = \Phi$ ein f finden, derart, daß alle Teilchen für dieses Φ fokussiert werden¹⁾.

An den bisherigen Betrachtungen ist nun insofern noch eine weitere Korrektur anzubringen, als ja bei endlicher Spaltbreite die y -Komponente der Feldstärke nach größeren z -Werten kleiner wird (Fig. 1 b). Dies bewirkt, daß das Teilchenband nicht mehr zu einer „Brennlinie“ fokussiert werden kann, sondern daß diese an den Rändern mehr oder weniger verbreitert sein wird.

6. *Erweiterung der Theorie auf elektrisch-magnetische Sektorfelder unter Berücksichtigung einer Massen- und Geschwindigkeitsstreuung.* Herzog hat seine Theorie für den allgemeinen Fall der Überlagerung eines homogenen magnetischen und eines radialen elektrischen Sektorfeldes durchgeführt, wobei die Geschwindigkeit wie die Masse der Teilchen einen gewissen kleinen Bereich einnehmen durften:

$$v = v_0 (1 + \beta); \quad m = m_0 (1 + \gamma).$$

Auch für diesen allgemeinen Fall läßt sich — mit einer Einschränkung — die Bahngleichung aufstellen; ihre Differentialgleichung lautet:

$$\ddot{\zeta} = \frac{v_0^2}{a^2} \kappa^2 \left(\delta - \zeta + \frac{k}{\kappa^2} a^2 \zeta_0 \right)^2.$$

Soweit es sich nämlich um die *Randstrahlen* des *gesamten* Bandes handelt, liefert diese Differentialgleichung, auch bei Massen- oder Geschwindigkeitsaufspaltung, die Bahnkurve, da es ja nur auf die Gesamtladung des Bandes und nicht auf deren Anordnung im Band ankommt; eine Lösung für die inneren Bahnen jedoch, wie beim massen- und geschwindigkeitshomogenen Band, ist nicht ohne weiteres anzugeben. In manchen Fällen erlaubt aber die Lösung der Differentialgleichung (18) bereits wichtige Aussagen über die Breite des Bandes an der engsten Stelle.

Bei den meisten technischen Ionenquellen ist Geschwindigkeits-homogenität im Strahl nicht zu erlangen. Deshalb soll als Beispiel zu Gl. (18) ein massenhomogener Strahl im reinen Magnetfeld auf den Einfluß der Geschwindigkeitsinhomogenität untersucht werden.

¹⁾ Eine numerische Auswertung ist in den meisten Fällen ohne Bedeutung, da im Experiment doch so vorgegangen wird, daß die Linsenspannung (f) so lange verändert wird, bis Fokussierung am Ende des Sektorfeldes stattfindet; vgl. W. Walcher, l. c. — ²⁾ Wegen der Bedeutung der einzelnen Größen wird auf die Arbeit von Herzog verwiesen. Die Differentialgleichung gilt wieder — analog Ziff. 2 — für ein unendlich breites Band. Die Betrachtungen von Ziff. 5 gelten entsprechend.

Für diesen Fall ist nach Herzog $\kappa = 1$ und $\delta = \beta$. Damit und mit den Anfangsbedingungen (12) lautet die Lösung der Gl. (18) für den oberen Randstrahl $\beta = \frac{1}{2} \beta_{max}$

$$\frac{y}{y_0} = \left(1 - \frac{\alpha \beta_{max}}{2 y_0} k a^2\right) \cos \varphi - \frac{\alpha}{f} \sin \varphi + k a^2 + \frac{\alpha \beta_{max}}{2 y_0} = f(\varphi), \quad (19)$$

während für den unteren Randstrahl der gleiche Ausdruck steht, wenn man nur y durch $-y$ ersetzt: $y/y_0 = -f(\varphi)$. Durch Addition dieser beiden Ausdrücke unter Berücksichtigung des Vorzeichens erhält man daraus die Breite b des Bandes in Abhängigkeit von φ :

$$b/2 y_0 = b/b_0 = f(\varphi).$$

Für den bereits experimentell realisierten Fall $\Phi = \pi/2$ wird am Ende des Sektorfeldes

$$b = -b_0 \frac{\alpha}{f} + k a^2 b_0 + \alpha \beta_{max}.$$

Die Bildbreite wird ein Minimum, wenn $-b_0 \frac{\alpha}{f} + k a^2 b_0 = 0$, also wenn die Bedingung (14b) erfüllt ist¹⁾; ihr Betrag ist dann $b = \alpha \cdot \beta_{max}$ ebenso groß wie im raumladungsfreien Fall.

¹⁾ Man darf nicht einfach $b = 0$ setzen, was mathematisch eine Lösung ergibt. Dann bleibt nämlich die Bahn nicht mehr Randbahn und damit sind die Voraussetzungen von (18) bzw. (19) überschritten.

Über die bei der Uranspaltung auftretenden Strontium- und Yttrium-Isotope.

Von Otto Hahn und Fritz Strassmann in Berlin.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 10. Mai 1943.)

Es wird ein neues Yttriumisotop von 20 Minuten H. Z. nachgewiesen. Dieses Yttrium läßt sich auch aus „hochemanierenden“ Uranpräparaten als Umwandlungsprodukt eines Kryptonisotops gewinnen. Die Versuche zeigen, daß dieses Yttrium schon nach ganz kurzer Bestrahlung des Urans in erheblicher Intensität entsteht. Seine direkte Muttersubstanz, ein Isotop des Strontiums, muß also kurzlebig sein. Die Versuche, dieses hypothetische Strontiumisotop aus schnell abgeschiedenen Strontiumgemischen unmittelbar oder bei Reihenversuchen mit jedesmal vom sich nachbildenden Yttrium befreiten Strontium nachzuweisen, schlugen fehl. Die Existenz des kurzlebigen Strontiums wurde aber bewiesen durch das im rasch abgetrennten Strontium sich bildende 20 Minuten-Yttrium. Das neue Strontium hat eine H. Z. von $2 \pm 0,5$ Minuten. — Es wurden die Halbwertszeiten von einigen Strontium- und Yttriumisotopen genauer als bisher festgelegt.

1. *Vorbemerkungen.* Bei den unter der Einwirkung von Neutronen auf Uran eintretenden Kernspaltungen entstehen offenbar eine besonders große Anzahl von Edelgas- und Erdalkaliisotopen, also einerseits Vertreter des Kryptons und Xenons, andererseits des Bariums und Strontiums. Den bisherigen Stand unserer Kenntnisse über die Barium- und die daraus entstehenden Lanthaniso- tope haben wir vor einiger Zeit dargestellt¹⁾. Über die entsprechenden Strontium- und Yttriumisotope wurden in einer zusammenfassenden Darstellung „Über die experimentelle Entwirrung der bei der Spaltung des Urans auftretenden Elemente und Atomarten“²⁾ die neuesten Ergebnisse mitgeteilt, die aber zum Teil noch vorläufigen Charakter hatten.

Zusammenfassend wurde folgendes Schema aufgestellt:

Tabelle 1.

^{36}Kr		^{37}Rb		^{38}Sr		^{39}Y		^{40}Zr
?	→	?	→	7 Min.	→	9 Std.	→	?
sehr kurz	→	80 Sek.	→	2,7 Std.	→	3,5 Std.	→	stabil
?	→	?	→	8,5 Std.	↔	57 Tage	} →	?
						50 Min.		
2,5 Min.	→	15,4 Min.	→	55 Tage	→	stabil		
			>	2 Jahre	→	60 Std.	→	stabil

¹⁾ O. Hahn u. F. Strassmann, Naturwissensch. 30, 324, 1942. —

²⁾ O. Hahn, F. Strassmann u. H. Götte, Abhandl. d. Akad. d. Wiss. 1942, Math.-naturw. Kl. Nr. 3.

In der Zwischenzeit haben wir die Versuche weiter fortgeführt. Dabei konnte je ein neues Yttrium- und Strontiumisotop aufgefunden werden. Zugleich ließen sich einige Halbwertszeiten genauer als bisher angeben¹⁾.

Bei der im folgenden näher beschriebenen Darstellung unserer Arbeitsweise und ihrer Ergebnisse soll zunächst beim Yttrium begonnen werden und dann erst das Strontium folgen, weil die recht komplexen Vorgänge auf diese Weise etwas übersichtlicher werden.

2. *Ein neues Yttriumisotop von 20 Min. H.Z.* Wird Uran einige Minuten lang bestrahlt und dann das Yttrium möglichst schnell abgeschieden, dann erhält man für das Yttrium zunächst einen ziemlich schnellen Abfall, der allmählich in den Abfall des 3,5 Stunden- und des 9 Stunden-Isotops übergeht. Es sei gleich hier bemerkt, daß der Wert von 9 Stunden für das letztere zu niedrig ist. Bei einer ganzen Reihe von Versuchen, bei denen das langlebige Isotop in großer Intensität anwesend war, hat sich ein Wert von 11,6 Stunden als richtiger herausgestellt.

Die Reindarstellung des Yttriums aus dem Uran sei an folgendem Beispiel beschrieben:

70 g Uranylнитrat wurden in ätherischer Lösung durch Schütteln mit Wasser weitgehend vom Uran X befreit und dann in der Hochspannungsanlage des Max-Planck-Instituts 4 Min. lang mit verlangsamten Neutronen bestrahlt. Dann wurde zweimal kurz mit einigen Kubikzentimetern Wasser geschüttelt, wobei die Spaltprodukte zusammen mit nur wenig Uran in die wässrige Phase gehen. Zur Entfernung des Urans (und des El. 93) wurde die wässrige Lösung nach dem Versetzen mit einigen Milligramm Eisen mit Ammoniak plus Ammoncarbonat behandelt. Das Uran geht in Lösung, das Yttrium bleibt mit vielen anderen Spaltprodukten beim Eisenhydroxyd. Nach einmaligem Umfällen mit Ammoniak und Ammoncarbonat war das Eisen uranfrei. Der Eisenhydroxydniederschlag wurde nun in Salzsäure gelöst und nach Zugabe von je 100 bis 200 mg Barium- und Strontiumchlorid mit CO₂-freiem Ammoniak gefällt. Hierbei bleiben die Erdalkaliisotope in Lösung. Eine zweite Umfällung entfernte die letzten Spuren der Erdalkalimetalle. Der das Yttrium enthaltende Eisenniederschlag wurde in HCl gelöst, die Lösung mit 10 mg Wismutchlorid versetzt und

¹⁾ Eine kurze Zusammenstellung unserer Ergebnisse wurde bereits in den Naturwissensch. 31, 249, 1943 veröffentlicht.

das Wismut mit Schwefelwasserstoff gefällt. Auch diese Fällung wurde zweimal wiederholt, um die mit Schwefelwasserstoff fällbaren Spaltprodukte restlos zu entfernen. Das Filtrat wurde mit je 20 mg Zirkon, Lanthan und Yttrium gefällt, und dann das Zirkon in kongoneutraler Lösung mit Ammonthiosulfat gefällt und die Fällung nach erneutem Zirkonzusatz wiederholt: Entfernung des Uran X, des aktiven Zirkons und Niobs. Das Filtrat wurde nach dem Oxydieren des zweiwertigen Eisens mit einigen Tropfen Brom oder H_2O_2 mit Ammoniak gefällt. Der Niederschlag enthielt von Spaltprodukten nun nur noch das Yttrium und die seltenen Erden (Lanthan und Cer). Zur Trennung des Yttriums von den Erden wurden die letzteren mittels gesättigter Kaliumsulfatlösung aus schwach salzsaurer Lösung als Kaliumdoppelsulfate gefällt. In dem das Yttrium enthaltenden Filtrat wurde nach erneuter Zugabe von 20 mg Lanthan der Rest der Erden noch einmal gefällt. Im Filtrat blieb das Yttrium. Zur Sicherheit wurde nun nach Zugabe von 10 mg Zirkon zur Yttriumlösung das Zirkon mit Natriumsubphosphat gefällt. Dabei fallen eventuell noch zurückgebliebene Spuren von Uran X quantitativ mit dem Zirkon als Subphosphat aus. Das Yttrium wurde nunmehr mit Ammoniak und Ammonoxalat gefällt und gemessen.

Die Messung des Yttriums wurde 62 Minuten nach Unterbrechung der Bestrahlung begonnen. Das Ergebnis zeigt die Fig. 1. Die Kurve *A* gibt die während der ersten $5\frac{1}{2}$ Stunden direkt gemessenen Werte in Minuten. Der Abfall wurde dann noch über 2 Tage hinaus verfolgt, bis die Aktivität praktisch auf Null abgefallen war. Vom zweiten Tage an nahm die Aktivität in befriedigender Weise mit der Halbwertszeit von 11,6 Stunden ab. Wird dieser Abfall auf die Anfangszeit zurückextrapoliert, dann ergibt sich Gerade *B* der Figur. *A—B* ist dann noch immer eine gekrümmte Kurve, deren geradliniger Teil der bekannten Halbwertszeit des 3,5 Stunden-Yttriums (Kurve *C*) entspricht. Wird dieser Teil von *A—B* ebenfalls abgezogen, dann erhalten wir die Kurven *A—B—C* der Figur 1. Sie zeigt einen geradlinigen logarithmischen Abfall von 20 Minuten.

Bei besonders schnellem Arbeiten gelang es, das Yttrium schon nach 45 Minuten zu messen. Das 20 Minuten-Yttrium trat dabei sehr stark auf; ein Hinweis auf ein Yttrium kürzerer Halbwertszeit wurde nicht beobachtet.

Das neue kurzlebige Yttrium läßt sich also an reinen Präparaten und bei nicht zu langsamem Arbeiten bequem nachweisen. Ein Zweifel,

daß es sich dabei um Yttrium handelt, besteht nicht. Es ist aber doch bemerkenswert, daß nach der Bestrahlungszeit von nur 4 Minuten die anderen Yttriumisotope, das von 3,5 Stunden und das von 11,6 Stunden H. Z., in ganz erheblicher Menge ebenfalls anwesend sind, obgleich sich das erstere erst über ein 2,7 Stunden-Strontium, das letztere über ein 7 Minuten-Strontium bildet.

Es wurde nun weiter geprüft, ob dieses 20 Minuten-Yttrium vielleicht γ -Strahlen in erheblicher Intensität aussendet und ob

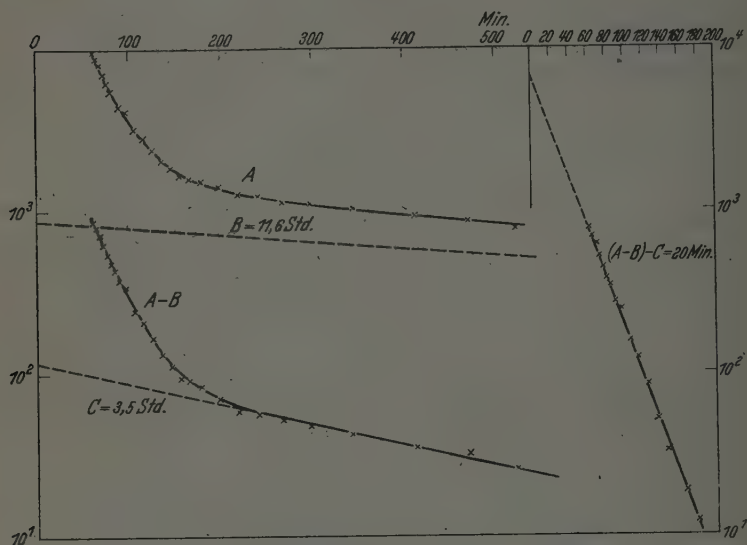


Fig. 1. Das 20 Minuten-Yttrium. Yttrium aus Uran: 4 Minuten bestrahlt.

dies für die längerlebigen Isotope weniger der Fall ist. Dann würde man durch Abklingungsmessungen mit Hilfe der γ -Strahlen den 20 Minuten-Abfall vielleicht noch klarer hervortreten lassen können. Um dies zu prüfen, wurde eine größere Uranmenge 10 Minuten lang bestrahlt. Das daraus abgeschiedene Yttrium wurde in zwei ungleiche Teile geteilt; der kleinere Teil wurde durch zusätzliche 0,5 mm Aluminium, also insgesamt durch 0,6 mm gemessen, der größere durch 2 mm Blei. Im letzteren Falle sind also alle β -Strahlen abgeblendet. Die Kurve mit 0,6 mm Al unterscheidet sich nicht prinzipiell von der Abklingungskurve A der Fig. 1. Außer dem 20 Minuten-Yttrium sind die beiden stabileren Isotope anwesend, und zwar wegen der längeren Bestrahlungszeit in etwas größerem Ausmaß. Von der Wiedergabe der

Kurve und deren Zerlegung in drei exponential abfallende Teile kann deshalb hier abgesehen werden.

Anders sieht dagegen die Abfallskurve aus, die bei der γ -Messung durch 2 mm Blei erhalten wurde. Die Kurve *A* der Fig. 2 gibt die direkt gefundenen Werte. Ungefähr 3 Stunden nach Unterbrechung der Bestrahlung geht sie praktisch in den logarithmisch geradlinigen Zerfall des 3,5 Stunden-Yttriums über. Am nächsten Tage war die Aktivität verschwunden. Von dem nach 10 Minuten langer Bestrahlung gegenüber

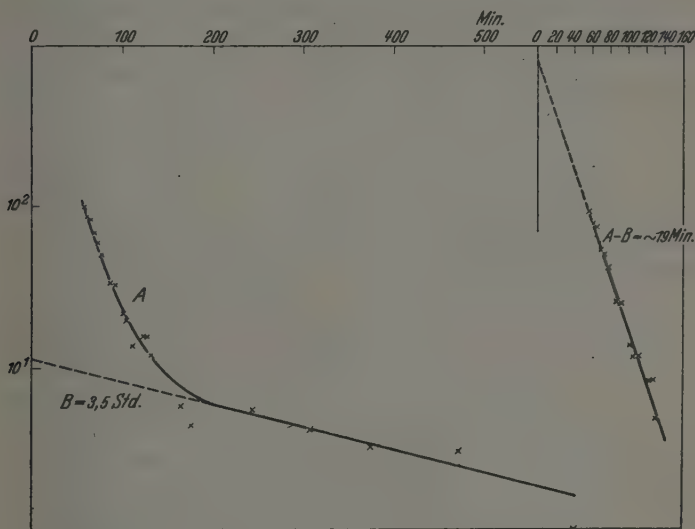


Fig. 2. Nachweis einer γ -Strahlung des 20 Minuten-Yttriums.
Yttrium aus 10 Minuten bestrahltem Uran, gemessen durch 2 mm Blei.
Das 11,6 Stunden-Yttrium wird durch 2 mm Blei unterdrückt.

dem 3,5 Stunden-Yttrium im Überschuß vorhandenen 11,6 Stunden-Yttrium war praktisch nichts zu bemerken. Zieht man diesen geradlinigen Teil *B* von der Kurve *A* ab, so erhält man den exponentialen Abfall der Kurve *A-B*. Er ergibt eine H.Z. von ~ 18 Minuten, in Anbetracht der geringen Intensität eine befriedigende Übereinstimmung mit der Kurve (*A-B*)-*C* der Fig. 1. Gegenüber den leicht nachweisbaren γ -Strahlen des 20 Minuten- und des 3,5 Stunden-Yttriums läßt sich das 11,6 Stunden-Yttrium also durch 2 mm Blei unterdrücken; γ -Strahlen sind bei diesem Isotop nicht oder kaum vorhanden.

3. Die Entstehung des 20 Minuten-Yttriums aus einem Krypton-isotop. Für die bisher bekannten bei der Uranspaltung auftretenden

Y-Isotope wurde schon früher festgestellt, daß sie aus Kryptonisotopen entstehen^{1) 2)}. (Für das aus dem sehr langlebigen Strontium von einigen Jahren H.Z. entstehende Yttrium von 60 Stunden steht die Untersuchung wegen Intensitätsfragen noch aus.) Wir prüften nunmehr, ob auch das neue 20 Minuten-Isotop aus einem Krypton entsteht, und verwendeten dazu wieder unser „hochemanierendes“ Uran³⁾, aus dem also die während der Bestrahlung entstehenden Edelgase Krypton und Xenon zum erheblichen Teil herausdiffundieren. Der aus den Edelgasen entstehende „aktive Niederschlag“ wird in der üblichen Weise an einer negativ geladenen Bleiplatte angesammelt, von der er sich — mit geringen Mengen von Blei — mittels Salzsäure leicht ablösen läßt.

Etwa 50 g „emanierendes“ Ammonuranat wurden 4 Minuten mit Li-D-Neutronen des Max-Planck-Instituts in einem großen, mit Paraffin ausgegossenen Exsikkator bestrahlt. Die aktivierte Bleiplatte wird kurz in mit kleinen Mengen Yttrium und Lanthan, Strontium und Barium, Rubidium und Caesium versetzter Salzsäure gekocht, das Blei mit H_2S gefällt und in dem Filtrat die Erden mit Ammoniak gefällt. Der Niederschlag wird zur restlosen Entfernung mitgerissener aktiver Alkali- und Erdalkaliisotope umgefällt, nachdem der HCl-Lösung weitere Mengen dieser Metalle zugegeben waren. Da in diesem Falle Uran X nicht anwesend ist und kurzlebige Zirkon- und Niobisotope nicht nachgewiesen werden konnten, kann nunmehr sofort die Yttrium-Lanthan-Trennung erfolgen; sie geschah wie weiter oben angegeben. Die Messung des reinen Yttriums konnte schon 21 Minuten nach Unterbrechung der Bestrahlung begonnen werden.

In der Fig. 3 sind die Ergebnisse dargestellt. Die Auswertung der direkt gemessenen Kurve *A* und ihre Aufteilung in die drei exponentiellen Teilkurven geschah in derselben Weise wie bei den Fig. 1 und 2. Nach Abzug der Aktivitäten für das 11,6 Stunden-Yttrium (Gerade *B*) und das 3,5 Stunden-Yttrium (Gerade *C*) ergibt sich die Gerade *A—B—C* mit einer Halbwertszeit von 20 Minuten. Hiermit ist also bewiesen, daß auch das neue Yttriumisotop aus einem Krypton entsteht. Wenn man sich aber die Intensitäten näher ansieht, mit denen die drei Yttriumarten einerseits aus dem Uran selbst, andererseits aus dem „aktiven Niederschlag“ auftreten, dann erkennen wir: die Intensität des 20 Minuten-Yttriums, verglichen mit der der beiden längeren Isotope,

¹⁾ O. Hahn u. F. Strassmann, Naturw. 28, 543, 1940. — ²⁾ H. Götte, ebenda 29, 496, 1941. — ³⁾ O. Hahn u. F. Strassmann, ebenda 28, 54, 1940.

ist, wenn die Abscheidung aus dem Uran vorgenommen wurde, mindestens 10mal größer als für das entsprechende Verhältnis beim „aktiven Niederschlag“. Nun sind, auch für gleich lange Bestrahlungen, solche Ausbeutevergleiche nicht sehr genau; die Art und die Dauer der einzelnen Trennprozesse spielen dabei eine Rolle. Aber die sehr viel größere Ausbeute an 20 Minuten-Yttrium aus Uran gegenüber dem aus dem aktiven Niederschlag, verglichen mit den anderen Isotopen, wurde immer wieder beobachtet und scheint also durchaus reell zu sein.

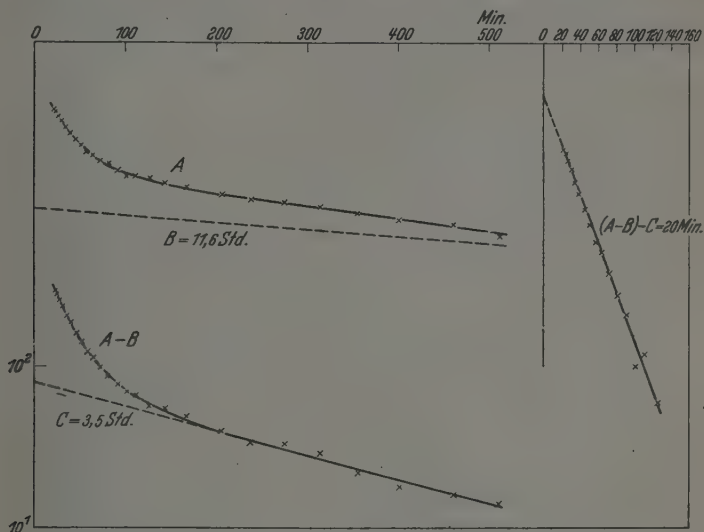


Fig. 3. Entstehung des 20 Minuten-Yttriums aus Krypton.
Yttrium aus „emanierendem“ Uran: 4 Minuten bestrahlt.

So sieht man bei einem Vergleich der Fig. 1 und 3, daß die Aktivitäten des 20 Minuten-Yttriums auf die Zeit 0 extrapoliert bei dem Yttrium aus Uran nahezu 7000 ergibt, während die entsprechende Aktivität aus dem „emanierenden“ Uran weniger als 500, d. h. $\frac{1}{14}$, zeigt. Die Aktivitäten der beiden anderen Yttriumisotope sind dagegen in beiden Fällen kaum voneinander unterschieden.

Zur Erklärung kann man folgende drei Möglichkeiten in Betracht ziehen:

1. Das 20 Minuten-Yttrium entsteht nicht nur als Zerfallsprodukt eines Kryptonisotops, sondern gleichzeitig auch als primäres Spaltprodukt, und zwar in großem Ausmaße.

2. Das aus dem Uran unmittelbar abgeschiedene 20 Minuten-Yttrium ist noch komplex und besteht aus einem Abkömmling des Kryptons und einem primären Spaltprodukt ähnlicher H.Z.

3. Das zu dem 20 Minuten-Yttrium führende Kryptonisotop hat eine besonders kurze Halbwertszeit, so daß von ihm, im Gegensatz zu den Kryptonisotopen, die zu den anderen Yttriumarten führen, nur ein sehr geringer Anteil aus dem „hochemanierenden“ Uranpräparat herausdiffundiert.

Eine Entscheidung über diese drei Möglichkeiten steht zur Zeit noch aus.

4. *Suche nach der direkten Muttersubstanz des neuen Yttriumisotops.* Nachdem der sichere Nachweis erbracht ist, daß das 20 Minuten-Yttrium aus einem aktiven Krypton entsteht, haben wir uns bemüht, ein neues Strontiumisotop als unmittelbare Muttersubstanz des Yttriums nachzuweisen. Da sich das 20 Minuten-Yttrium schon nach Bestrahlung von wenigen Minuten in erheblicher Menge nachweisen läßt, kann es sich bei seiner Muttersubstanz nur um ein kurzlebiges Strontiumisotop handeln. Es war also naheliegend, das 7 Minuten-Strontium für komplex anzusehen und den Versuch seiner Aufteilung in zwei Bestandteile vorzunehmen, ähnlich wie uns dieses vor einiger Zeit für das frühere 14 Minuten-Barium¹⁾ gelungen war, das aus einem 6 Minuten- und einem 18 Minuten-Isotop besteht.

Direkte Abklingungskurven möglichst schnell hergestellter Strontiumpräparate gaben keinerlei Hinweis auf eine schnellere Abnahme als 7 Minuten; auch wenn durch sehr kurze Bestrahlung die relative Intensität an den stabileren Strontiumisotopen möglichst klein gehalten wurde. Bei der sofort einsetzenden Nachbildung von mindestens drei Yttriumisotopen ist die Auswertung einer solchen Strontiumkurve zu unsicher. Wir gingen deshalb so vor, wie seinerzeit beim Barium: Durch kurze aber möglichst intensive Bestrahlung des Urans und schnelle Reindarstellung des Strontiums wurde ein sehr starkes Präparat gewonnen, das im wesentlichen das auf seine komplexe Natur zu prüfende 7 Minuten-Strontium enthielt. Um die störende Nachbildung des Yttriums zu verhindern, wurde von dieser Strontiumlösung in regelmäßigen Zeitabständen ein genau dosierter, anfangs kleiner, später größerer Bruchteil entnommen und unmittelbar vor der Aus-

¹⁾ O. Hahn u. F. Strassmann, Naturw., l. c.

fällung des Strontiums als Carbonat das aus dem Strontium entstandene Yttrium mit einigen Milligramm Eisen mittels Ammoniak entfernt.

Auch nach einer Bestrahlung des Urans von nur 2 Minuten und schnellem Arbeiten enthält das abgeschiedene Strontium neben dem „7 Minuten“-Isotop auch schon merkliche Mengen der beiden längerlebigen Isotope. Deren Aktivität muß also von der des 7 Minuten-

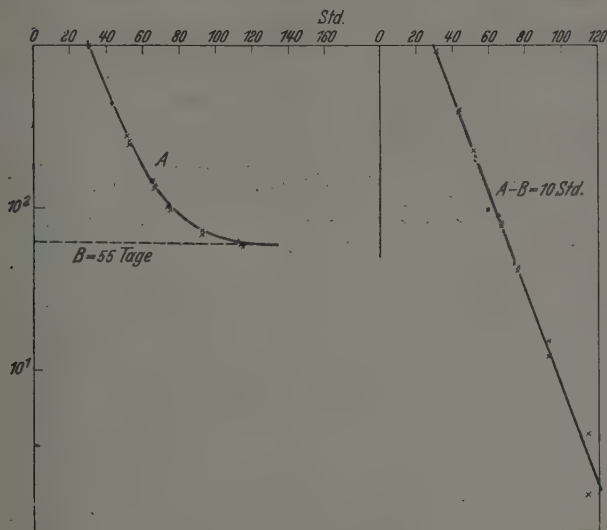


Fig. 4. Das 10 Stunden-Strontium.
Direkte Bestimmung der H. Z. ohne Yttriumnachbildung.

Strontiums abgezogen werden, damit man die Halbwertszeit des „7 Minuten“-Strontiums genau ermitteln kann.

Bei allen Versuchen ergab sich für das 8,6 Stunden-Strontium immer eine etwas längere H. Z. Wir haben deshalb zunächst die Zerfallsgeschwindigkeit dieses Isotops genauer ermittelt, indem wir durch längere Bestrahlung des Urans mehr von dem längeren Isotop gewonnen haben. Die Bestrahlungszeiten wurden dafür bis auf 7 Stunden ausgedehnt. Die Messung der einzelnen, vom Yttrium jedesmal befreiten Strontiumfraktionen wurde dabei erst nach einer Zeit begonnen, nach der das 7 Minuten- und das 2,7 Stunden-Strontium bereits zerfallen waren.

In der Fig. 4 ist als Beispiel das Ergebnis eines Versuchs wiedergegeben, bei dem das Uran 3,5 Stunden lang bestrahlt worden war.

31 Stunden nach Unterbrechung der Bestrahlung wurde mit der sukzessiven Fällung der einzelnen, jedesmal vorher vom Yttrium befreiten Strontiumfraktionen begonnen.

Die Kurve *A* gibt die auf gleiche Strontiumfraktionen bezogene direkte Aktivitätsabnahme. Trotz der Abwesenheit des 7 Minuten- und des 2,7 Stunden-Strontiums ist die Kurve noch komplex. Nach anfänglicher schnellerer Abnahme geht sie in das sehr langsam abnehmende 55 Tage-Strontium über. (Bei den oben besprochenen Versuchen mit einer Bestrahlungszeit von nur wenigen Minuten war dessen Intensität vernachlässigbar klein.) Wird diese sehr geringe Abnahme (Kurve *B*) von der experimentellen Kurve *A* abgezogen, dann ergibt sich eine logarithmisch geradlinige Abnahme von rund 10 Stunden, gegenüber dem bisher angenommenen Wert von 8,5 Stunden¹⁾. Da auch bei anderen Versuchen nie ein Wert unter 9,6 Stunden gefunden wurde, halten wir die H.Z. von rund 10 Stunden für dieses Strontiumisotop für richtiger als den früheren Götteschen Wert. Der Wert von 8,5 Stunden war auf indirektem Wege durch in bestimmten Zeitintervallen erfolgende Abtrennung der aus dem Strontium entstehenden Yttriumisomere von 57 Tagen und 50 Minuten H.Z. erschlossen worden. Aus der nach den einzelnen Zeitabschnitten beobachteten systematischen Intensitätsverminderung des Yttriums wurde die Zerfallsgeschwindigkeit der Muttersubstanz berechnet. Nun ist es wohl schwer zu vermeiden, daß bei den häufigen Abtrennungen des Yttriums aus ein und derselben Strontiumlösung kleine Mengen verloren gehen. Dadurch wird eine zu kurze Halbwertszeit erhalten, und der etwas zu niedrige Wert von 8,5 Stunden wird damit verständlich.

Möglicherweise ist der auf ähnlichem Wege erschlossene Wert von 2,7 Stunden für das andere Strontiumisotop ebenfalls etwas zu niedrig. Doch geben unsere bisherigen Kurven keinen Hinweis auf eine erhebliche Abweichung.

Für die Auswertung der Abfallskurven des nunmehr zur Untersuchung gelangenden kurzlebigen Strontiums legen wir für die beiden längerlebigen Isotope die Werte 2,7 Stunden und 10 Stunden zugrunde.

Die vorher vom Uran X befreite ätherische Uranylnitratlösung wurde 2 Minuten lang möglichst stark bestrahlt. Durch Schütteln mit Wasser wurden die Spaltprodukte von dem größten Teil des Urans befreit. Zu der von der ätherischen Lösung getrennten wässrigen Phase

¹⁾ H. Götte, l. c.

wurden 500 mg Strontium als Nitrat zugesetzt. Das Strontium wurde dann mittels konzentrierter Salpetersäure ausgefällt und so vom Uran und den Spaltprodukten mit Ausnahme des Bariums getrennt. Aus der Lösung des Nitrats wurde nach Zusatz von 70 mg Barium das Barium als Ba-Chromat aus essigsaurer Lösung gefällt und so vom Strontium getrennt. Die Fällung des Strontiums geschah dann als Carbonat. Die Lösung des Strontiums in verdünnter Salzsäure wurde zur Entfernung noch vorhandener Kohlensäure schnell stark gekocht und auf ein bestimmtes Volumen aufgefüllt. Durch schnelles Arbeiten in unmittelbarer Nähe des Bestrahlungsraumes konnte die Reinherstellung des yttrium-freien Strontiums innerhalb 6 bis 8 Minuten durchgeführt werden.

Die aus der Strontiumstammlösung entnommenen einzelnen Portionen wurden nun also jedesmal mittels etwas Eisen vom nachgebildeten Yttrium und etwa noch vorhandenen Spuren von Uran und Uran X befreit. Das ausgefällte Strontium wurde jeweils 2 mal 2 Minuten lang gemessen; alle 6 Minuten wurde eine neue Fraktion verarbeitet. Die auf gleiche Bruchteile der Gesamtlösung bezogenen Aktivitätswerte geben uns also die Aktivitätsabnahme der Strontiumisotope, frei von Yttrium.

In der Fig. 5 sind die Ergebnisse einer solchen Strontiumabnahme wiedergegeben. Die Kurve *A* zeigt die Abnahme über etwa $4\frac{1}{2}$ Stunden. Die Messung der ersten Fraktion begann 16 Minuten nach Unterbrechung der Bestrahlung. (Wegen der Überführung des Präparats vom Max-Planck-Institut in das Institut für Chemie und die danach notwendige erneute Abtrennung des inzwischen nachgebildeten Yttriums konnte diese Zeit nicht weiter herabgedrückt werden.) Nach etwa 1 Stunde geht die anfangs schnelle Abnahme in die langsamere über. Die Analyse dieses langsameren Teils erfolgte, wie bei den Kurven 1 bis 4, durch weitere Messungen und die Aufteilung der Aktivität in das 2,7 Stunden- und das 10 Stunden-Isotop.

Die Gerade *B* entspricht dem vom zweiten Tag ab geradlinig erfolgenden Abfall des 10 Stunden-Isotops; die Gerade *C* dem sich aus dem geradlinigen Teil der Kurve *A—B* ergebenden 2,7 Stunden-Abfall. *A—B—C* schließlich zeigt den Intensitätsverlauf des „7 Minuten“-Strontiums. Innerhalb der unvermeidlichen Schwankungen finden wir dafür eine gerade Linie, die 7 Minuten H.Z. entspricht, ohne einen Hinweis auf eine anfänglich schnellere Abnahme. Nachdem wir auch bei Wiederholungen dieser Versuche kein anderes Ergebnis hatten, sehen wir also, daß auch bei den direkten Abklingungsmessungen der reinen

Strontiumisotope sich kein Hinweis auf eine komplexe Natur des 7 Minuten-Strontiums ergibt. Da die Messungen 16 Minuten nach Unterbrechung der Bestrahlung begonnen wurden, sollte ein Isotop von etwa 3 oder 4 Minuten H.Z. noch nachweisbar sein. Ein Isotop mit einer dem 7 Minuten-Körper sehr ähnlichen H.Z. hätte man auf diese Weise nicht nachweisen können; und ein Isotop mit kürzerer H.Z. als etwa 2 bis 3 Minuten hätte sich nach 16 Minuten bereits dem Nachweis entzogen.

Man konnte daran denken, das Strontium statt aus dem Uran selbst aus dem „aktiven Niederschlag“ des hochemanierenden Uranats zu

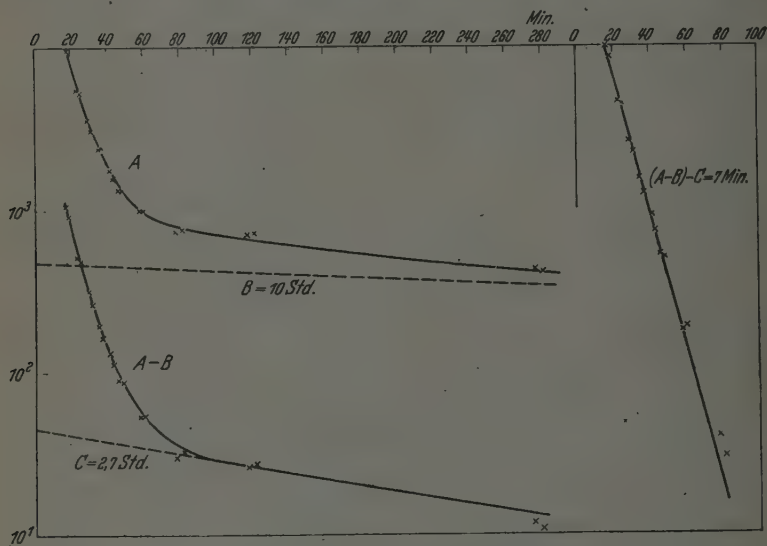


Fig. 5. Das „7 Minuten“-Strontium.

Direkte Bestimmung der H. Z. ohne Yttriumnachbildung.

Keine Andeutung für eine komplexe Natur des „7 Minuten“-Strontiums.

gewinnen. Wegen der leichteren Reinherstellung konnten wir in der Tat aus dem „aktiven Niederschlag“ der Edelgase gewonnenes reines Strontium schon 10 Minuten nach Unterbrechung der Bestrahlung zur Messung bringen. Die Aktivitäten sind aber wesentlich geringer, und es war nicht möglich, die portionsweise Fällung der vom Yttrium befreiten Fraktionen, wie sie in den vorherigen Versuchen vorgenommen war, durchzuführen.

5. Indirekter Nachweis des kurzlebigen Strontiums durch seine Tochtersubstanz. Nachdem der unmittelbare Nachweis eines kurzlebigen

Strontiums als Muttersubstanz des 20 Minuten-Yttriums nicht zum Ziele geführt hat, schlugen wir einen Umweg ein.

Wie schon erwähnt, ließ sich das Strontium nahe am Ort der Bestrahlung im Max-Planck-Institut schon nach 6 bis 8 Minuten rein gewinnen. Wenn das gesuchte Strontium keine allzu kurze H.Z. hatte, dann war zu vermuten, daß es in einem 6 bis 8 Minuten alten Strontium noch anwesend ist, auch wenn es sich nach 16 Minuten, nach welcher Zeit die direkten Strontiummessungen erst möglich waren, nicht mehr nachweisen läßt.

Eine ätherische Uranylinitratlösung mit ungefähr 70 g Salz wurde im Max-Planck-Institut 2 Minuten lang mit Li—D-Neutronen möglichst stark bestrahlt. Die Abscheidung und Reinigung des Strontiums geschah in der weiter oben beschriebenen Weise. Sie war in einem Falle nach 8, in einem anderen Falle nach 6 Minuten beendet. Von diesem Zeitpunkt ab, also z. B. nach 8 Minuten, bilden sich aus den Strontiumisotopen die bekannten Yttriumisotope von 20 Minuten, 3,5 und 11,6 Stunden H.Z. nach, und zwar das 20 Minuten- und das 11,6 Stunden-Yttrium aus dem sogenannten 7 Minuten-Strontium, das 3,5 Stunden-Yttrium dagegen aus dem 2,7 Stunden-Strontium.

Wenn die hypothetische Muttersubstanz des 20 Minuten-Yttriums nur eine H.Z. von wenigen Minuten hat, dann muß sich das 20 Minuten-Yttrium in dem Strontium sehr schnell nachbilden, und man erhält dieses Isotop in relativ bester Ausbeute nach nur kurzem Stehen des Strontiums. Daneben muß der 11,6 Stunden-Körper anwesend sein, der ja ebenfalls aus dem auf seine komplexe Natur zu prüfenden 7 Minuten-Strontium entsteht. Das 3,5 Stunden-Yttrium kann nur in untergeordnetem Maße auftreten, weil es sich ja aus dem stabileren 2,7 Stunden-Strontium, das an sich nur in kleiner Menge vorhanden ist, erst allmählich bildet.

Ist die Halbwertszeit des hypothetischen Strontiums ungefähr 7 Minuten, so daß also 2 Strontiumisotope sehr ähnlicher Halbwertszeit vorlägen, dann müßte bei wiederholter Abtrennung des Yttriums aus dem alternden Strontium die Ausbeute an 20 Minuten-Yttrium und 11,6 Stunden-Yttrium ungefähr in gleichem Maße für beide Yttriumisotope sinken. Ist die Halbwertszeit des hypothetischen Strontiums größer als 7 Minuten, dann müßte sich bei längerem Stehen des Strontiums die Ausbeute an 20 Minuten-Yttrium gegenüber dem 11,6 Stunden-Isotop erhöhen.

Von diesen Gedanken ausgehend, wurden die folgenden Abtrennungen aus dem schnell hergestellten Strontium gemacht:

1. Erste Yttriumabtrennung nach 9 Minuten langem Stehen des Strontiums.
 2. Zweite Yttriumabtrennung nach weiteren 60 Minuten.
 3. Dritte Yttriumabtrennung nach weiteren 3,5 Stunden.
- Die Ergebnisse sind in der Fig. 6 dargestellt.

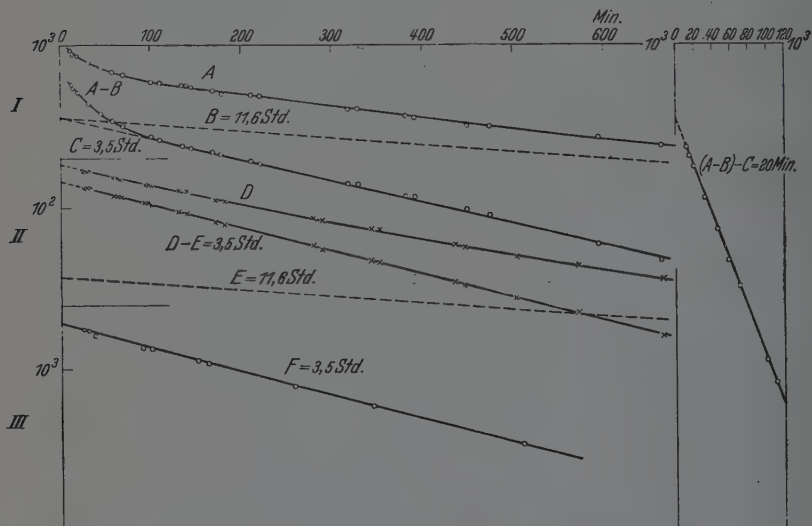


Fig. 6. Nachweis eines 2 Minuten-Strontiums durch die Nachbildung des Yttriums.
(Das Strontium wurde 8 Minuten nach Unterbrechung der Bestrahlung isoliert.
Bestrahlungsdauer 2 Minuten.)

- I. Das Yttrium wurde nach weiteren 9 Minuten vom Strontium getrennt; es sind 3 Yttrium-isotope vorhanden (A, B, C).
- II. Das Yttrium wurde nach weiteren 60 Minuten vom Strontium getrennt; das 20 Minuten-Yttrium fehlt (D, E).
- III. Das Yttrium wurde nach weiteren 3,5 Stunden vom Strontium getrennt; es ist nur noch das 3,5 Stunden-Yttrium vorhanden (F).

Die Kurve A der Fig. 6 gibt die direkt gefundenen Abklingungswerte für die ersten 10 Stunden. Die Gerade B gibt den bis zur logarithmisch geradlinigen Abnahme ermittelten Anteil des 11,6 Std.-Yttriums. A-B entspricht dann der Aktivitätsabnahme der beiden noch übrigen Yttriumisotope. Nach Abzug der Geraden C für das 3,5 Stunden-Yttrium erhalten wir die Gerade A-B-C, die einer Halbwertszeit von 20 Minuten entspricht. In dem schnell abgeschiedenen Strontium hatte sich während 9 Minuten also eine leicht und einwandfrei bestimmbare Menge von 20 Minuten-Yttrium gebildet.

In der Fig. 6 sehen wir auch das Ergebnis für die späteren Abtrennungen des Yttriums. Die Kurve *D* gibt die unmittelbar gemessenen Aktivitäten der zweiten Yttriumfällung. Die Gerade *E* entspricht dem Gehalt an 11,6 Stunden-Yttrium; *D—E* ist nun aber keine komplexe Kurve mehr, sondern gibt den reinen logarithmischen Abfall des 3,5 Stunden-Yttriums. Das 20 Minuten-Yttrium ist nicht mehr vorhanden. Die Gerade *F* schließlich ist die unmittelbar gemessene Abklingungskurve für die dritte Yttriumtrennung. Sie entspricht dem reinen 3,5 Stunden-Isotop.

Wir sehen also, daß bei der zweiten Yttriumfällung noch ein Gemisch des 11,6 und des 3,5 Stunden-Yttriums vorliegt; denn nach der ersten Yttriumfällung — 17 Minuten nach Unterbrechung der Bestrahlung — war noch 7 Minuten-Strontium vorhanden, das das 11,6 Stunden-Yttrium während der weiteren 60 Minuten noch bilden konnte. Nach dieser Zeit ist aber das 7 Minuten-Strontium verschwunden und nur noch das 2,7 Stunden-Isotop anwesend. Dieses bildet dann bis zur dritten Yttriumfällung erhebliche Mengen seines Folgeproduktes, des 3,5 Stunden-Yttriums, nach.

Die Muttersubstanz des 20 Minuten-Yttriums ist also wesentlich kurzlebiger als 7 Minuten, denn nach 17 Minuten bildet sie keine meßbare Menge Yttrium mehr nach. Sie hat aber sicher eine größere H.Z. als nur 1 Minute, denn in dem 8 Minuten alten Strontium bildet sie noch eine leicht nachweisbare Menge von 20 Minuten-Yttrium. Wir schließen deshalb für dieses Strontium auf eine Halbwertszeit von 2 Minuten und halten diesen Wert für innerhalb $\pm 0,5$ Minuten für richtig.

6. Das langlebige Strontiumisotop von einigen Jahren Halbwertszeit. Daß bei längerer Bestrahlung des Urans neben den mehr oder weniger kurzlebigen Strontiumisotopen auch ein stabileres von etwa 55 Tagen entsteht, war schon von Frl. Lieber¹⁾ in unserem Institut nachgewiesen worden.

Aber auch dieses Isotop ist noch nicht das stabilste der bei der Uranspaltung auftretenden Isotope. Schon in der weiter oben genannten Akademiearbeit²⁾ haben wir Versuche beschrieben, aus denen hervorgeht, daß außer dem 55 Tage-Strontium noch ein weiteres von offenbar einigen Jahren H.Z. bei der Spaltung entsteht. Und während das 55 Tage-Isotop in ein stabiles Yttrium von der Massenzahl 89 übergeht³⁾,

¹⁾ Cl. Lieber, Naturw. 27, 421, 1939. — ²⁾ O. Hahn, F. Strassmann u. H. Götte, l. c. — ³⁾ R. Sagane, S. Kojima, G. Miyamoto u. M. Ykawa, Phys. Rev. 54, 452, 1938.

bildet sich aus dem längerlebigen Strontium noch ein aktives Yttrium von einigen Tagen H.Z. Der Beweis dafür wurde an einem Strontiumpräparat erbracht, das nach fast einjähriger Bestrahlung 80 Tage und 570 Tage nach Unterbrechung der Bestrahlung jeweils vom Yttrium befreit wurde. Im ersteren Falle wurde nach der Yttriumabtrennung nur eine geringe Aktivitätszunahme des Strontiums beobachtet: Es lag noch ein Überschuß des 55 Tage-Strontiums vor, das ein aktives Yttrium nicht nachbildet. Nach 570 Tagen ist dagegen das 55 Tage-Strontium zerfallen und nur das längere, ein aktives Yttrium bildende Strontium übrig. Nach der Yttriumtrennung ist dieses Strontium fast inaktiv und erhält seine vorherige Aktivität erst wieder mit der Nachbildung des Yttriums. Als H.Z. für das langlebige Strontium gaben wir an, daß sie sicher größer ist als 2 Jahre; die H.Z. des daraus entstehenden Yttriums schätzten wir auf rund 60 Stunden. Länger fortgeführte Messungen des langlebigen Strontiums lassen nun auf einen Wert von mindestens 5 Jahren H.Z. schließen; doch kann auch dieser Wert wegen der geringen Intensität des langlebigen Körpers keinerlei Anspruch auf große Genauigkeit machen. Für sein Umwandlungsprodukt konnte Dr. Seelmann-Eggebert in unserem Institut beweisen¹⁾, daß es identisch ist mit einem schon früher auf anderem Wege gewonnenen Yttrium von $60,5 \pm 2$ Stunden H.Z. Mit dieser Feststellung liegt auch die Massenzahl des langlebigen Strontiums zu 90 fest²⁾. Während die β -Strahlen des 60 Stunden-Yttriums einige Millionen Volt Energie haben, sind die Strahlen des 5 Jahre-Strontiums offenbar sehr wenig durchdringend. Daher die starke Zunahme der Aktivität des Strontiums bei der Nachbildung des Yttriums.

Ob das langlebige Strontium ein primäres Spaltprodukt vorstellt oder ebenso wie alle anderen aus der Uranspaltung bisher bekannten Strontiumisotope ausschließlich oder zumindest teilweise aus einem primären Krypton entsteht, konnte aus äußeren Gründen bisher nicht bewiesen werden. Es ist nicht möglich, die im Max-Planck-Institut zu den Bestrahlungen zur Verfügung gestellte Strahlenquelle auf lange Zeit für „Emaniversuche“ festzulegen.

Sehr lückenhaft sind bisher unsere Kenntnisse über die Halbwertszeiten der zu den übrigen 5 Strontiumisotopen übergehenden Krypton- und Rubidiumisotope. Sicher ist nur, daß das 2,5 Minuten-Krypton

¹⁾ Bisher nicht veröffentlichte Versuche. — ²⁾ D. W. Stuart, I. L. Lawson u. I. M. Cork, Phys. Rev. 52, 901, 1937.

über ein 15,4 Minuten-Rubidium in das 55 Tage-Strontium der Masse 89 zerfällt¹⁾. Ob aber das früher von uns beschriebene 80 Sekunden-Rubidium die Muttersubstanz des 2,7 Stunden-Strontiums oder eines der anderen Isotope vorstellt, läßt sich nicht entscheiden, nachdem jetzt festgestellt ist, daß auch die übrigen Strontiumisotope aus Krypton über Rubidium entstehen. Damit ist auch sehr wahrscheinlich gemacht, daß das 80 Sekunden-Rubidium selbst noch komplex ist und sich in mehrere Isotope unterteilen ließe, wenn unsere räumlich getrennten Institute, das Max-Planck- und das Chemie-Institut, derartige Versuche zuließen. Schließlich sei daran erinnert, daß die Halbwertszeit des Kryptons, das zu dem 2 Minuten-Strontium und dem 20 Minuten-Yttrium führt, vielleicht ganz besonders kurz ist [vgl. oben S. 736 (3.)].

Die Tabelle 2 gibt den derzeitigen Stand unserer Kenntnisse über die Strontium-Yttriumgruppe. (Die Zuordnung des 80 Sekunden-Rubidiums ist willkürlich.)

Tabelle 2.

Masse	$_{36}\text{Kr}$		$_{37}\text{Rb}$		$_{38}\text{Sr}$		$_{39}\text{Y}$		$_{40}\text{Zr}$
> 90	?	→	?	→	~ 2 Min.	→	20 Min.	→	?
> 90	?	→	?	→	7 Min.	→	11,6 Std.	→	?
	?	→	80 Sek.	→	2,7 Std.	→	3,5 Std.	→	stabil
> 90	?	→	?	→	10 Std.	↗ ↘	57 Tage 50 Min.	→	?
89	2,5 Min.	→	15,4 Min.	→	55 Tage	→	stabil		
90				→	~ 5 Jahre	→	60 Std.	→	stabil

Herrn Dr. Ramm vom Max-Planck-Institut möchten wir für die häufigen Bestrahlungen, die er für uns vorgenommen hat, herzlich danken.

Berlin-Dahlem, Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie.

¹⁾ G. N. Glasoe u. I. Steigman, Phys. Rev. **57**, 566, 1940; **58**, 1, 1940.

Nebenbilder in elektronenmikroskopischen Abbildungen.

Von H. Boersch in Wien.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 5. Juni 1943.)

Beobachtungen und Erklärungsversuch. — Methodische Anwendung. — Ergebnisse. — Nachtrag. — Zusammenfassung.

Beobachtungen und Erklärungsversuch. In übermikroskopischen Abbildungen von Goldsol, das nach Versuchen von P. A. Thiessen unter trachtbeeinflussenden Beimengungen verschiedene Formen annimmt, zeigten sich merkwürdige helle „Nebenbilder“, die das (dunkle Schatten-) Bild des Kristalls wiederholten (Fig. 1). Auf diese Erscheinung machte Herr Dr. Friedrich Freksa vom Kaiser Wilhelm-Institut für Biochemie, Berlin-Dahlem, den Verfasser aufmerksam.

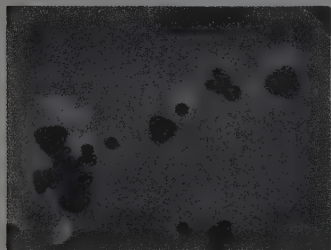


Fig. 1. Goldsol mit Nebenbildern.
 $V = 40\,000 : 1$; $U = 80$ ekV.

Diese Nebenbilder wurden bisher nur bei kristallinem Material beobachtet. Hierdurch wird der Gedanke nahegelegt, daß es sich um die Wirkung von Kristallgitter-Interferenzen

handelt. Da jedoch bei einer idealen Abbildung sämtliche, von einem Objektpunkt ausgehende und die Linse durchsetzende Strahlen wieder in einem Bildpunkt vereinigt werden, muß für die Entstehung der Nebenbilder außerdem eine *nichtideale* Abbildung verantwortlich gemacht werden. Die Nebenbilder sind also durch Kristallgitter-Interferenzen verursachte Dunkelfeldbilder¹⁾, die infolge nichtidealer Abbildung mit dem eigentlichen Hellfeld-Bild nicht zur Deckung kommen.

Nun werden heute vielfach die Objektivaperturen so klein gehalten ($\alpha_0 \sim 10^{-3}$), daß Elektronen, die um Beugungswinkel der Kristallgitter-Interferenzen $\vartheta = \frac{\lambda}{d} > 10^{-2}$ abgelenkt sind, abgeblendet werden und nicht in das Bild gelangen. Die Nachprüfung ergab, daß in dem speziellen Fall der Fig. 1 diese Bedingung tatsächlich nicht erfüllt war.

Um den vorgebrachten Erklärungsversuch weiter zu erhärten, wurden besondere Abbildungsversuche mit Chrom- und Molybdänrauch aus elektrischen Lichtbögen unternommen. Diese Rauche erschienen

¹⁾ H. Boersch, Ann. d. Phys. 26, 631, 1936.

deshalb geeignet, weil sie nach früheren elektronenmikroskopischen Abbildungsversuchen durchscheinende Kristalle von blättchenförmigem Habitus bilden¹⁾. Während bei kleiner Objektivapertur ($\alpha_0 = 1,86 \cdot 10^{-3}$) keine Nebenbilder beobachtet wurden, traten sie bei größeren Aperturen ($\alpha_0 = 2,8 \cdot 10^{-2}$ und $9,6 \cdot 10^{-2}$) auch hier auf (vgl. Fig. 2, 3).

In Einklang mit der Erklärung der Nebenbilder als Folge von Kristallgitter-Interferenzen steht ferner, daß die Nebenbilder als helle Abbildungen begrenzter Anzahl auftreten, daß sie unter Umständen durch sehr geringe Änderungen der Neigung des Primärstrahls zur Auslöschung gebracht werden können und daß sie allein durch Parallelverschiebung aus dem Bild hervorgehen. (Eine Parallelverschiebung wird selbstverständlich nur solange zu beobachten sein, als nicht Zerdrehungsfehler magnetischer Linsen eine Rolle spielen.)

Daß die zu einzelnen Strahlen gehörenden Bilder nicht zur Deckung kommen, beruht (wie gesagt) auf nichtidealer Abbildung, die durch Überlagerung der Wirkungen unscharfer Einstellung und des Öffnungsfehlers des Objektivs verursacht sein kann. Im Experiment äußert sich dementsprechend der Einfluß der Scharfstellung in einer Abhängigkeit der Entfernung Bild—Nebenbild von der Entfernung des Objekts von der zur Bildebene konjugierten Dingebene.

Daß bei scharfer Abbildung trotz der sphärischen Aberration, des chromatischen Fehlers und der großen Apertur des Objektivs ein scharfes Bild entsteht, ist eine Folge der geringen, für die Abbildung wirksamen Apertur (10^{-3}) des Primärstrahls²⁾ und der Häufung der elastisch gestreuten Elektronen in demselben³⁾. Die formtreue Wiederholung des

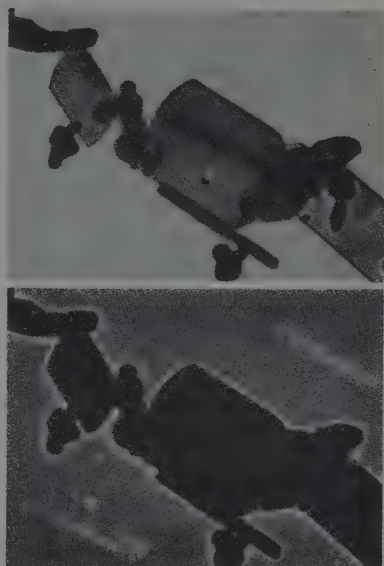


Fig. 2. Molybdänrauch mit Nebenbildern.
 $V = 40\,000 : 1$; $\alpha_0 = 2,8 \cdot 10^{-2}$; $U = 38$ ekV.

¹⁾ B. v. Borries u. E. Ruska, Naturwiss. 28, 366, 1940; E. Kinder, Kolloid-ZS. 95, 326, 1941. — ²⁾ B. v. Borries u. E. Ruska, ZS. f. techn. Phys. 19, 402, 1938. — ³⁾ Vgl. Anm. 1, S. 746.

Bildes durch die Nebenbilder beruht darauf, daß die einzelnen, für die Nebenbilder verantwortlichen Kristallgitter-Interferenzstrahlen die gleiche wirksame, geringe Apertur wie der Primärstrahl besitzen und ebenfalls Häufungsstellen elastisch gestreuter Elektronen darstellen. Die Schärfe der Bilder und Nebenbilder ist also darauf zurückzuführen, daß für ihre Entstehung einzelne monochromatische „Strahlen“ verantwortlich sind. (Natürlich stellen die Nebenbilder nur solange formtreue Wiederholungen des Bildes dar, als durch den schiefen Einfall in das Objektiv nicht andere Linsenfehler, z. B. Koma, Astigmatismus usw. wirksam werden.)

Bei unscharfer Abbildung müssen aus den gleichen Gründen Bild und Nebenbilder entsprechende Unschärfen aufweisen.

Methodische Anwendung. In der Beobachtung von Nebenbildern ist demnach eine Elektronenbeugungsmethode zur Untersuchung kleinster Objektbezirke gegeben, wobei diese Objekte zudem noch übermikroskopisch abgebildet werden. Diese Verknüpfung von Abbildungs- und Beugungsmethode zeichnet sich bei geeigneten Objekten durch besondere Einfachheit und Leistungsfähigkeit aus.

Zur quantitativen Auswertung der Aufnahmen ist es notwendig, die Entfernung Bild—Nebenbild als Funktion des Beugungswinkels zu kennen. Diese Kenntnis kann durch Messung der Bildverschiebung gewonnen werden, die als Folge einer Neigung des Primärstrahls gegen die Achse eintritt. Selbstverständlich ist diese Eichung bei konstant gehaltener Scharfstellung für jedes Objekt besonders durchzuführen.

Allerdings ist diese Beugungsmethode auf Objekte beschränkt, in denen, wie in den wiedergegebenen Abbildungen, eine Zuordnung von Bild und Nebenbild durchführbar ist. Diese Zuordnung kann dadurch erleichtert werden, daß die Entfernung der einzelnen Kristalle größer als die Entfernung Bild—Nebenbild gehalten wird. Außerdem kann durch Änderung der Scharfstellung erkannt werden, in welcher Richtung die Nebenbilder wandern, d. h. in welcher Richtung das zugehörige Bild liegt.

Unter diesen Voraussetzungen ist es möglich, kleinste Objektbezirke bis herab zur Auflösungsgrenze des Mikroskops mit Hilfe der Elektronen-Beugungsmethode zu untersuchen, wobei gleichzeitig das Objekt in übermikroskopischer Auflösung abgebildet wird. Die kleinsten praktisch erfaßten Gebiete hatten bisher eine Größe von etwa 200 Å.

Diese *mikroskopische* Abbildungs- und Beugungsmethode ist eng verwandt mit der *schattenmikroskopischen* Abbildungs- und Beugungs-

methode¹⁾. Hier ist allerdings eine Eichung nicht notwendig, da sich zwischen Objekt und Bild keine optischen Systeme befinden. Dagegen ist das Auflösungsvermögen des Schattenmikroskops geringer. Die kleinsten praktisch mit Hilfe der schattenmikroskopischen Abbildungs- und Beugungsmethode erfaßten Objektbezirke hatten einen Durchmesser von etwa $5 \cdot 10^{-5}$ cm.

Störend für das mikroskopische Abbildungs- und Beugungsverfahren ist die Überlagerung des Hellfelduntergrundes mit den Neben-

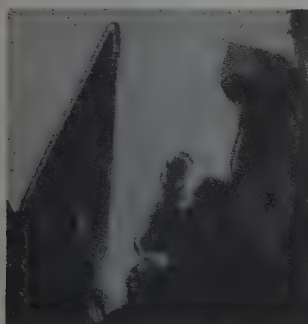


Bild. a Nebenbild.



Nebenbild. b Bild.

Fig. 3 a, b. Molybdänrauch mit Nebenbildern. Bild und Nebenbild der Fig. 3 b sind infolge der Tiefenausdehnung der schattengebenden Bezirke nicht kongruent begrenzt.

$$V = 36\,000 : 1; \alpha_0 = 9,6 \cdot 10^{-2};$$

$$U = 38 \text{ ekV.}$$

bildern, wodurch die Kontraste außerordentlich herabgesetzt werden, so daß z. B. in Fig. 2 Kopien verschiedener Schwärzungsbereiche notwendig wurden. Es ist daher zweckmäßig, im Schattenbereich der Objekträgerblende oder größerer schattengebender Objektbezirke zu arbeiten (vgl. Fig. 3), so daß wenigstens ein Teil der Nebenbilder nicht auf den Hellfelduntergrund fällt. Unter Umständen ist es auch ratsam, kurz vor oder hinter dem Objekt eine verschiebbare Blende anzuordnen, die durch seitliche Abblendung des Primärstrahls dasselbe

¹⁾ H. Boersch, ZS. f. Phys. 118, 706, 1942.

leistet. Der letzte Vorschlag entspricht der Objekt-Abschattungs-vorrichtung, die zur Verhütung von Elektronenbestrahlungsschäden vorgeschlagen und benutzt wurde¹⁾. Eine gleichzeitige, allseitige mechanische Abblendung des Primärstrahls erscheint zur Zeit wegen der Geringfügigkeit der Abstände Bild—Nebenbild kaum durchführbar. Bei dem schattenmikroskopischen Abbildungs- und Beugungsverfahren war dagegen eine Überlagerung der Nebenbilder und des Hellfelduntergrundes in einfacher Weise durch Ausblendung vermeidbar.

Auch für den unmittelbaren Vergleich von Hell-Dunkelfeld-Abbildungen scheinen die Nebenbilder in geeigneten Fällen bevorzugt anwendbar zu sein, wenn es nämlich darauf ankommt, Hell- und Dunkelfeldbild zu gleicher Zeit, bei gleicher Scharfstellung und bei exakt gleicher Einstellung des Objekts zum Primärstrahl zu gewinnen.

Ergebnisse. Wegen technischer Schwierigkeiten konnte eine Eichung der Abstände Bild—Nebenbild zur Erfassung der Beugungswinkel und damit eine quantitative Auswertung der Aufnahmen bisher nicht durchgeführt werden. Die qualitative Auswertung führte zu folgenden Resultaten.

Zunächst kann man ganz allgemein sagen, daß das Auftreten von Nebenbildern — wenigstens bei Spannungen von 40 ekV, bei denen systematisch nach ihnen gesucht wurde — durchaus nicht häufig ist. Bei höheren Spannungen wird man allerdings entsprechend dem größeren Durchmesser der Ewaldschen Ausbreitungskugel mehr Interferenzen, also mehr Nebenbilder erwarten können.

Die Nebenbilder von Goldsol (Fig. 1) stellen einen Beweis dafür dar, daß es sich in den dargestellten, bisher allein durch die Tracht als Einkristalle gekennzeichneten Individuen tatsächlich um Objekte mit einheitlichem Kristallgitter-Aufbau handelt. Im allgemeinen wird man erwarten, daß derartig kleine, ohne mechanische Beanspruchung gewachsene Einzelkristalle (abgesehen von nichtauflösbaren Fehlstellen) ein ungestörtes Kristallgitter aufweisen. Die voneinander abweichende Helligkeitsverteilung verschiedener Nebenbilder eines Kristalls zeigt jedoch, daß der Kristall nicht in allen Punkten gleichmäßig reflektiert, daß also sein Kristallgitter schwach verzerrt bzw. daß es sich nicht um planparallele Kristallplatten handelt.

In hier nicht wiedergegebenen Abbildungen von Chromrauch konnten erwartungsgemäß sechseckige Nebenbilder beobachtet werden.

¹⁾ M. v. Ardenne, ZS. f. Phys. 118, 348, 1941; Naturwiss. 29, 523, 1941.

Diese Nebenbilder stellen den unmittelbaren Beweis der von v. Borries und Ruska¹⁾ in Übereinstimmung mit einer früheren Arbeit²⁾ gemachten Angabe dar, daß die von der Neigung abhängige Durchlässigkeit dieser Kristalle durch Kristallgitter-Interferenzen verursacht wird.

In den Abbildungen des Molybdänrauchs traten in der Mehrzahl der untersuchten Fälle nur streifenförmige Nebenbilder auf (Fig. 2a), die mit dunklen Streifen zur Deckung zu bringen sind, die innerhalb der Bilder der Kristalle verlaufen (Fig. 2b). Diese dunklen Streifen sind nicht fest mit dem Kristall verwachsen, sondern ändern ihre Gestalt mit der Lage des Kristalls zum Primärstrahl, mit ihnen natürlich die Nebenbilder. Es handelt sich hier zweifellos um die Wirkung von Kristallgitter-Interferenzen, wie sie schon früher mit dem Schattenmikroskop untersucht wurden³⁾. Die dunklen Streifen im Bild stammen also von der Schwächung des Primärstrahls infolge des Auftretens von Kristallgitter-Interferenzen, die sich in diesen Aufnahmen selbst als Nebenbilder bemerkbar machen. Daß sich nur *einzelne* Bezirke der Kristalle in Reflexionsstellung befinden, dürfte auf einer schwachen Verzerrung derselben beruhen. Die damalige Erklärung der Entstehung dieser dunklen Streifen in elektronenmikroskopischen Abbildungen als Folge der Extinktion durch Kristallgitter-Interferenzen findet hier also ebenfalls ihre unmittelbare Bestätigung.

Das ungleichmäßige Reflexionsvermögen größerer Kristalle infolge von Verzerrungen dürfte von Interesse sein für die Beurteilung der durchschnittlichen Kristallgröße aus der Breite normaler Debye-Scherrer-Linien.

In einigen Fällen konnten auch größere Ausschnitte aus Kristallen des Molybdänrauchs im Nebenbild dargestellt werden (Fig. 3). Hierbei waren im Nebenbild Einzelheiten (Streifungen) kontrastreicher ausgebildet als im Bild. Da diese Aufnahmen, um einen genügend großen Abstand Bild—Nebenbild zu erzielen, unscharf abgebildet waren, ist

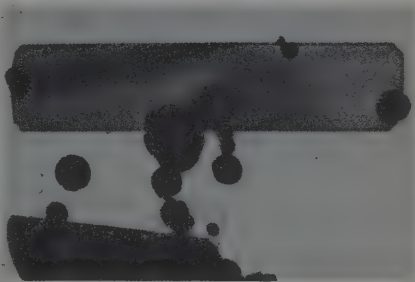


Fig. 4. Molybdänrauch.
 $V = 40\,000:1$; $\alpha_0 = 1,86 \cdot 10^{-3}$; $U = 38\text{ ekV}$.

¹⁾ B. v. Borries u. E. Ruska, Naturwiss. 28, 366, 1940. — ²⁾ Vgl. Anm. 1, S. 746. — ³⁾ Vgl. Anm. 1, S. 749.

zum Vergleich (Fig. 4) ein scharfes Bild bei geringerer Objektivapertur wiedergegeben, das ebenfalls ähnliche Streifungen aufweist. Ob diese Streifungen auf die Wirkung einer Dicken- oder einer Mosaikstruktur, im Sinne einer verschiedenen Reflexionsfähigkeit der verschiedenen Mosaikblöckchen, zurückzuführen sind, ist noch zweifelhaft.

*Nachtrag*¹⁾. Vorkurzem wurden von Kinder²⁾ (Hellfeld-) Aufnahmen von hochkantgelagerten Magnesiumoxyd-Kristallwürfeln gezeigt, die periodische streifenförmige und neigungsempfindliche Aufhellungen längs der Keilkante aufweisen. Nach einer Mitteilung von W. Kossel³⁾

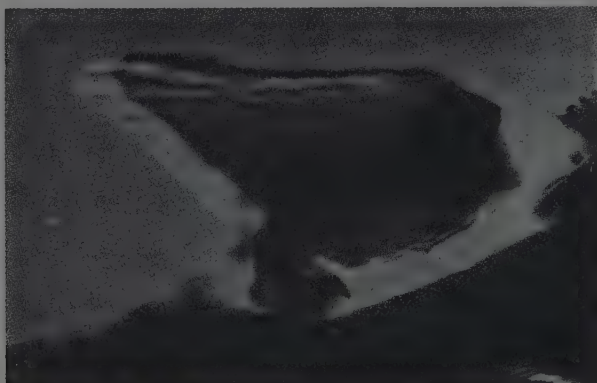


Fig. 5. Diamantstaub (0,005) mit Nebenbild. $V = 40\,000:1$; $U = 80\text{ ekV}$.

sind diese periodischen Aufhellungen den Kossel-Möllenstedtschen Interferenzen⁴⁾ analog, wobei die wegen der Parallelität der Primärstrahlung notwendige Variation, die der Divergenz der Strahlung in der Versuchsanordnung von Kossel und Möllenstedt entspricht, durch die Änderung der Dicke des Keils herbeigeführt wird.

Auch in Abbildungen von Diamantpulvern traten bei keilförmigen Gebilden ebenfalls derartige periodische Aufhellungen im (Hellfeld-) Bild auf. Diese streifenförmigen Gebilde wurden nun ebenfalls im Nebenbild, also im Dunkelfeldbild (Fig. 5), beobachtet, wobei allerdings, entsprechend den Erwartungen, eine Kontrastumkehr eintrat (vgl. Fig. 5, rechts oben). Die Beobachtung der Nebenbilder stützt wegen

¹⁾ Eingegangen am 18. Juni 1943. — ²⁾ E. Kinder, Naturwiss. 31, 149, 1943. — ³⁾ In einem Vortrag gehalten am 11. Mai 1943 im Gauverein Ostmark der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im II. Physikal. Institut der Universität Wien. — ⁴⁾ W. Kossel u. G. Möllenstedt, Ann. d. Phys. 36, 113, 1939.

ihrer Entstehung durch einzelne Strahlen großen Ablenkwinkels den Erklärungsversuch von Kossel, nach welchem auch die periodischen Aufhellungen in den Aufnahmen von keilförmigen kristallinen Objekten auf die Wirkung von Kristallgitter-Interferenzen zurückzuführen sind.

Diese Aufnahmen bestätigen von neuem, daß die Kontrastbildung in Abbildungen kristalliner Objekte weitgehend von dem Ansprechen von Kristallgitter-Interferenzstrahlen abhängt¹⁾, deren Ansprechvermögen eine Funktion der Gitterkonstante, der Neigung und der Ausdehnung des Kristalls ist. Ob einer dieser Faktoren überwiegt, läßt sich u. U., wie z. T. in den bisher betrachteten Fällen, aus dem Abbildungsmaterial und geeigneter Variation der Versuchsbedingungen entscheiden.

Zusammenfassung. Nebenbilder in elektronenmikroskopischen Abbildungen kristalliner Objekte konnten als Folge des Auftretens von Kristallgitter-Interferenzen und der Wirkung nichtidealer Abbildung geklärt werden. Diese Erscheinung kann als Elektronenbeugungsmethode zur Untersuchung kleinster Objekte bei gleichzeitiger übermikroskopischer Abbildung verwertet werden.

Fig. 1 und 5 wurden von Frl. Scharwächter mit dem Siemens-Übermikroskop im Kaiser Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie, Berlin-Dahlem, die übrigen Abbildungen vom Verf. mit einem anderen Instrument²⁾ aufgenommen. Frl. Scharwächter konnte später ebenfalls die Zusammenhänge zwischen Scharfstellung und Abstand Bild—Nebenbild in anderen Aufnahmereihen bestätigen. Der Verf. ist der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Unterstützung dieser Arbeit zu Dank verpflichtet. Ferner hat er Herrn Dr. Friedrich Freksa für interessante Diskussionen und Herrn Prof. Dr. P. A. Thiessen für das Entgegenkommen zu danken, mit dem er ihm die in seinem Institut erhaltenen Resultate zugänglich machte.

Wien, I. Chem. Laboratorium d. Universität (Laboratorium für Strukturforschung und Übermikroskopie).

¹⁾ Vgl. Anm. 1, S. 746. — ²⁾ H. Boersch, Phys. ZS. 43, 515, 1942.

Berichtigung zur Arbeit „Zur Frage der Absorptionsmessung im Ultraschallgebiet“.

Von **Heinz Born**¹⁾.

In der angeführten Arbeit sind in den Gleichungen (1), (8), (9), (10) und (11) einige Schreibfehler enthalten, die auf die Endgleichungen (12) und (13) und damit auch auf die daraus gezogenen Schlußfolgerungen ohne Einfluß geblieben sind. Gleichung (1) muß lauten:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_F \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot dF.$$

Die rechte Seite von Gleichung (8) ist mit dem positiven Vorzeichen zu versehen, ebenso das z im Exponenten des 3. Summanden unter der Wurzel. Gleichung (8) lautet also richtig:

$$p = \frac{v \cdot \sigma \cdot \omega}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}} \cdot \sqrt{e^{-2\alpha \sqrt{R^2 + z^2}} + e^{-2\alpha z} - 2e^{-\alpha [\sqrt{R^2 + z^2} + z]} \cdot \cos k [\sqrt{R^2 + z^2} - z]}.$$

Entsprechend dieser Vorzeichenkorrektur sind die Gleichungen (9) und (10) abzuändern. In Gleichung (11) ist in sämtlichen Exponenten das λ zu streichen, ebenso in den Exponenten der im folgenden Satz enthaltenen e -Funktionen.

Bad Reichenhall, Frühlingsstraße 34, 20. Mai 1943.

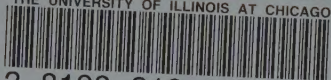
¹⁾ ZS. f. Phys. 120, 383, 1943.

Autorenregister.

- Ardenne, Manfred von. Zur Eignung bindemittelarmer Photoschichten in der Elektronen-Übermikroskopie. S. 1.
- (zum Teilgemeinsam mit Bernhard, Fritz). Über eine Atomumwandlungsanlage für Spannungen bis zu 1 Million Volt. S. 236.
- Bernhard, Fritz s. Ardenne, Manfred von.
- Boersch, H. Nebenbilder in elektromikroskopischen Abbildungen. S. 746.
- Born, Heinz. Berichtigung zur Arbeit „Zur Frage der Absorptionsmessung im Ultraschallgebiet“. S. 754.
- Bruin, T. L. de, Schuurmans, Ph. und Klinkenberg, P. F. A. Die Struktur des Th II-Spektrums. I. S. 667.
- Finke, W. Bemerkungen zu G. Haenzel: „Die Polygonfläche und das Periodische System der Elemente.“ S. 586.
- Flügge, S. Zur spontanen Spaltung von Uran und seinen Nachbar-elementen. S. 298.
- Fues, E. Gibt es Wirbelreibung? II. Entgegnung zu den Einwänden von E. Mohr. S. 58.
- Gehlen, J. Bestimmung des Einfangwirkungsquerschnittes von technischem Aluminium für langsame Neutronen. S. 268.
- Gerö, L. und Schmid, R. Über das Bandenspektrum des Silberhydrids. S. 459.
- Glaser, Walter. Bildentstehung und Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops vom Standpunkt der Wellenmechanik. S. 647.
- Gombás, Paul. Erweiterung der statistischen Theorie des Atoms. S. 523.
- Graf, Ludwig. Zum Gefügebau der Realkristalle. Die Ausbildung der Mosaikstruktur in gegossenem, plastisch verformtem und rekristallisiertem Material. S. 73.
- Hahn, Otto und Strassmann, Fritz. Über die bei der Uranspaltung auftretenden Strontium- und Yttrium-Isotope. S. 729.
- Hanke, Walter. Beitrag zum Problem der Bestimmung von Größe und Gestalt ultramikroskopischer Teilchen. S. 438.
- Havlicek, F. I. Zur Struktur des Wassers. S. 495.
- Hellwege, K.-H. Zur Ausmessung atomarer Strahlungsquellen in Kristallen. II. Berechnung der Absorptionsverteilung für Dipolstrahlung und Bestimmung von Übergangswahrscheinlichkeiten. S. 588.
- Klinkenberg, P. F. A. s. Bruin, T. L. de.
- Koch, K. M. Bemerkungen zu der Arbeit von Th. Neugebauer: „Der absolute Diamagnetismus der Supraleiter.“ S. 488.
- Koppe, Heinz. Eine Näherungsmethode zur Berechnung der magnetischen Suszeptibilität. S. 614.
- Kornetzki, M. Über die Dämpfung mechanischer Schwingungen durch magnetische Hysterese. S. 560.
- Krüger, M. Die Theorie der in endlicher Entfernung von der Trennungsebene zweier Medien erregten Kugelwelle für endliche Brechungsindizes. S. 377.
- Kundt, W. s. Suhrmann, R.
- Lumpe, W. und Seeliger, R. Über die Wanderung von Edelgasen durch Metalle. S. 546.
- Maurer, W. und Pose, H. Neutronenemission des Urankerns als Folge seiner spontanen Spaltung. S. 285.

- Mierdel, G. Das Abklingen von Trägerdichte und Elektronentemperatur in verlöschenden Niederdruckentladungen. S. 574.
- Mohr, Ernst. Laminare und turbulente Strömungen mit besonderer Berücksichtigung des Einflusses von festen Wänden. S. 301.
- Pohl, R. W. Nebenbegriffe und Gasgesetz. S. 543.
- Pose, H. Spontane Neutronenemission von Uran und Thorium. S. 293.
— s. Maurer, W.
- Schaefer, H. und Walcher, W. Negative Ionen in Braunschen Röhren und ihr Zusammenhang mit dem Oxydkathoden-Mechanismus. S. 679.
- Schmid, R. s. Gerö, L.
- Schmidt, Theodor. Über das Quadrupolmoment des Atomkerns $^{181}_{73}\text{Ta}$. S. 63.
- Schumann, W. O. Über Plasmalaufzeitschwingungen. S. 7.
— Über räumlich periodische Verteilungen frei fallender Ionen und Elektronen. S. 629.
- Schuermans, Ph. s. Bruin, T. L. de.
- Seeliger, R. s. Lumpe, W.
- Sixtus, Klaus. Das Gesetz der Magnetisierung in schwachen Feldern. S. 100.
- Stille, U. Die Umrechnungsfaktoren von internationalen auf absolute elektrische Einheiten. S. 34.
— Die atomaren Konstanten e , e/m_0 und h . S. 133.
- Strassmann, Fritz s. Hahn, Otto.
- Suhrmann, R. und Kundt, W. Über den Einfluß adsorbierten Sauerstoffs auf die Sekundäremission aufgedampfter Metallschichten bei 293° und 83° abs. S. 118.
- Ulbrich, Raimund. Die Aktivierung der Palladiumoberfläche mittels Glimmentladung. S. 351.
- Volz, Helmut. Wirkungsquerschnitte für die Absorption langsamer Neutronen. S. 201.
- Walcher, W. Über die Verwendungsmöglichkeiten der Kunsman-Anode zur massenspektroskopischen Isotopentrennung. S. 604.
— Der Einfluß der Raumladung auf die Abbildungseigenschaften magnetischer Sektorfelder. S. 719.
— s. Schaefer, H.
- Waldmann, L. Der Diffusionsthermoeffekt. I. S. 501.
- Wasserrab, Th. Die positive Säule mit gekrümmter Entladungsbahn. S. 54.
- Wick, G. C. Über ebene Diffusionsprobleme. S. 702.

THE UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO



3 8198 318 811 492

